Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique.

Véronique Battie

UNIVERSITE PARIS 7 – DENIS DIDEROT

UFR de Mathématiques

ECOLE DOCTORALE SAVOIRS SCIENTIFIQUES : EPISTEMOLOGIE, HISTOIRE DES SCIENCES, DIDACTIQUE DES DISCIPLINES

Année 2003

THESE

Pour l'obtention du Diplôme de

Docteur de L'Université Paris 7

Spécialité :

Didactique des Mathématiques

Présentée et soutenue publiquement
Le 12 décembre 2003
Par

Véronique BATTIE

Spécificités et potentialités de l'Arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique

***Directeur de thèse* : Michèle ARTIGUE**

Membres du jury

Michèle ARTIGUE	Directeur
Jean-Luc DORIER	Rapporteur
Viviane DURAND-GUERRIER	Examinateur
Catherine GOLDSTEIN	Examinateur
Marc ROGALSKI	Rapporteur
Michel SERFATI	Examinateur

à ma LuMière

REMERCIEMENTS

Il y a quatre ans, commençait pour moi une belle aventure. J'aimerais que cette page témoigne de sa riche dimension humaine.

Je tiens avant tout à exprimer toute ma gratitude à l'égard de Michèle Artigue grâce à qui ces années de recherche ont été extraordinairement formatrices. Tout en m'évitant certains égarements, elle a su me laisser une grande liberté sans laquelle je n'aurais pu m'épanouir dans cette recherche. Je la remercie très chaleureusement aussi pour m'avoir soutenue et fait pleinement confiance lorsqu'il s'est agi pour moi de vivre plusieurs mois à l'autre bout de la planète… Le jour où elle a accepté de devenir ma directrice de thèse (ce même jour où je la rencontrais pour la première fois), j'étais bien loin d'imaginer à quel point j'étais chanceuse.

Je suis très reconnaissante envers Michel Serfati qui a encadré avec une généreuse disponibilité mon travail épistémologique. Son aide m'a été extrêmement précieuse.

Je remercie vivement Martine Bühler, professeur de mathématiques au lycée Flora Tristan et animatrice à l'IREM-Paris 7, avec qui il m'a été très agréable et enrichissant de travailler, ainsi que ses élèves de terminale scientifique, pour m'avoir chaleureusement accueillie dans leur classe.

Jean-Luc Dorier et Marc Rogalski m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs sur ma thèse. Viviane Durand-Guerrier, Catherine Goldstein et Michel Serfati m'ont fait celui de faire partie du jury. Qu'ils soient tous ici grandement remerciés.

Je tiens à remercier Gilles Dowek, Georges Lion, Daniel Perrin et François Pluvinage pour avoir très gentiment répondu à mes questions. Leurs réponses ont nourri de façon très riche ma réflexion.

Je remercie vivement Annie, Martine, Nadine et Nicole de l'équipe de l'IREM-Paris7 pour leur extrême gentillesse et tout le soutien qu'elles m'ont apporté.

Je tiens à remercier l'équipe DIDIREM et plus particulièrement ses jeunes chercheurs qui m'ont répondu avec enthousiasme lorsque j'ai eu envie de refonder l'équipe jeunes chercheurs. Merci à Caroline et à Eric pour avoir énergiquement et efficacement pris le relais !

Durant ces quatre années, j'ai eu la chance de bénéficier d'une merveilleuse ambiance de travail au célèbre bureau 5B1 ;-) Un grand Merci à Vincent :-), Christian, Florent, Caroline, Michela, Nuray et Mohamed pour avoir contribué, chacun à leur façon, à la beauté de cette aventure !

Il m'est inconcevable de tourner cette page sans y déposer pudiquement un Merci plein d'Amour en pensant à « mon noyau », en pensant à ses cinq éléments.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION **8**

PARTIE 1 : **12**

ANALYSE EPISTEMOLOGIQUE **12**

CHAPITRE 1 : **13**

DIMENSIONS ORGANISATRICE ET OPERATOIRE DU RAISONNEMENT EN ARITHMETIQUE **13**

INTRODUCTION **14**

I. « IL N'EXISTE PAS DE TRIANGLE RECTANGLE EN NOMBRES DONT L'AIRE SOIT UN CARRE » **14**

I.1 VOCABULAIRE ET RESULTATS PRELIMINAIRES 14
I.2 LA PREUVE DE FRENICLE 16
I.3 UNE PREUVE INSPIREE DE CELLE DE FRENICLE 17
I.3.1 Préliminaire 17
I.3.2 Première étape 18
I.3.3 Deuxième étape 21
I.3.4 Troisième étape 21

II. DISTINCTION ENTRE DEUX DIMENSIONS AU SEIN D'UNE DEMONSTRATION ARITHMETIQUE **21**

III. FERMAT ET FRENICLE **23**

III.1 LA PREUVE DE FERMAT 23
III.2 ANALYSE COMPARATIVE 30

CHAPITRE 2 : **35**

PENSEES ORGANISATRICES FONDAMENTALES EN ARITHMETIQUE **35**

INTRODUCTION **36**

I. DESCENTE INFINIE - RECURRENCE **36**

I.1 FORMALISATION DE LA DESCENTE INFINIE 37
I.2 DESCENTE INFINIE ET RAISONNEMENT PAR RECURRENCE 38
I.2.1 Avec l'exemple sur lequel Fermat inventa la descente infinie 38
I.2.2 Généralisation 39
I.3 APPLICATIONS DE LA DESCENTE INFINIE 40
I.3.1 Montrer qu'une propriété P(n) est vraie pour tout entier n 41
I.3.2 Résolutions d'équations diophantiennes 42

II. RAISONNEMENT PAR DISJONCTION DE CAS ET RECHERCHE EXHAUSTIVE **42**

II.1 DISJONCTION DE CAS 43
II.1.1 Définition 43
II.1.2 Nature d'une disjonction de cas – Notion de partition primaire 44
II.1.3 Exemples 45
II.2 RECHERCHE EXHAUSTIVE 48
II.2.2 Démarche algorithmique et recherche exhaustive 48
II.2.3 Un exemple 50

III. JEU D'EXTENSION-REDUCTION : UNE METHODE SPECIFIQUE AUX ANNEAUX FACTORIELS **50**

IV. IMBRICATION DE DESCENTE INFINIE, DISJONCTION DE CAS ET JEU D'EXTENSION-REDUCTION **54**

II.4.1 Résultats préliminaires 55
II.4.2 Une démonstration inspirée des idées de Fermat 56
II.4.3 Un organigramme synthétisant la dimension organisatrice 59

CHAPITRE 3 : **61**

POLES OPERATOIRES FONDAMENTAUX EN ARITHMETIQUE **61**

INTRODUCTION **62**

I. DIFFERENTES FORMES DE REPRESENTATION DES ENTIERS **64**

I.1 STRUCTURATION DES ENTIERS AUTOUR DES NOMBRES PREMIERS 64
I.1.1 Introduction *64*
I.1.2 Exemples de problèmes associés *65*
I.2.3 Niveau Technologique *67*
I.2.4 Une pensée organisatrice associée *67*
I.2 STRUCTURATION DES ENTIERS A L'AIDE DE RESEAUX REGULIERS 67
I.2.1 Introduction *67*
I.2.2 Exemples de problèmes associés *68*
I.2.3 Niveau Technologique *70*
I.2.4 Pensées organisatrices associées *71*

II. UTILISATION DE THEOREMES-CLEFS **72**

II.1 INTRODUCTION 72
II.2 EXEMPLES ASSOCIES AUX THEOREMES DE GAUSS ET BEZOUT 73
II.3 NIVEAU TECHNOLOGIQUE 75

III. L'OUTIL ALGEBRIQUE **76**

III.1 INTRODUCTION 76
III.2 FACTORISATION ET DIVISIBILITE 76
III.3 COMBINAISONS LINEAIRES D'ENTIERS 77
III.4 RETOUR A FERMAT ET FRENICLE 77

IV. ORDRES NATUREL ET DIVISIBILITE **79**

IV.1 INTRODUCTION 79
IV.2 NIVEAU TECHNOLOGIQUE ET ILLUSTRATION DES TECHNIQUES ASSOCIEES 80

CHAPITRE 4 : **83**

CONCLUSION **83**

INTRODUCTION **84**

I. DIMENSIONS ORGANISATRICE ET OPERATOIRE ET LEURS INTERACTIONS AU SEIN DE DEUX DEMONSTRATIONS **84**

I.1 LA DEMONSTRATION INSPIREE DE FRENICLE 84
I.2 REPRESENTATION DES ENTIERS COMME SOMME DE DEUX CARRES 85

II. SYNTHESE ET PERSPECTIVES DIDACTIQUES **87**

II.1 SYNTHESE 88
II.2 PERSPECTIVES DIDACTIQUES 89

PARTIE 2 : **92**

ANALYSE DIDACTIQUE **92**

CHAPITRE 5 : **93**

L'EPREUVE DE L'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE AU BACCALAUREAT DEPUIS LA MISE EN APPLICATION DES PROGRAMMES DE 1998 .... **93**

INTRODUCTION **94**

I. UNE CLASSIFICATION DES SUJETS ETUDIES **96**

II. REGROUPEMENT AUTOUR DE LA RESOLUTION D'EQUATIONS DIOPHANTIENNES **100**

II.1 RESOLUTION D'EQUATIONS DU TYPE AX+BY+CZ=D 100
II.1.1 La tâche τ' *101*
II.1.2 La tâche τ *102*
II.1.3 Résolution d'équations du type ax+by+cz=d avec c non nul *117*
II.2 TRIPLETS PYTHAGORICIENS ET EQUATIONS DU TYPE N²-SN+11994 (S ENTIER NATUREL) 120

III. REGROUPEMENT AUTOUR DE LA NOTION DE DIVISIBILITE **121**

III.1 QUESTIONS DE DIVISIBILITE 122
III.1.1 Type de tâche T1 .... *124*
III.1.2 Types de tâche T2 et T3 .... *127*
III.1.3 Importance quantitative et qualitative des questions de divisibilité *127*
III.2 PGCD 129
III.2.1 Un cas particulier : nombres premiers entre eux *130*
III.2.2 Autres cas rencontrés *131*
III.3 PGCD ET PPCM 134

IV. REGROUPEMENTS AUTOUR DES NOTIONS DE DIVISION EUCLIDIENNE ET PRIMALITE **136**

IV.1 PRIMALITE 136
IV.2 DIVISION EUCLIDIENNE 138

V. CONCLUSION **138**

CHAPITRE 6 : **143**

RESSOURCES DESTINEES AUX ENSEIGNANTS **143**

INTRODUCTION **144**

I. RESOLUTION D'EQUATIONS DIOPHANTIENNES LINEAIRES : LA TACHE EMBLEMATIQUE. **146**

I.1 DOCUMENT DU GEPS 146
I.2 BROCHURES DE L'IREM DE MONTPELLIER 148

II. RESOLUTION D'EQUATIONS DIOPHANTIENNES DE DEGRE SUPERIEUR OU EGAL A 2 .... **150**

II.1 TRIPLETS PYTHAGORICIENS 150
II.2 REPRESENTATION DES ENTIERS COMME SOMME DE DEUX CARRES 152
II.2.1 Brochure de l'APMEP *152*
II.2.2 Brochure de l'IREM de Montpellier *157*
II.3 AUTRES EQUATIONS DIOPHANTIENNES 157
II.3.1 Document du GEPS *158*
II.3.2 Brochures de l'IREM de Montpellier *158*

III. CONCLUSION **160**

CHAPITRE 7 : **165**
UNE EPREUVE D'ENTRAINEMENT AU BACCALAUREAT **165**
INTRODUCTION **167**
I. ANALYSE *A PRIORI* **168**
I.1 ANALYSE *A PRIORI* DES SOLUTIONS POSSIBLES POUR LES DIFFERENTES QUESTIONS 169
I.2 ANALYSE MATHEMATIQUE ET DIDACTIQUE EN TERMES DE DIMENSIONS ORGANISATRICE ET OPERATOIRE 172
I.2.1 Mener une recherche exhaustive 173
I.2.2 Recherche exhaustive et traitement des contraintes du système (S) 177
I.2.3 Synthèse et compléments : élaboration d'organigrammes et de grilles d'analyse 179
I.3 EMERGENCE D'UN QUESTIONNEMENT DIDACTIQUE 187
II. ANALYSE *A POSTERIORI* **189**
II.1 QUELLE(S) PENSEE(S) ORGANISATRICE(S) RENCONTRE-T-ON DANS LES COPIES ETUDIEES ? 189
II.1.1 Entre reconstruction de la pensée sous-jacente à l'énoncé et création d'une autre pensée organisatrice 191
II.1.2 Trois copies proposent une résolution complète du problème (P') 212
II.2 COMMENT L'AUTONOMIE DEVOLUE AU NIVEAU OPERATOIRE EST-ELLE GEREE PAR LES ELEVES ? 216
II.2.1 Autonomie dévolue au niveau opératoire et dialectique entre les dimensions organisatrice et opératoire 216
II.2.2 Echecs au niveau opératoire 218
II.2.3 Traitements opératoires locaux et originaux 220
II.3 NATURE DES NOMBRES ET DIALECTIQUE ENTRE LES COMPOSANTES ORGANISATRICE ET OPERATOIRE 221
II.3.1 Une non-prise en compte de la nature des objets 221
II.3.2 Un diagnostic mitigé 222
III. CONCLUSION **222**
CHAPITRE 8 : **228**
UNE EXPERIMENTATION EN CLASSE DE TERMINALE SCIENTIFIQUE **228**
INTRODUCTION **229**
I. ANALYSE *A PRIORI* **230**
I.1 ANALYSE MATHEMATIQUE EN TERMES DE DIMENSIONS ORGANISATRICE ET OPERATOIRE 230
I.1.1 Problème en jeu 230
I.1.3 Différentes preuves de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ 231
I.1.4 De $\sqrt{2}$ à $\sqrt{3}$: seul l'opératoire varie 235
I.1.5 Vers une généralisation 235
I.1.6 Pour une synthèse : un organigramme 236
I.2 ANALYSE DIDACTIQUE EN TERMES DE DIMENSIONS ORGANISATRICE ET OPERATOIRE : EMERGENCE D'UN QUESTIONNEMENT DIDACTIQUE 238
I.2.1 Production d'une preuve 238
I.2.2 Comparaison d'une preuve à des preuves données et production de preuves à partir de ces preuves. 241
I.2.3 Généralisation à partir de preuves données 246
II. ANALYSE *A POSTERIORI* **247**
II.1 ANALYSE DES PRODUCTIONS ECRITES 248
II.1.1 Groupe A 248
II.1.2 Groupe B 255
II.2 ANALYSE DE LA TRANSCRIPTION DU GROUPE A 260
II.2.1 Itinéraire 260
II.2.2 En procédant à des zooms 263
II.3 ANALYSE DE LA TRANSCRIPTION DU GROUPE B 284
II.3.1 Itinéraire 284
II.3.2 En procédant à des zooms 289
III. SYNTHESE **324**
CONCLUSION GENERALE **331**
BIBLIOGRAPHIE **341**
ANNEXES **344**

INTRODUCTION

Dans l'enseignement secondaire français, la place de l'arithmétique, arène des nombres par excellence, a fortement varié qualitativement et quantitativement dans l'histoire des programmes. Après des années de purgatoire, l'arithmétique a réapparu en 1998 en classe de terminale scientifique, dans le cadre de l'enseignement de spécialité et depuis, les classes de troisième et seconde se sont trouvées aussi concernées. Cette réintroduction a été en partie motivée par l'idée que l'arithmétique pouvait favoriser un travail sur le raisonnement mathématique. Une telle évolution curriculaire induit inévitablement des questions didactiques, notamment les suivantes : l'arithmétique des programmes actuels de terminale favorise-t-elle réellement un travail sur le raisonnement mathématique et, si oui, quelles en sont les spécificités ? L'arithmétique enseignée actuellement à ce niveau permet-elle effectivement ce type de travail ? Ce sont ces questions didactiques qui sont au cœur de notre recherche. En décidant de les aborder, nous avons fait l'hypothèse que, quelques années après cette réintroduction de l'arithmétique, on pouvait considérer que le système d'enseignement, qui n'avait pas rejeté cette réintroduction, avait atteint un certain point d'équilibre par rapport auquel l'étude de nature écologique que nous voulions mener prenait sens.

De nombreuses recherches didactiques ont abordé, depuis plus de vingt ans, des questions relatives au raisonnement mathématique et à la preuve, en d'autres termes à la rationalité mathématique, essayant de comprendre comment se construit chez l'élève cette rationalité mathématique et quelles difficultés cette construction pose, analysant les pratiques d'enseignement dans ce domaine et cherchant à en cerner les effets, et essayant de définir des stratégies didactiques mieux adaptées. Elles ont bien mis en évidence les difficultés rencontrées par les élèves et étudiants (cf. par exemple (Durand-Guerrier, 1996), (Dreyfus, 1999) et (Hanna, 2000) pour une vision plus synthétique). Elles ont aussi contribué à mettre en évidence certaines spécificités de la rationalité mathématique suivant les domaines (*International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*). Il faut cependant reconnaître, et il y a à cela des raisons culturelles évidentes, que dans ces recherches, excepté aux niveaux les plus avancés relevant de ce qui est souvent qualifié "advanced mathematical thinking" (Tall, 1991), le domaine géométrique a été très largement privilégié. Ceci a par exemple été bien souligné par Grenier et Payan dans leur travail concernant « modélisation et preuve » en mathématiques discrètes (Grenier et Payan, 1998). Les recherches concernant tant l'identification *a priori* des potentialités de l'arithmétique pour le développement de la rationalité, au niveau intermédiaire envisagé ici, que la mise en place et/ou l'analyse de dispositifs curriculaires visant à les exploiter sont singulièrement limitées, comme le montre clairement par exemple une recherche bibliographique sur la base de données du Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, la plus importante base de données actuelle dans le domaine didactique.

C'est cette lacune, associée à un discours « noosphérien » qui, lui, tendait à considérer comme une évidence le fait que ce champ conceptuel offre de réelles potentialités pour l'apprentissage de la rationalité mathématique, qui a motivé notre recherche.

Et cette recherche, compte-tenu de ce qui précède, s'est très naturellement d'abord orientée vers un questionnement de nature épistémologique. Avant de chercher à comprendre les potentialités de l'arithmétique pour le développement de la rationalité en terminale S, il nous semblait nécessaire d'étudier les spécificités des modes de raisonnement qui mettent en jeu les notions d'arithmétique mentionnées par les textes officiels : divisibilité dans Z, division euclidienne (algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD), congruences dans Z, entiers premiers entre eux, nombres premiers (existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers), PPCM, théorèmes de Bézout et Gauss… Nous l'avons fait en nous basant sur l'étude de preuves arithmétiques, historiques et actuelles.

Précisons que nous parlerons dans la suite, à propos de ces modes de raisonnement, de *raisonnement en arithmétique* et non de *raisonnement arithmétique*. Cette distinction est faite pour éviter un certain nombre de malentendus. En effet, pour de nombreux didacticiens, en particulier pour ceux familiers des travaux menés en didactique de l'algèbre, l'expression *raisonnement arithmétique* a un sens bien précis. Elle désigne une forme de raisonnement en jeu dans la résolution de problèmes élémentaires dans le champ numérique (ce que l'on appelle souvent des "word problems") qui partant du connu progresse pas à pas vers l'inconnu, ce qui s'oppose à la démarche analytique qui est en jeu dans la résolution algébrique de ces mêmes problèmes (Schmidt, 2002). Dans notre recherche, nous ne nous intéressons pas aux problèmes de la transition arithmétique-algèbre qui ont amené à cette distinction entre raisonnement arithmétique et raisonnement algébrique. Au contraire, nous supposons que, pour les élèves concernés par notre étude, ceux de terminale scientifique ayant choisi la spécialité mathématique, le symbolisme algébrique est devenu un outil usuel et relativement efficace du travail mathématique.

Si, dans notre recherche, l'analyse que nous qualifions d'épistémologique dans la suite est apparue comme un préalable nécessaire à la réflexion didactique, cette analyse, à elle seule, était insuffisante pour nous permettre de répondre à toutes les questions que nous nous posions, questions rappelées au début de cette introduction. Elle fournit, pour les aborder, un cadre de pensée mais, pour y répondre, il fallait étudier de façon précise l'écologie des potentialités que cette analyse épistémologique a révélées dans le contexte curriculaire envisagé ici. Cette partie de la recherche a été menée suivant deux axes principaux : via l'analyse du champ réellement exploité par l'institution scolaire et via celle de travaux d'élèves. Et, pour chacune de ces analyses, nous avons choisi deux types contrastés de corpus, opposés en quelque sorte si l'on considère les contraintes institutionnelles auxquelles ils sont assujettis.

Pour l'analyse du champ réellement exploité par l'institution scolaire, c'est-à-dire la dimension institutionnelle de l'analyse, nous avons ainsi choisi d'analyser d'une part la partie arithmétique des sujets de baccalauréat depuis la réintroduction de l'arithmétique en terminale, d'autre part des ressources destinées aux enseignants, non pas les manuels même si nous savons pertinemment que ce sont les ressources principalement utilisées par les enseignants, mais des ressources moins contraintes et susceptibles de nous montrer, à l'inverse des sujets de baccalauréat, l'ouverture maximum du champ des possibles. C'est pour cela que nous nous sommes centrée sur des publications IREM[4] et APMEP[5].
Pour l'analyse de travaux d'élèves, qui nous apparaissait comme un complément indispensable de l'analyse institutionnelle, nous avons cette fois choisi, pour contraster les corpus, d'une part d'analyser des copies d'élèves issues d'une épreuve d'entraînement au baccalauréat, d'autre part de préparer, en collaboration avec une enseignante animatrice à l'IREM Paris 7, une activité de recherche sur une question de rationalité et d'observer son déroulement dans la classe de cette enseignante. En organisant cette expérimentation, nous avons, comme nous l'avons déjà exprimé, cherché à observer les élèves dans un cadre aussi peu contraint que possible. Mais nous avons aussi choisi de proposer aux élèves des tâches se situant quelque peu aux limites de la culture d'enseignement étudiée dans cette recherche. Cette stratégie de recherche consistant à se situer à la marge du système que l'on étudie est assez fréquente en didactique. Elle a l'avantage de permettre d'observer des phénomènes intéressants qui seraient moins visibles dans des situations plus ordinaires et c'est pourquoi nous l'avons retenue ici. Le corpus correspondant est constitué des productions écrites des groupes d'élèves ainsi que des transcriptions de l'enregistrement audio des discussions au sein des groupes et des brouillons. Précisons que les deux types de corpus envisagés pour le deuxième axe de l'étude écologique permettent également d'avoir accès dans la recherche à deux types de production différents : dans le premier cas, nous avons accès à un produit fini réalisé pour l'enseignant, dans le second cas, nous avons également accès à ce produit fini mais aussi à l'intimité du processus de recherche.

Le manuscrit qui suit se compose donc assez naturellement de deux parties qui renvoient aux deux facettes principales de notre recherche.

La première partie, **Partie 1**, a pour objet la présentation de l'outil épistémologique issu de notre travail et l'élucidation à l'aide de cet outil de potentialités offertes par l'arithmétique pour l'apprentissage du raisonnement mathématique ; elle comprend quatre chapitres. Dans le **chapitre 1**, à partir d'une démonstration historique du résultat énonçant qu'*il n'existe pas de triangle rectangle en*

[4] Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

[5] Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

nombres[6] *dont l'aire soit un carré,* nous introduisons la distinction, dans le raisonnement en arithmétique, entre deux dimensions que nous appelons « organisatrice » et « opératoire » ; d'une manière générale, selon cette distinction, la *dimension organisatrice* s'identifie au raisonnement global qui traduit la mise en acte d'une visée et la *dimension opératoire* définit tout ce qui relève des techniques de calcul utilisées au fil de la démonstration qui permettent de mettre en œuvre les différentes étapes du ou des raisonnements suivis. Dans le **chapitre 2** (*resp.* **chapitre 3**), nous précisons comment la dimension organisatrice (*resp.* dimension opératoire) « vit » au sein du champ de l'arithmétique. Dans le **chapitre 4**, nous revenons sur l'articulation entre dimensions organisatrice et opératoire à travers deux exemples déjà travaillés dans les chapitres précédents, avant d'effectuer une synthèse du travail mené dans cette première partie et de préciser comment va se situer par rapport à lui ce qui sera présenté dans la partie 2.

La deuxième partie, **Partie 2**, contient tous les éléments de l'étude écologique des potentialités révélées *a priori* par l'analyse épistémologique. Elle se compose elle-même de deux parties : la **partie 2.1** correspond à l'étude institutionnelle et la **partie 2.2** concerne celle du rapport d'élèves de terminale S à la rationalité mathématique. Chacune de ces parties comprend deux chapitres. Dans le **chapitre 5**, nous analysons les sujets d'arithmétique de l'épreuve de spécialité du baccalauréat depuis la mise en application des programmes de 1998 avec lesquels, rappelons-le, ce champ mathématique réapparaît officiellement. Dans le **chapitre 6**, nous analysons des ressources destinées aux enseignants. Le **chapitre 7,** quant à lui, étudie une quinzaine de copies d'élèves produites lors d'une épreuve d'entraînement au baccalauréat. Le **chapitre 8,** enfin, présente l'expérimentation menée au sein d'une classe de terminale S qui a été construite autour d'une étude de rationalité et analyse plus précisément les productions et la recherche de deux groupes d'élèves. Un dernier chapitre de synthèse et conclusion clôt enfin, comme il est d'usage, le manuscrit.

[6] C'est-à-dire dont la longueur de chacun des côtés a pour mesure un nombre entier.

PARTIE 1 :

ANALYSE EPISTEMOLOGIQUE

CHAPITRE 1 :

DIMENSIONS ORGANISATRICE ET OPERATOIRE DU RAISONNEMENT EN ARITHMETIQUE

CHAPITRE 1 : ... 13

DIMENSIONS ORGANISATRICE ET OPERATOIRE DU RAISONNEMENT EN ARITHMETIQUE ... 13

INTRODUCTION ... 14

I. « IL N'EXISTE PAS DE TRIANGLE RECTANGLE EN NOMBRES DONT L'AIRE SOIT UN CARRE » ... 14

I.1 VOCABULAIRE ET RESULTATS PRELIMINAIRES ... 14
I.2 LA PREUVE DE FRENICLE ... 16
I.3 UNE PREUVE INSPIREE DE CELLE DE FRENICLE ... 17
I.3.1 Préliminaire ... 17
I.3.2 Première étape ... 18
I.3.3 Deuxième étape ... 21
I.3.4 Troisième étape ... 21

II. DISTINCTION ENTRE DEUX DIMENSIONS AU SEIN D'UNE DEMONSTRATION ARITHMETIQUE ... 21

III. FERMAT ET FRENICLE ... 23

III.1 LA PREUVE DE FERMAT ... 23
III.2 ANALYSE COMPARATIVE ... 30

INTRODUCTION

L'objet de ce premier chapitre est l'introduction de la distinction entre *dimension organisatrice* et *dimension opératoire* au sein du raisonnement en arithmétique qui est au cœur de l'outil épistémologique issu de notre travail.

Nous introduisons cette distinction en nous basant sur un résultat célèbre[7] dans l'histoire des mathématiques : il n'existe pas de triangle rectangle en nombres (c'est-à-dire dont les côtés ont pour longueur des nombres entiers) dont l'aire soit un carré. Malgré l'antériorité de la preuve de Fermat, nous avons choisi de nous inspirer de celle de Frenicle (1605 ?-1675) parce qu'elle nous semble plus adéquate pour illustrer notre propos. Le calcul y est en particulier plus simple ; Frenicle avait l'énorme avantage sur Fermat de savoir exactement où il allait : il n'était pas guidé par une idée de descente mais par une idée de calcul.

Précisons que l'ouvrage de Catherine Goldstein intitulé *Un théorème de Fermat et ses lecteurs* (Goldstein, 1995) a constitué une aide précieuse pour l'étude menée.

Après avoir donné la preuve de Frenicle, nous proposerons une preuve du résultat mentionné inspirée de celle de ce dernier. Cela nous permettra d'expliciter deux dimensions au sein du raisonnement en arithmétique que nous appelons *dimension organisatrice* et *dimension opératoire* et qui interagissent dialectiquement. Dans un dernier temps, nous comparerons les preuves de Fermat et Frenicle avec l'outil introduit afin de pointer un élément qui participe à la dialectique existant entre les deux dimensions envisagées.

I. « IL N'EXISTE PAS DE TRIANGLE RECTANGLE EN NOMBRES DONT L'AIRE SOIT UN CARRE »

Nous entrons dans le monde merveilleux de l'arithmétique en compagnie de Frenicle : nous allons démontrer qu'il n'existe pas de triangle rectangle en nombres dont l'aire soit un carré en nous inspirant de la démonstration de ce mathématicien publiée dans le *Traité des Triangles Rectangles en Nombres* (1676).

Pour aborder le texte de Frenicle, le sens de certaines expressions est à préciser ; à cette occasion, nous donnerons des résultats mathématiques qui interviennent dans la démonstration que nous proposerons dans un dernier temps.

I.1 Vocabulaire et résultats préliminaires

Nous donnons ci-après trois définitions :

[7] C'est en effet en travaillant sur ce problème que Fermat (1601-1665) inventa la *descente infinie.*

- *Triangle primitif* : les côtés du triangle ont pour longueur des entiers premiers dans leur ensemble.
- *Double quarré* : produit d'un carré et de l'entier 2.
- *Quarré quarré* : carré d'un carré.

Pour ajouter une quatrième définition, nous avons besoin du résultat suivant qui est en jeu dans la preuve de Frenicle et celle que nous proposerons :

Paramétrisation **:** Pour que trois entiers x, y et z supérieurs ou égaux à 1, constituent une solution primitive de l'équation de Pythagore $x^2 + y^2 = z^2$, il faut et il suffit qu'il existe deux entiers p, q supérieurs ou égaux à 1 avec $p > q$, premiers entre eux et de parité différente[8], tels que, à l'ordre près des deux premiers termes, on ait :

$$x = 2pq,\ y = p^2 - q^2,\ z = p^2 + q^2.$$

Pour sa démonstration, nous avons besoin du résultat préliminaire suivant : *soit (x, y, z) une solution primitive de l'équation de Pythagore, x et y sont de parité différente* ; en effet :

- Si x et y étaient pairs tous les deux, il en serait de même de z. 2 serait alors un diviseur commun de x, y et z, contrairement au fait que x, y et z sont premiers dans leur ensemble.
- Si x et y étaient impairs tous les deux, on pourrait les écrire respectivement 2m+1 et 2n+1 avec m et n entiers. On aurait alors : $z^2 = (2m+1)^2 + (2n+1)^2 = 4m^2 + 4m + 4n^2 + 4n + 2$,
  ce qui montrerait que z^2 est congru à 2 modulo 4, ce qui est impossible pour un carré.

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration de la paramétrisation :

- la condition est suffisante : (x, y, z) est clairement une solution de l'équation de Pythagore. De plus, ces entiers sont premiers entre eux dans leur ensemble comme on le montre en raisonnant par l'absurde : si x, y et z avaient un diviseur premier commun $d > 1$, il serait distinct de 2 car p et q sont de parité différente ; il diviserait donc p ou q puisqu'il divise x et donc à la fois p et q puisqu'il divise y+z et y–z. Cela contredirait donc l'hypothèse que p et q sont premiers entre eux.
- la condition est nécessaire : En posant $x = 2x'$, on a :

$$(2x')^2 = (z - y)(z + y)$$

Les deux facteurs de droite ont 2 pour seul diviseur commun, car un tel diviseur doit diviser leur somme 2z et leur différence 2y, or y et z sont impairs et premiers entre eux. Le produit $\frac{z-y}{2} \times \frac{z+y}{2}$ est donc le produit de deux entiers premiers entre eux ; il est égal à un carré x'^2, donc d'après le

[8] Si p et q sont premiers entre eux, dire qu'ils sont de parité différente revient à dire qu'ils ne sont pas simultanément impairs.

théorème fondamental, précisé ci-après, chaque facteur est égal à un carré, soit : $\frac{z-y}{2}$ = q^2 et $\frac{z+y}{2}$ = p^2, donc finalement : $y = p^2 - q^2$, $x = 2pq$ et $z = p^2 + q^2$.
Il est facile de vérifier de plus que les nombres p et q sont premiers entre eux. Ces entiers sont de plus de parité différente : ils ne peuvent effectivement être impairs simultanément car sinon le résultat préliminaire serait contredit.

La preuve précédente utilise en fait le théorème suivant :

Théorème fondamental : Si le produit de deux nombres entiers a et b premiers entre eux est un carré, il en est de même des deux nombres.

dont une démonstration possible est la suivante : on pose $ab = c^2$. On écrit la décomposition en facteurs premiers de c comme suit : $c = p_1^{\alpha 1}\, p_2^{\alpha 2} \ldots p_n^{\alpha n}$ . . Dans la décomposition en facteurs premiers de c^2, l'exposant de chaque facteur premier est pair. a et b étant premiers entre eux, chaque nombre de la forme $p_i^{\,2\alpha i}$ ($i \in I = \{0, \ldots n\}$) est un diviseur de a ou, de manière exclusive, de b. Finalement, a (resp. b) peut s'écrire comme produit de $p_i^{\,2\alpha i}$ avec $i \in I_1$ (resp. I_2.) $\subset$ I. et a et b sont donc des carrés.

Nous ajouterons, pour terminer ces préliminaires, la définition suivante des *nombres générateurs d'un triangle primitif* : en se reportant à la paramétrisation donnée précédemment, il s'agit des entiers p et q.

I.2 La preuve de Frenicle

Trois propositions sont mentionnées dans la preuve de Frenicle ; en voici les énoncés :

- *Proposition XXXIV :* Si le côté pair et l'hypoténuse d'un triangle primitif font les générateurs d'un autre triangle : il sera primitif et son côté impair sera un quarré. Et si le côté impair d'un triangle primitif est un quarré, l'hypoténuse de ce triangle sera composée de deux quarrés dont l'un aura pour racine l'hypoténuse d'un deuxième triangle primitif, l'autre aura pour racine le côté pair du même deuxième triangle et la racine du quarré, qui est le côté impair du premier triangle, sera le côté impair du deuxième.
- *Proposition XXXV* : Si le côté pair d'un triangle primitif est un double quarré, les nombres générateurs de ce triangle seront des nombres quarrés et l'hypoténuse sera la somme de deux quarrés quarrés.
- *Proposition XXXVIII :* Si dans un triangle primitif, l'hypoténuse était un nombre quarré, et pareillement le côté pair un nombre quarré : la racine de cette hypoténuse serait l'hypoténuse d'un autre triangle primitif qui aurait un nombre quarré pour son côté impair et un double quarré pour son côté pair.

Le texte de Frenicle est le suivant[9] :

> Soit premièrement quelconque triangle primitif, je dis que son aire ne peut être un quarré. Car afin qu'il eût un quarré pour son aire, il faudroit que de ses deux côtés, l'un fût quarré, sçavoir l'impair, car il ne peut être double quarré, et l'autre double quarré. Or (*prop. XXXIV)* dans ce triangle primitif, le côté impair étant quarré, les nombres générateurs du triangle seraient l'hypoténuse et le côté pair d'un deuxième triangle primitif, et parce que *(prop. XXXV)* le côté pair du premier seroit un double quarré, ces mêmes nombres générateurs du premier seroient quarrés. Donc l'hypoténuse et le côté pair de ce deuxième triangle seroient des quarrez, et ce triangle seroit moindre que le premier, puisque deux de ces côtés seroient les générateurs de ce premier. Mais par la précédente *(prop. XXXVIII),* la racine de l'hypoténuse de ce deuxième triangle, seroit l'hypoténuse d'un troisième triangle primitif, qui auroit un nombre quarré pour son côté impair, et un double quarré pour son côté pair; et ce troisième triangle seroit encore moindre que le deuxième. Or ce troisième triangle aurait aussi pour son aire un nombre quarré. D'où il s'ensuit que supposant un Triangle Rectangle primitif, dont l'aire soit un nombre quarré, on en trouvera un troisième en nombres entiers par une conséquence infaillible, beaucoup plus petit, qui auroit aussi un quarré pour son aire et que par les mêmes raisons ce troisième en donnerait encore un cinquième plus petit qui serait aussi primitif et par conséquent en nombres entiers, et ainsi à l'infini en diminuant toujours. Mais cette conséquence est absurde car les nombres entiers ne vont pas à l'infini en descendant, puisqu'ils commencent à l'unité et s'y terminent; et par conséquent il est impossible que l'aire d'un Triangle rectangle primitif soit un nombre quarré. Il a été aussi prouvé par la conséquence de la proposition XXXI, que si l'aire d'un primitif n'est pas un nombre quarré, celle de son multiple ne sera pas aussi un quarré. Donc il n'y aucun triangle, etc...Ce qu'il falloit prouver.
>
> (Frenicle, 1676)

Lorsque nous donnerons la preuve inspirée de ce texte, nous expliciterons la correspondance existant entre les deux textes de démonstration en jeu.

I.3 Une preuve inspirée de celle de Frenicle

La démonstration que nous proposons se découpe en trois étapes précédées d'un travail préliminaire.

I.3.1 Préliminaire

On raisonne ici par l'absurde : Soit T1 = (x, y, z) un triangle primitif rectangle en nombres et d'aire carrée ; d'après le résultat préliminaire énoncé et démontré précédemment (cf. §I.1), x ou y est pair ; on supposera, ce qui ne restreint pas la généralité, que x est pair.

[9] Tel qu'il est reproduit dans l'ouvrage de Goldstein (Goldstein, 1995).

Il s'agira d'obtenir, dans la première étape de la démonstration, un deuxième triangle noté T2 = (X, Y, r) vérifiant les mêmes propriétés et tel que r < z.

I.3.2 Première étape

Dans cette première étape, il s'agit de construire une « solution plus petite ». Nous considérons le triangle T1 = (x, y, z), introduit en préliminaire. Il vérifie :

(1) x, y et z premiers dans leur ensemble, x pair, tels que : $x^2 + y^2 = z^2$.

(2) Il existe un entier k tel que $xy = 2k^2$.

D'une part, d'après (1), nous avons la **paramétrisation** suivante :

$$x = 2pq \qquad y = p^2 - q^2 \qquad z = p^2 + q^2,$$

avec p et q entiers premiers entre eux et de parité différente.

D'autre part, comme x est pair, il existe x_1 tel que $x = 2x_1$. Et donc, d'après (2), on a : $x_1y = k^2$. Ainsi, d'après **le théorème fondamental**, comme y et x_1 sont premiers entre eux, il existe a et b entiers tels que : $x = 2a^2$ et $y = b^2$, avec b impair car y est impair.

On en déduit : d'une part, que $pq = a^2$ et donc, à nouveau par le **théorème fondamental**, qu'il existe r et s entiers tels que $p = r^2$ et $q = s^2$ d'autre part, que $y=b^2=p^2-q^2$, donc $p^2 = b^2 + q^2$. D'après le résultat préliminaire (cf. §I.2), q est pair car b est impair.

On obtient alors grâce à la **paramétrisation**, puisque p, b et q sont premiers dans leur ensemble, l'existence de X et Y, entiers premiers entre eux tels que :

$$q = 2XY \qquad b = X^2 - Y^2 \qquad p = X^2 + Y^2.$$

D'une part, $p = r^2 = X^2 + Y^2$. Le triangle (X,Y,r) est donc rectangle en nombres entiers premiers deux à deux.

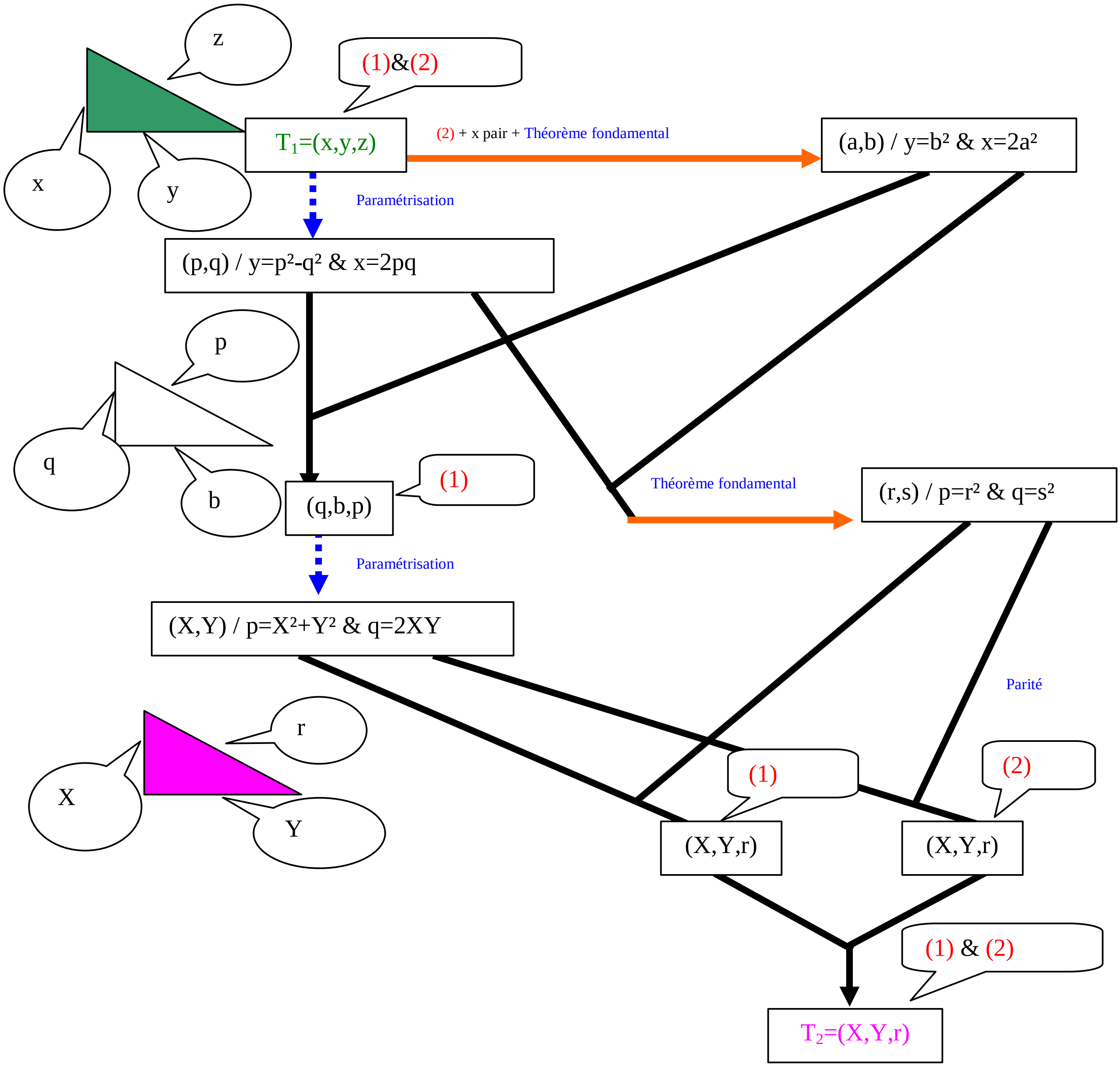
D'autre part, comme q est pair, s est pair ; on pose $s = 2s_1$. Ainsi $q = 2XY = (2s_1)^2$ d'où $XY = 2s_1^2$; le triangle (X,Y,r) est d'aire carrée.

Conclusion : Le triangle (X,Y,r), que l'on notera T2, est primitif d'aire carrée tel que r< z. En effet : $X^2 + Y^2 = r^2 = p$ mais $x = 2pq$ donc $p < x$, et $x < x^2 + y^2$.

D'où : $X^2 + Y^2 < x^2 + y^2$.

L'*organigramme 1* donné ci-après synthétise cette première étape. Précisons que l'utilisation de la paramétrisation des triangles rectangles en nombres est représentée par une flèche verticale en pointillés et que l'intervention du théorème fondamental est symbolisée par une flèche horizontale (trait continu).

ORGANIGRAMME 1



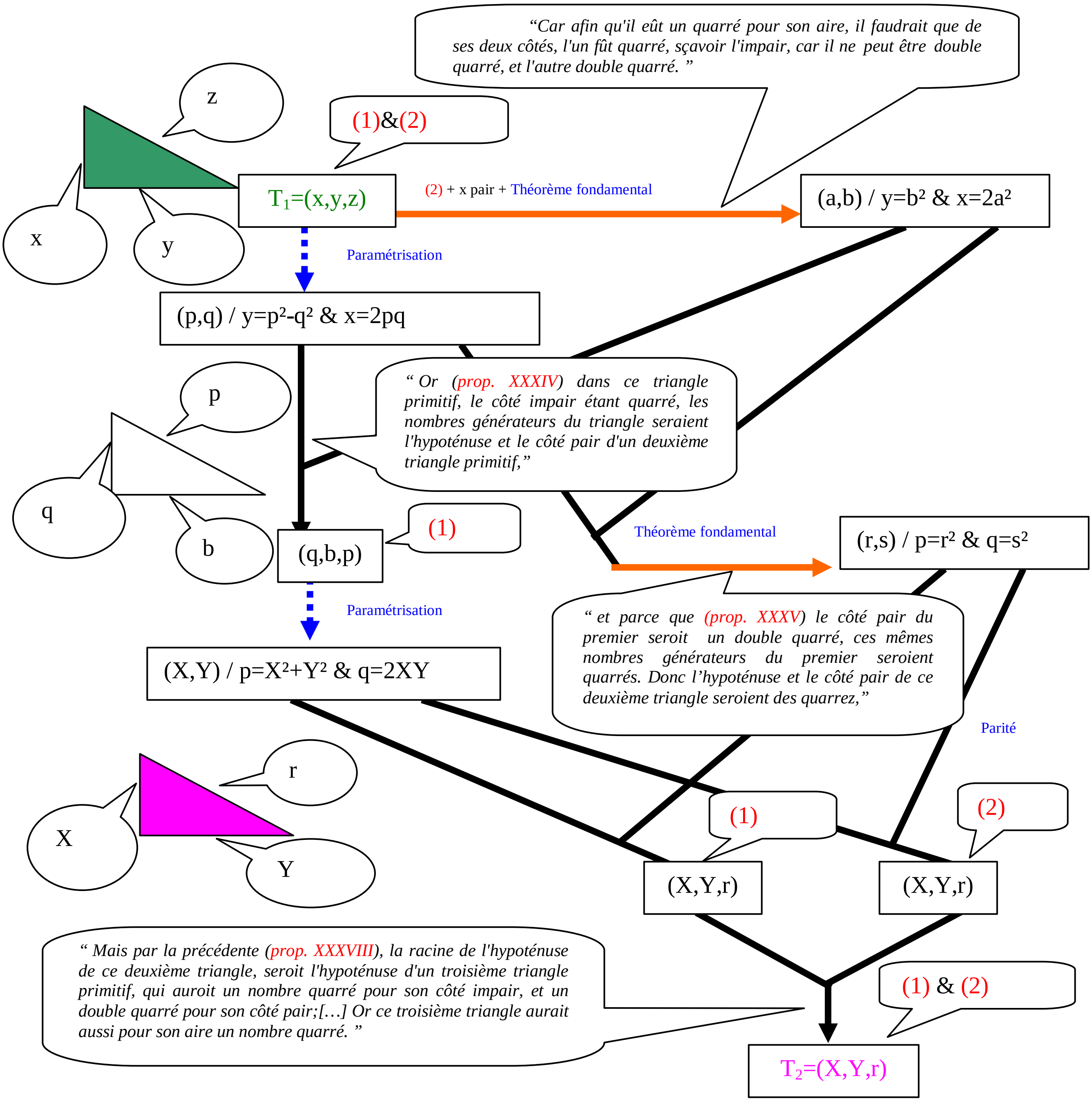
(1) : Le triangle est rectangle en nombres entiers premiers dans leur ensemble.

(2) : Le triangle correspondant est d'aire carrée.

Parité : Comme q est pair, s est pair : $s = 2s_1$. D'où $XY = 2s_1^2$. L'aire de (X,Y,r) est bien un carré.

Nous reprenons cet organigramme afin de faire le lien avec le texte de Frenicle :

ORGANIGRAMME 2



(3) : Le triangle est rectangle en nombres entiers premiers dans leur ensemble.

(4) : Le triangle correspondant est d’aire carrée.

Parité : Comme q est pair, s est pair : $s = 2s_1$. D’où $XY = 2s_1^2$. L’aire de (X,Y,r) est bien un carré.

La correspondance faite ici ne sous-entend pas qu'il s'agit de la même preuve. Il faut souligner en particulier que nous empruntons un raccourci à la fin de cette étape, comme nous le préciserons en § III.2.

I.3.3 Deuxième étape

En répétant le procédé, on construit une **suite strictement décroissante** de triangles d'aire carrée donc **d'entiers naturels** (en considérant la longueur de l'hypoténuse de chacun de ces triangles), ce qui est impossible. En conclusion, il n'existe pas de triangle **primitif** rectangle en nombres dont l'aire soit un carré.

I.3.4 Troisième étape

Il reste à montrer que s'il n'existe pas de triangle primitif rectangle en nombres d'aire carrée, alors il n'existe pas de triangle rectangle en nombres d'aire carrée ; ce qui ne pose pas de difficulté.

II. DISTINCTION ENTRE DEUX DIMENSIONS AU SEIN D'UNE DEMONSTRATION ARITHMETIQUE

Selon nous, la démonstration précédente offre l'avantage de bien mettre en évidence la distinction entre deux dimensions dans le raisonnement en arithmétique, que nous choisissons d'appeler *dimension organisatrice* et *dimension opératoire.* Cette distinction est particulièrement claire ici parce que les deux dimensions ne font pas appel au même type de propriétés.

En effet, dans Z on peut distinguer deux types de propriétés selon l'ordre envisagé :

- nous parlons de *propriétés de divisibilité* en référence à l'*ordre divisibilité,* partiel, auquel est associé la structure d'anneau (Z, +,×),
- nous parlons de *propriétés topologiques* en référence à l'*ordre naturel,* total, auquel est associé l'ensemble bien ordonné (Z, ≤),

la relation d'ordre naturel étant compatible avec l'addition dans Z et la multiplication dans *N.*

Dans la démonstration envisagée ici, alors que les techniques de calcul rencontrées dans la démonstration reposent sur des propriétés de divisibilité, le raisonnement sur lequel elle repose s'appuie essentiellement sur la propriété topologique : « Toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie ».

D'une manière générale, selon cette distinction :

- *la dimension organisatrice* s'identifie au raisonnement global (on pourrait parler du « squelette » de la démonstration) qui traduit la mise en acte d'une visée. Ce raisonnement organise et structure les différentes étapes ; il nous permet de comprendre l'idée générale de la démonstration. Dans la démonstration présentée ici, cette dimension organisatrice s'identifie à la descente infinie, célèbre invention de Fermat ; ce dernier l'expliquait lui-même à Carcavi :

> Je n'ajoute pas la raison d'où j'infère que, s'il y avait un triangle rectangle de cette nature, il y en aurait un autre de même nature moindre que le premier, parce que le discours en serait trop long et que c'est là tout le mystère de ma méthode.
>
> [Fermat, 1659]

Nous étudierons plus en détail la descente infinie dans la suite. Outre cette méthode et les figures usuelles du raisonnement mathématique, en particulier le raisonnement par l'absurde, très présent en arithmétique, quelques formes de raisonnement jouent un rôle essentiel au niveau de la composante organisatrice dans ce domaine : le raisonnement par récurrence mathématiquement équivalent à la descente infinie, les raisonnements par disjonction de cas et par recherche exhaustive avec ou non limitation préalable du nombre de cas à étudier. Ces grandes catégories organisatrices seront précisées et étudiées dans le prochain chapitre *Pensées organisatrices fondamentales en arithmétique*.

- *La dimension opératoire :* il s'agit de tout ce qui relève des techniques de calcul utilisées au fil de la démonstration, techniques qui permettent de mettre en œuvre les différentes étapes du raisonnement suivi. Les techniques de calcul et les raisonnements qui les sous-tendent dépendent, au moins partiellement, des formes de représentations choisies pour les entiers et nous pouvons distinguer deux formes principales pour organiser l'analyse opératoire :
    - Une représentation structurée autour des nombres premiers : le travail opératoire sur les entiers est alors mené à partir de leur forme factorisée $n=\prod_{p\in P} p^{v_p(n)}$ (avec P l'ensemble des nombres premiers).
    - Une représentation structurée à l'aide des réseaux réguliers liés à la relation de congruence : l'écriture des entiers dépend alors d'un paramètre, un entier naturel non nul noté b et, ce paramètre étant donné, on peut utiliser soit le langage des congruences ($n\equiv 0[b]$, $n\equiv 1[b]$, …, $n\equiv b-1[b]$), soit l'existence d'un entier k tel que tout entier n peut s'écrire d'une unique des b façons $n=bk$, $n=bk+1$, …, $n=bk+(b-1)$.

Ceci sera repris et approfondi dans le chapitre *Pôles opératoires fondamentaux en arithmétique* où nous définirons différents pôles au sein de l'opératoire en arithmétique.

Sans anticiper sur ces développements ultérieurs, nous voudrions cependant dès à présent faire un certain nombre de remarques pour éviter tout malentendu.

La distinction effectuée entre composantes organisatrice et opératoire ne sous-entend en aucun cas que les différents calculs excluent le raisonnement. Dans une démonstration arithmétique, chaque sous-étape met en jeu des raisonnements, qui, *a priori*, sont propres à la dimension opératoire. Ces raisonnements sont souvent loin d'être triviaux, et parfois même plus complexes que ceux relatifs à la dimension organisatrice, le cas de la preuve proposée en est un exemple éclatant (cf. §I.3.2).

La distinction explicitée ici n'est pas, non plus, *a priori*, propre à l'arithmétique, mais ce qui nous intéresse dans notre recherche, ce sont les spécificités qu'elle a dans le champ de l'arithmétique.

Enfin, même si une distinction est opérée, les deux composantes explicitées ici ne doivent pas être vues comme indépendantes : elles interagissent dialectiquement comme nous l'expliciterons dans la suite de l'analyse épistémologique. Autrement dit, dans la résolution d'un problème donné, à chaque sous-dimension organisatrice est associée une dimension opératoire ; au sein de chaque organisation, s'organise tout un jeu opératoire, qui lui-même peut mettre en scène d'autre(s) organisation(s) pouvant être vue(s) comme de nouvelle(s) dimension(s) organisatrice(s). Autrement dit, on observe que des sous-dimensions organisatrices naissent dans le jeu opératoire qui règne au sein d'autres dimensions organisatrices, en s'imbriquant les unes dans les autres.

Après ces quelques remarques, nous revenons dans ce qui suit au résultat avec lequel nous avons introduit la distinction entre dimensions opératoire et organisatrice. En comparant les preuves de Frenicle et Fermat, nous pourrons en particulier pointer un élément essentiel qui participe à la dialectique entre les deux composantes distinguées dans l'analyse.

III. FERMAT ET FRENICLE

Comme nous l'indiquions en introduction, c'est face au problème des triangles rectangles envisagé dans ce chapitre que Fermat fut amené à inventer la descente infinie. Nous nous basons sur la preuve qui se trouve en commentaire de l'édition de 1621 des *Arithmétiques* de Diophante et qui est reproduite dans l'ouvrage de Goldstein. Lorsque nous apporterons des éléments de comparaison des preuves de Fermat et Frenicle nous considérerons également la preuve de Fermat qui apparaît dans sa lettre adressée à Carcavi en 1659.

III.1 La preuve de Fermat

Le texte d'origine est reproduit ci-après :

Observatio XLV

Area trianguli rectanguli in numeris non potest esse quadratus. Huius theorematis a nobis inventi demonstrationem, quam et ipsi tandem non sine operosa et laboriosa meditatione deteximus, subjungemus. Hoc nempe demonstrandi genus miros in Arithmeticis suppeditabit progressus. Si area trianguli esset quadratus, darentur duo quadratoquadrati quorum differentia esset quadratus, unde sequitur dari duo quadratos quorum et summa et differentia esset quadratus : datur itaque numerus, compositus ex quadrato et duplo quadrati, aequalis quadrato, ea conditione ut quadrati eum componentes faciant quadratum. Sed, si numerus quadratus componitur ex quadrato et duplo alterius quadrati, ejus latus similiter componitur ex quadrato et duplo quadrati, ut facillime possumus demonstrare; unde concludetur latus illud esse summam laterum circa rectum trianguli rectanguli, et unum ex quadratis illud componentibus efficere basem, et duplum quadratum aequari perpendiculo. Illud itaque triangulum rectangulum conficietur a duobus quadratis quorum summa et differentia erunt quadrati. At isti duo quadrati minores probabuntur primis quadratis primo suppositis, quorum tam summa quam differentia faciunt quadratum : ergo, si dentur duo quadrati quorum summa et differentia faciunt quadratum, dabitur in integris summa duorum quadratorum ejusdem naturae, priore minor. Eodem ratiocinio dabitur et minor istâ inventa per viam prioris, et semper in infinitum minores invenientur numeri in integris idem praestantes. Quod impossibile est, quia, dato numero quovis integro, non possunt dari infiniti in integris illo minores. Demonstrationem integram et fusius explicatam inserere margini vetat ipius exiguitas. Hac ratione deprehendimus et demonstratione confirmavimus nullum numerum triangulum praeter unitatem aequari quadratoquadrato.

Nous travaillons à partir de la traduction de Goldstein qui est la suivante :

<u>Traduction de Goldstein</u>

L'aire d'un triangle rectangle en nombres ne peut être un carré. De ce théorème trouvé par nous, nous ajouterons la démonstration que nous avons fini par découvrir non sans une pénible et laborieuse préparation. Ce genre de démonstration sera une manne d'étonnants progrès en arithmétique. Si l'aire d'un triangle était un carré, seraient donnés deux carrécarrés dont la différence serait un carré, d'où il s'ensuit que seraient également donnés deux carrés dont la somme et la différence seraient carrés : par conséquent, est donné un nombre composé d'un carré et du double d'un carré, égal à un carré, avec la condition que les deux carrés qui le composent fassent un carré. Mais si un nombre carré est composé d'un carré et du double d'un carré, son côté est également composé d'un carré et du double d'un carré, comme nous pouvons le prouver facilement; d'où l'on conclura que ce côté est la somme des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, que l'un des carrés le composant forme la base, et le double carré est égal à la perpendiculaire. Par conséquent, ce triangle rectangle sera constitué par deux nombres carrés, dont la somme et la différence seront des carrés. Mais on prouvera que ces deux carrés sont plus petits que les premiers carrés admis au commencement, dont tant la somme que la différence faisaient des carrés : donc, si sont donnés deux carrés dont la somme et la différence font des carrés, est donnée, en nombres entiers, une somme de deux carrés de même nature, inférieure à la précédente. Par le même calcul, sera donnée une autre plus petite que celle-ci, trouvée par la voie de la précédente, et toujours, indéfiniment, se trouveront des nombres plus petits, entiers et se présentant de même. Ce qui est impossible, puisque, étant donné un nombre entier quelconque, ne peuvent être donnés une infinité de nombres entiers plus petits que lui. L'étroitesse de la marge interdit d'y insérer la démonstration entière et expliquée en détail. Par ce raisonnement nous avons saisi et établi par une démonstration qu'aucun nombre triangulaire sauf l'unité n'est égal à un carrécarré.

[Goldstein, 1995]

Comme pour la preuve inspirée de celle de Frenicle, nous aurons besoin, pour rendre compte de la preuve de Fermat, du théorème fondamental ainsi que du résultat relatif à la paramétrisation des triangles rectangles en nombres. Il nous faut y ajouter le théorème suivant : *Si le produit de deux entiers premiers entre eux est un double carré alors l’un de ces entiers est un double carré et l’autre un carré*. Etant donné le lien mathématique qui existe avec le théorème fondamental, nous le désignerons à l’aide de l’expression ***théorème fondamental bis*** ; le ressort essentiel est effectivement le même que pour le théorème fondamental : le caractère factoriel de l’anneau Z. C’est pour cette même raison que nous n’en donnerons pas de preuve.

Nous ne reproduisons pas non plus le préliminaire commun aux preuves de Frenicle et Fermat, en nous plaçant directement dans le cas des triangles primitifs.

Débutons la preuve de Fermat : Soit T1=(x,y,z) un triangle primitif rectangle en nombres et d’aire carrée. D’après la **paramétrisation**, il existe deux entiers p et q, premiers entre eux et de parité distincte (q pair), tels que :

$$y=p^2-q^2 \text{ et } x=2pq.$$

Le triangle étant d’aire carrée, il existe un entier k tel que :

$$pq(p^2-q^2)=k^2.$$

On peut appliquer successivement le **théorème fondamental** aux entiers pq et (p^2-q^2) (par exemple) puis aux entiers p et q, puisque les trois entiers p, q et p^2-q^2 sont premiers entre eux dans leur ensemble. On conclut à l’existence de trois entiers notés r, s et b tels que :

$$p=r^2,\ q=s^2 \text{ et } p^2-q^2=b^2.$$

Après la factorisation supplémentaire $b^2=p^2-q^2=(p+q)(p-q)$, on applique **à nouveau le théorème fondamental**, les entiers p+q et p-q étant premiers entre eux. Il existe donc deux entiers notés W et M tels que :

$$p-q=r^2-s^2=M^2 \quad \textbf{(1)} \qquad \text{et} \qquad p+q=r^2+s^2=W^2 \quad \textbf{(2).}$$

On obtient :

- A partir de (1) : $r^2=M^2+s^2$. **(3)**
- A partir de (1) et (2) : $W^2=M^2+2s^2$. **(4)**

Montrons qu’alors, W^2 étant somme d’un carré M^2 et d’un double carré $2s^2$, il en est de même de W : on a $W^2-M^2=(W+M)(W-M)=2s^2$; comme s est pair (q est pair), on peut écrire :

$$(W+M)(W-M)=8s_1^2 \text{ (en ayant posé } s=2s_1\text{),}$$

ou encore :

$$\left(\frac{W+M}{2}\right)\left(\frac{W-M}{2}\right)=2s_1^2.$$

Les entiers $\frac{W+M}{2}$ et $\frac{W-M}{2}$ sont premiers entre eux : W et M sont premiers entre eux, car leurs carrés le sont (relations (1) et (2)), et de même parité (c'est celle de leurs carrés dont la différence vaut $2q^2$ donc est paire). D'où W+M et W-M ont 2 pour seul diviseur commun et ainsi $\frac{W+M}{2}$ et $\frac{W-M}{2}$ sont bien premiers entre eux.

D'après le **théorème fondamental bis**, on peut donc conclure que l'un de ces entiers est un carré noté Y_1^2 et l'autre un double carré noté $2X_1^2$. Ainsi, en écrivant W sous la forme de la somme $\frac{W+M}{2}+\frac{W-M}{2}$, on obtient :

$$W=2X_1^2+Y_1^2 \quad \textbf{(3)},$$

ce que nous voulions montrer.

On a donc : $2s^2=W^2-M^2=(W+M)(W-M)=2(2X_1^2)2Y_1^2$; d'où $s^2=2(2X_1^2)Y_1^2$.
Ainsi, d'après (3) :

$$W^2=(2X_1^2+Y_1^2)^2=(2X_1^2)^2+(Y_1^2)^2+s^2.$$

D'où, d'après (2) :

$$r^2=W^2-s^2=(2X_1^2)^2+(Y_1^2)^2.$$

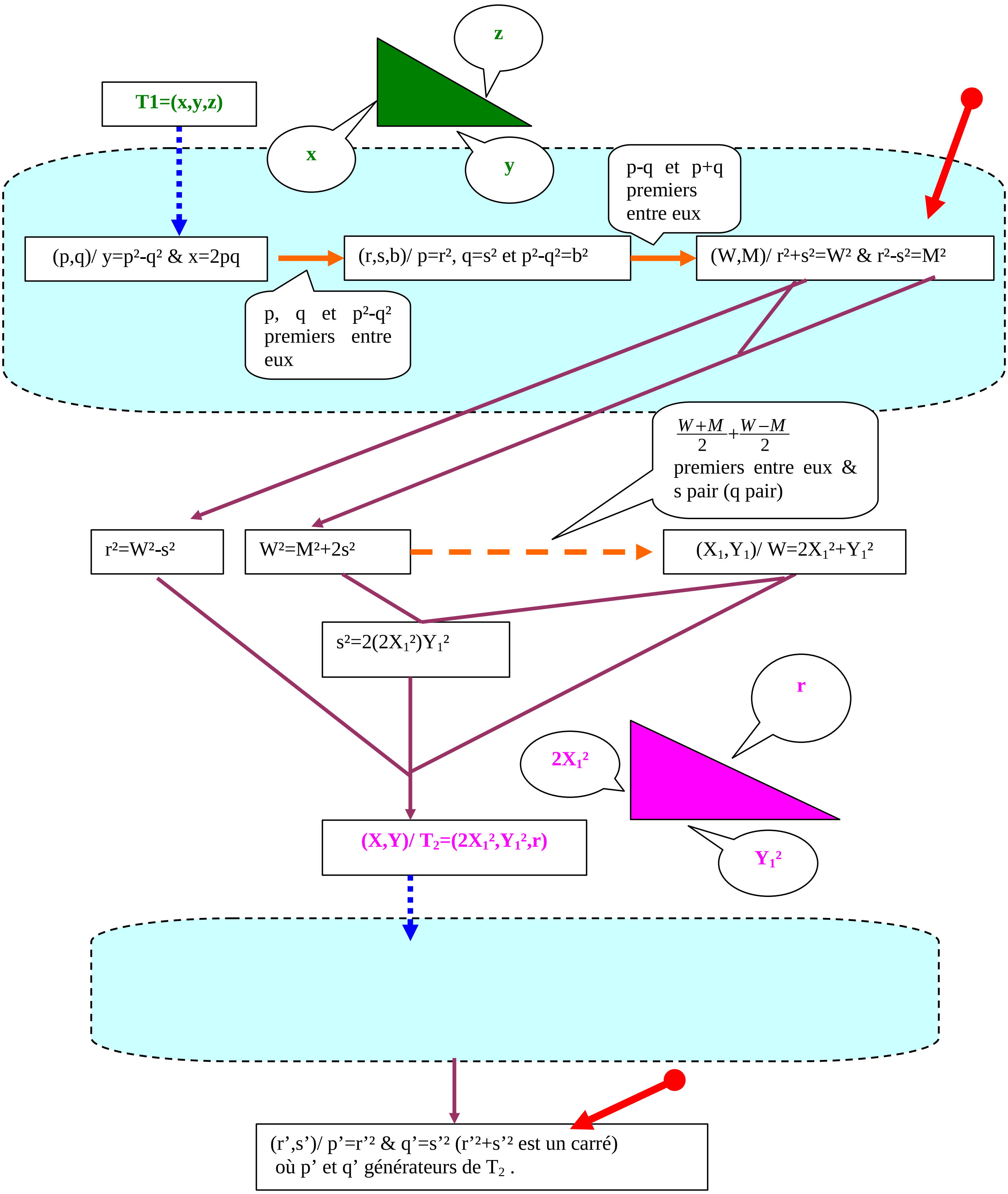
Ce qui montre que le triangle $T_2=(r^2,2X_1^2,Y_1^2)$ est rectangle en nombres.

On procède alors de la même façon qu'avec le triangle T_1 ; on note p' et q' ses nombres générateurs et r' et s' les entiers tels que $p'=r'^2$ et $q'=s'^2$. On montrerait, comme pour la somme de carrés r^2+s^2, que $r'^2+s'^2$ est un carré.

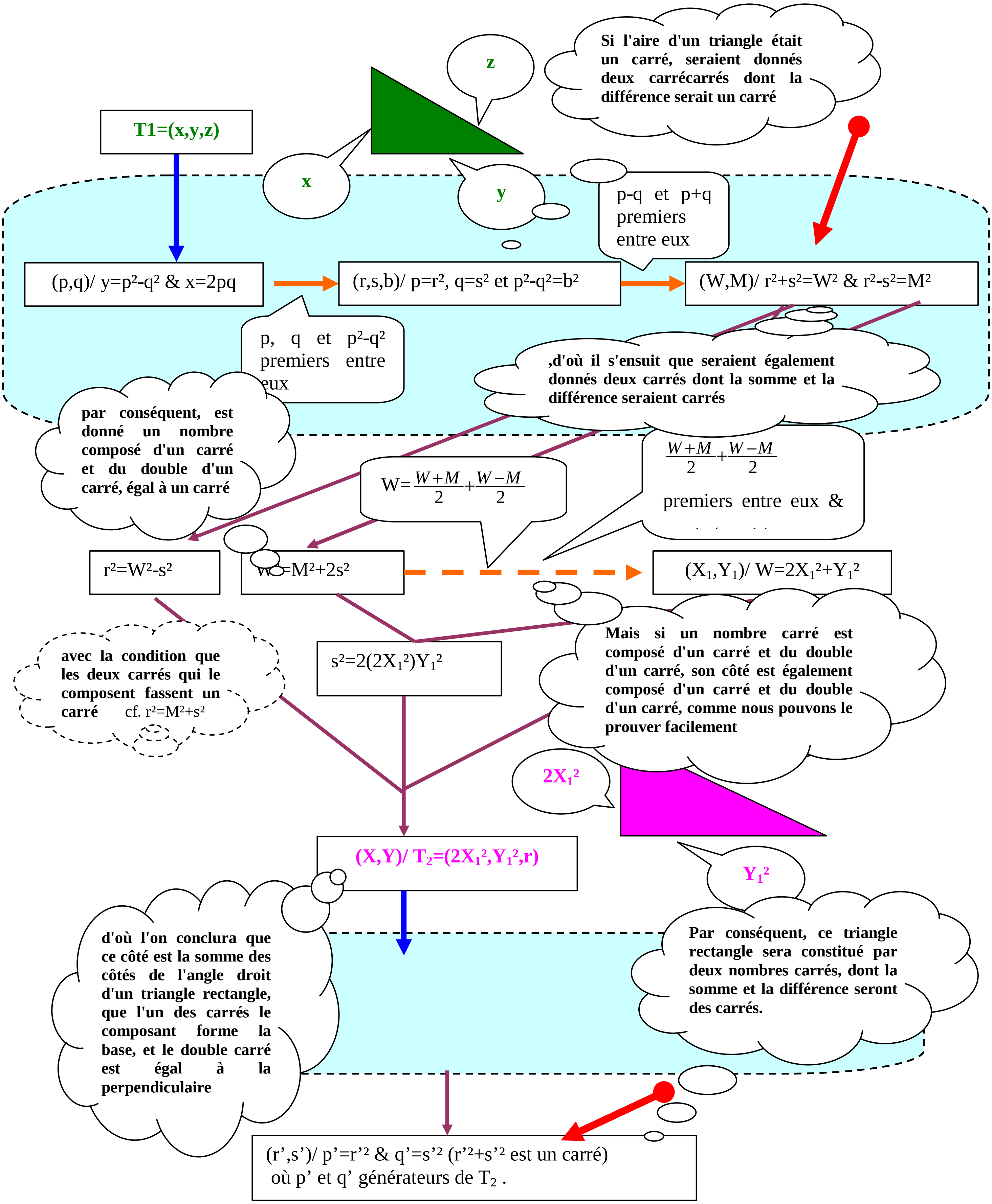
Montrons maintenant que $r'^2+s'^2 < r^2+s^2$ en établissant que $r'^2=p'<p$ et $s'^2=q'<q$: d'après la paramétrisation de T_2, on a d'une part $r=p'^2+q'^2$ et d'autre part $X_1^2=p'q'$ (après simplification par 2). Ainsi, d'une part $p'<p$ car $p'<r<r^2=p$, et d'autre part, $q'<q$ car X_1^2 divise strictement s^2 (égal à $2(2X_1^2)(Y_1^2)$) qui est égal à q.

Nous proposons ci-après deux organigrammes (*organigrammes 3 et 4*) relatifs à l'obtention des deux sommes de deux carrés (r^2+s^2 et $r'^2+s'^2$) dont l'un est strictement plus petit que l'autre : le premier concerne la preuve telle que nous l'avons donnée en langage moderne et le deuxième établit le lien avec le texte de la preuve de Fermat. Dans ces deux organigrammes, comme pour celui correspondant à la preuve inspirée de celle de Frenicle, l'utilisation de la paramétrisation des triangles rectangles en nombres est représentée par une flèche verticale en pointillés et l'intervention du théorème fondamental est symbolisée par une flèche horizontale (trait continu). L'utilisation du théorème fondamental bis, quant à elle, sera représentée par une flèche horizontale en pointillés.

ORGANIGRAMME 3



ORGANIGRAMME 4



La fin de la démonstration correspond aux étapes 2 et 3 de celle que nous avons proposée (cf. § I.3).

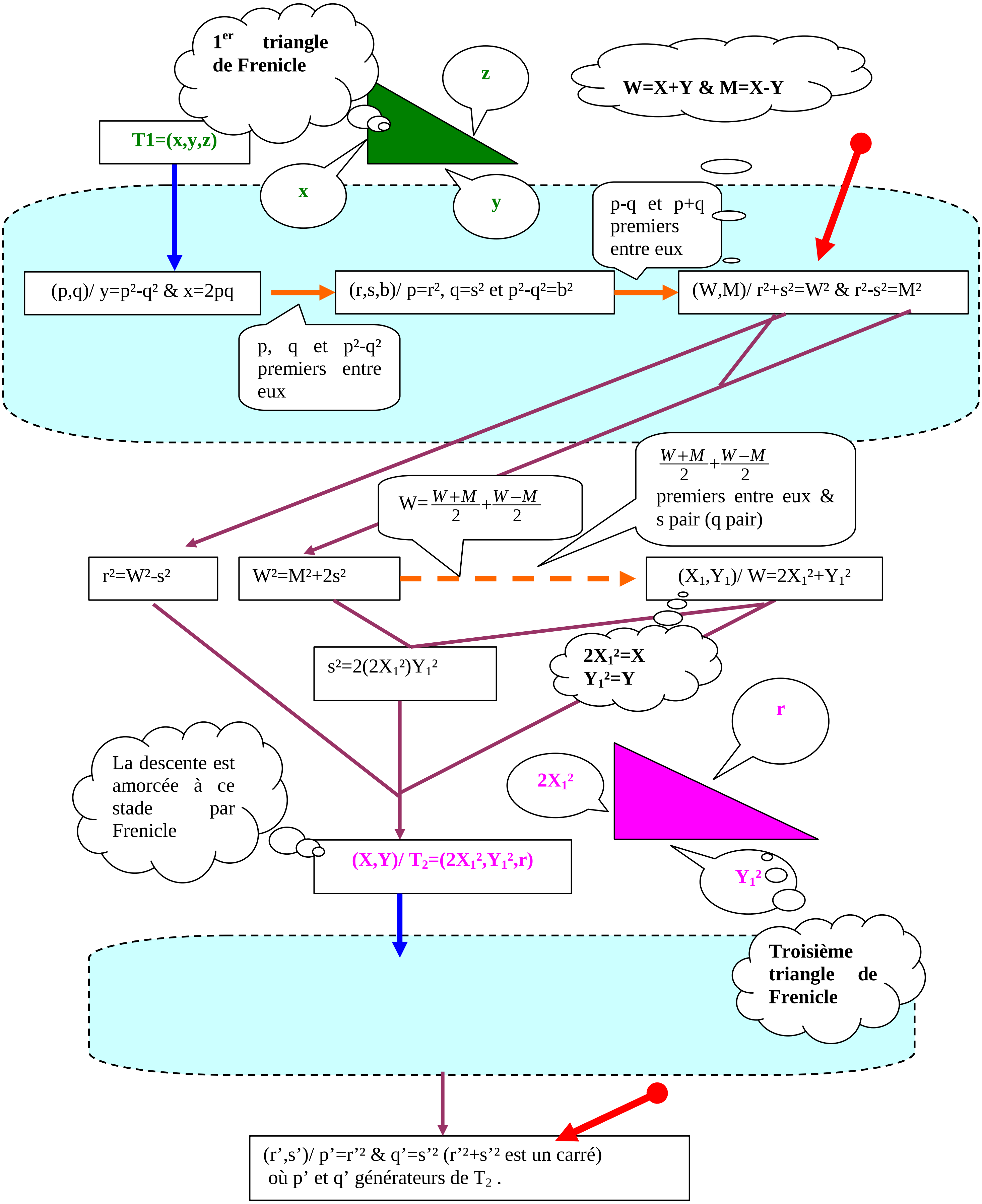
III.2 Analyse comparative

Précisons tout d'abord qu'il ne s'agit pas pour nous d'entrer dans les divers débats des historiens des mathématiques relatifs à l'analyse des preuves de Fermat et Frenicle (Goldstein, 1995). L'enjeu est ici d'approfondir l'étude de la dialectique qui peut s'opérer entre la pensée organisatrice et les différents traitements opératoires développés pour démontrer le résultat « Il n'existe pas de triangle rectangle en nombres dont l'aire soit un carré ».

Une hypothèse est sous-jacente à cette démarche : nous pensons que, d'une manière générale, l'analyse comparative de deux preuves (distinctes) d'un même résultat aide à la compréhension de la dialectique qui peut exister entre les composantes organisatrice et opératoire. Nous sommes ici dans le cas particulier où l'une des deux composantes est « fixe » d'une preuve à l'autre. En effet, ici, la pensée organisatrice est la même dans les preuves de Fermat et Frenicle : tous deux utilisent la descente infinie, invention de Fermat. Nous nous centrerons dans cette comparaison sur la première étape où il s'agit de construire « une solution plus petite » puisque, rappelons-le, c'est à ce niveau que les preuves se distinguent.

L'*organigramme 5* suivant donne des éléments de correspondance entre les preuves envisagées ici :

ORGANIGRAMME 5



Cet organigramme fait apparaître une distinction essentielle entre les preuves de Fermat et Frenicle, dans la gestion de la pensée organisatrice : Frenicle « amorce la descente » plus rapidement que Fermat. En effet, Frenicle « descend » juste après avoir construit son troisième triangle alors que Fermat poursuit après l'obtention de ce dernier (il s'agit du deuxième triangle de la preuve de Fermat). Qu'est ce qui est à l'origine de cette différence ? Autrement dit, pourquoi Fermat ne s'arrête-t-il pas au moment où le deuxième triangle apparaît dans son développement opératoire ? Il nous semble que le décalage observé dans l'amorce de la descente provient de la différence qui existe entre la nature des objets sur lesquels porte la descente. Comme Goldstein l'écrit :

> Chez Frenicle, l'élément privilégié est tout simplement le triangle rectangle d'aire carrée lui-même ; Fermat, lui, fixe la descente sur une somme de carrés carrée.
>
> [Goldstein, 1995]

Une simple lecture des organigrammes 3 et 5 permet de constater que les conséquences opératoires sont importantes : on note en particulier le détour par les carrés sommes de carrés et de doubles carrés de Fermat. Ce détour correspond mathématiquement à une décomposition supplémentaire de l'expression donnant l'aire : le produit $pq(p^2-q^2)$ est décomposé en le produit $pq(p+q)(p-q)$.

Ce constat nous amène à penser que ce n'est pas seulement l'idée de descente qui guide Fermat dans ses différents traitements opératoires, au sens où un autre élément entre en jeu. En effet, on peut émettre l'hypothèse que si seule la pensée de descente guide la preuve alors celle-ci est amorcée dès que possible, sans développement opératoire supplémentaire comme le fait Fermat. Mais, comme le met en évidence la comparaison des deux preuves envisagées, intervient aussi la nature des objets sur lesquels s'opère cette descente. Ainsi, à travers les objets en jeu, la composante opératoire est déterminante dans l'amorce de la descente. Notre hypothèse semble être confirmée par le fait que dans sa lettre adressée à Carcavi en 1659, Fermat ne fixe plus la descente sur les sommes de carrés mais, comme Frenicle le fait, sur les triangles eux-mêmes :

> La preuve se fait par réduction à l'absurde en cette manière :
> S'il y avait aucun triangle en nombres entiers qui eût son aire égale à un carré, il y aurait un autre triangle moindre que celui-là qui aurait la même propriété. S'il y en avait un second, moindre que le premier, qui eût la même propriété, il y en aurait, par un pareil raisonnement, un troisième, moindre que le second, qui aurait la même propriété, et enfin un quatrième, un cinquième, à l'infini en descendant. Or est-il qu'étant donné un nombre, il n'y en a point infinis en descendant moindres que celui-là (j'entends parler toujours des nombres entiers). D'où on en conclut qu'il est donc impossible qu'il y ait aucun triangle dont l'aire soit un carré.
>
> [Fermat, 1659]

En effet, lorsqu'il s'agit pour Fermat de présenter sa méthode et de la mettre en valeur, ce qu'il fait dans cette lettre, et donc, lorsque c'est l'idée de descente qui est privilégiée avant tout, il opte pour une preuve autre que celle laissée en note dans les *Arithmétiques* de Diophante et où l'amorce de la descente se fait « plus tôt ».

Ce phénomène se retrouve dans la preuve de Frenicle lui-même. En effet, comme nous l'avons fait en nous inspirant de ses idées, il est possible de prendre un raccourci par rapport à sa preuve. Reprenons l'explication de Goldstein :

> […] il [Frenicle] dispose en effet d'un triangle dont l'hypoténuse est un carré ainsi que le côté pair. Un troisième triangle est fabriqué qui a pour côtés les nombres générateurs du deuxième. Mais il est en fait inutile d'utiliser la proposition XXXVIII […] pour conclure : l'aire de ce troisième triangle est le demi-produit des côtés, […], donc est un carré.
>
> [Goldstein, 1995]

Mais comme elle le souligne :

> Cette possibilité n'a évidemment aucun intérêt lorsque sont valorisées en revanche des descriptions des côtés des triangles et l'interdépendance de propositions suivant un modèle euclidien.
>
> [Goldstein, 1995]

La comparaison des deux preuves met donc en évidence un des aspects de la dialectique qui existe entre dimensions organisatrice et opératoire : les objets sur lesquels porte le travail opératoire ont une influence directe sur l'organisation des preuves. Dans le cas étudié ici, ceci se manifeste d'une part par le fait que l'amorce de la descente varie d'une preuve à l'autre et, d'autre part, par le fait que l'on peut trouver un cheminement organisateur « plus économique » en amorçant cette descente avant Fermat et Frenicle, comme nous l'avons fait nous-mêmes.

Notre analyse des preuves de Fermat et Frenicle montre donc que la nature des objets en jeu intervient tant au niveau organisateur qu'opératoire et qu'elle participe à la dialectique qui vit entre les deux composantes.

Soulignons enfin que l'idée d' « économie » mentionnée précédemment est toute relative car elle dépend des critères choisis. Comme le précise Goldstein, tout dépend de ce que l'on privilégie :

> Pour ceux qui s'intéresseraient aux triangles rectangles, la démarche de Frenicle est plus directe, plus courte, plus économique […] ; au rebours, celle de Fermat est plus riche en connexions variées avec d'autres problèmes.
>
> [Goldstein, 1995]

Dans les deux prochains chapitres, nous allons compléter la présentation de l'outil épistémologique que nous venons d'introduire en précisant comment les dimensions organisatrice et opératoire « vivent » dans le champ de l'arithmétique et comment s'organisent leurs interactions.

CHAPITRE 2 :

PENSEES ORGANISATRICES FONDAMENTALES EN ARITHMETIQUE

CHAPITRE 2 : 35

PENSEES ORGANISATRICES FONDAMENTALES EN ARITHMETIQUE 35

INTRODUCTION.. 36

I. DESCENTE INFINIE - RECURRENCE 36

I.1 FORMALISATION DE LA DESCENTE INFINIE 37
I.2 DESCENTE INFINIE ET RAISONNEMENT PAR RECURRENCE.. 38
I.2.1 Avec l'exemple sur lequel Fermat inventa la descente infinie.. 38
I.2.2 Généralisation.. 39
I.3 APPLICATIONS DE LA DESCENTE INFINIE 40
I.3.1 Montrer qu'une propriété P(n) est vraie pour tout entier n 41
I.3.2 Résolutions d'équations diophantiennes.. 42

II. RAISONNEMENT PAR DISJONCTION DE CAS ET RECHERCHE EXHAUSTIVE 42

II.1 DISJONCTION DE CAS.. 43
II.1.1 Définition 43
II.1.2 Nature d'une disjonction de cas – Notion de partition primaire.. 44
II.1.3 Exemples 45
II.2 RECHERCHE EXHAUSTIVE.. 48
II.2.2 Démarche algorithmique et recherche exhaustive 48
II.2.3 Un exemple.. 50

III. JEU D'EXTENSION-REDUCTION : UNE METHODE SPECIFIQUE AUX ANNEAUX FACTORIELS.. 50

IV. IMBRICATION DE DESCENTE INFINIE, DISJONCTION DE CAS ET JEU D'EXTENSION-REDUCTION 54

II.4.1 Résultats préliminaires.. 55
II.4.2 Une démonstration inspirée des idées de Fermat.. 56
II.4.3 Un organigramme synthétisant la dimension organisatrice.. 59

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous développons comme cela a été annoncé, notre analyse concernant la dimension organisatrice du raisonnement en arithmétique. Pour cette analyse, nous avons retenu quatre grandes catégories organisatrices ; ce sont les suivantes : la **descente infinie** et **la récurrence**, la **disjonction de cas**, la **recherche exhaustive** et une **méthode propre aux anneaux factoriels**.

Nous avons regroupé dans une même catégorie la descente infinie et la récurrence parce qu'elles constituent deux modes d'exploitation dans le raisonnement de la même propriété de l'ensemble des entiers naturels N : muni de l'ordre naturel, N est un ensemble bien ordonné. Leur analyse fera l'objet de la première partie de ce chapitre. La recherche exhaustive et la disjonction de cas peuvent elles aussi être rapprochées. Elles illustrent en effet toutes deux une même démarche globale : ramener la résolution d'un problème à l'étude d'un nombre fini de cas. C'est pourquoi, même si nous les distinguons en tant que formes organisatrices, nous les présenterons conjointement dans la seconde partie de ce chapitre. Les catégories que nous venons de citer sont familières à tous. Dans la troisième partie de ce chapitre, en revanche, nous ferons intervenir une forme organisatrice qui nous semble fonctionner de façon plus implicite dans le travail arithmétique. Elle repose sur les propriétés des anneaux factoriels, d'où le nom que nous lui avons attribué. Enfin, dans une dernière partie, nous montrerons à partir d'un exemple qu'une même démonstration peut faire appel à plusieurs formes organisatrices distinctes et ceci nous permettra de pointer une nouvelle facette des rapports dialectiques entre les dimensions opératoire et organisatrice du raisonnement déjà évoqués dans le premier chapitre.

Nous débutons donc par descente infinie et récurrence et, dans cette catégorie, par la descente infinie, la célèbre invention de Fermat rencontrée dans le chapitre précédent.

I. DESCENTE INFINIE - RECURRENCE

La méthode de descente infinie est un des modes de raisonnement fondamentaux en arithmétique reposant, comme nous l'avons rappelé ci-dessus, sur le fait que (N,≤) est un ensemble bien ordonné. Toute partie non vide de N ayant ainsi un plus petit élément, on en déduit facilement que « toute suite décroissante d'entiers naturels est stationnaire.» ou, autre formulation possible « qu'il n'existe pas de suite strictement décroissante d'entiers naturels ». Une telle formulation apparaît très tôt dans les écrits mathématiques, puisqu'on la trouve déjà dans les Eléments d'Euclide, comme en atteste cet extrait du livre VII des *Eléments* :

<u>*Proposition XXXIII*</u> *: Tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier*

Que A soit un nombre composé, quelque nombre le mesurera. Que quelque nombre le mesure, et que ce soit B. Si B est un nombre premier, on aura ce qui est proposé ; et si B est un nombre composé, quelque nombre le mesurera. Que quelque nombre le mesure, et que ce soit Γ. Puisque Γ mesure B, et que B mesure A, le nombre Γ mesurera A ; et si Γ est un nombre premier, on aura ce qui est proposé. Si Γ est composé, quelque nombre le mesurera ; d'après une telle considération, il restera quelque nombre premier qui mesurera le nombre qui est avant lui, et le nombre A. Car s'il ne restait pas de nombre premier, il y aurait une infinité de nombres qui mesureraient A, et qui seraient plus petits les uns que les autres, **ce qui ne peut arriver dans les nombres.** Il restera donc quelque nombre premier qui mesurera le précédent, et le nombre A. Donc, etc.

(Livre VII des Eléments d'Euclide)[Vitrac, 1994]

Comme nous l'avons rappelé dans le précédent chapitre, la descente infinie a été inventée par Fermat sur l'exemple célèbre des triangles rectangles en nombres[10] qui nous a servi à introduire la distinction entre dimensions organisatrice et opératoire dans le raisonnement en arithmétique. Nous allons ici présenter plus en détail cette pensée organisatrice : après l'avoir formalisée, nous établirons un lien avec le principe de récurrence formalisé, quant à lui, ultérieurement et dans un dernier temps nous en présenterons ensuite deux applications.

I.1 Formalisation de la descente infinie

Nous avons besoin de formaliser l'invention de Fermat pour expliciter le lien entre cette dernière et la récurrence. Nous proposons donc la formalisation suivante (la lettre t est choisie en référence au mot « taille ») :

<u>*Descente infinie à visée négative*</u>[11] *:* Soient S un ensemble, $t : S \rightarrow N$ une application. On suppose que pour tout élément x de S, il existe y, élément de S, tel que $t(y)<t(x)$. Alors $S=\varnothing$.

Dans l'exemple historique que nous avons étudié, S est l'ensemble des triangles primitifs rectangles en nombres et d'aire carrée ou l'ensemble des triplets d'entiers positifs associés à ces triangles et la fonction t associe à chacun de ces objets la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle concerné ou l'élément du triplet correspondant. La mise en œuvre de la méthode passe par l'explicitation d'un mode d'obtention, étant donné un x quelconque de S, d'un y de S tel que $t(y)<t(x)$

[10] C'est-à-dire dont les côtés ont pour longueur des nombres entiers.

[11] Au sens où l'on s'intéresse à l'invention de Fermat dans le cadre des questions dites négatives ; cela sera précisé en §I.3.

et, en fait, ce qui dans la formalisation s'exprime de façon qualitative à travers une simple alternance de quantificateurs, se traduit dans la mise en œuvre par une construction effective sur laquelle se concentre l'essentiel du travail mathématique.

I.2 Descente infinie et raisonnement par récurrence

Une approche historique nous a fait privilégier dans cette catégorie organisatrice le raisonnement par descente infinie comme expression de la propriété de bon ordre de N. Pourtant, si l'on considère l'enseignement, et l'enseignement secondaire qui est dans cette thèse l'objet de notre attention plus particulièrement, ce n'est pas la descente infinie qui est privilégiée mais la récurrence. C'est cette dernière seule qui est officiellement au programme ; l'expression descente infinie ne vit quasiment pas au sein de l'institution scolaire (cf. chapitre 6 *Ressources destinées aux enseignants*). Ceci nous conduit tout naturellement à chercher à préciser les liens entre descente infinie et récurrence, en allant au-delà de ce que nous avons écrit jusqu'ici, à savoir que ces deux formes de raisonnement reposent sur la propriété de bon ordre de N. Cette démarche, mathématiquement naturelle, se justifie d'autant plus dans le cadre d'une recherche en didactique que l'on sait bien que des formes de raisonnement logiquement équivalentes, des formulations différentes d'une même propriété mathématique, n'ont aucune raison d'être cognitivement équivalentes et que, pour les approcher dans une perspective didactique, il faut donc dépasser la seule analyse logique.

Pour préciser ces liens, nous reviendrons d'abord sur l'exemple de Fermat déjà familier au lecteur, avant de passer à une mise en rapport plus générale.

I.2.1 Avec l'exemple sur lequel Fermat inventa la descente infinie

Pour introduire le lien entre descente infinie et raisonnement par récurrence, nous allons proposer une preuve par récurrence du résultat en jeu dans le chapitre précédent, celui sur lequel, semble-t-il, Fermat inventa la descente infinie. Rappelons que le résultat en jeu est « Il n'existe pas de triangle rectangle en nombres dont l'aire soit un carré.» mais qu'il est montré en se ramenant d'abord à la catégorie des triangles primitifs.

Pour démontrer cette propriété par récurrence, nous allons prendre comme hypothèse de récurrence l'énoncé suivant :

P(n) = « Il n'existe pas de triangle primitif de Pythagore dont l'aire soit un carré dont la longueur de l'hypoténuse soit strictement inférieure à n»

La démonstration est alors la suivante :

- <u>Initialisation de la récurrence</u> (n=1) : la propriété P(1) est trivialement vraie.
- <u>Preuve du caractère héréditaire de la propriété P(n)</u> : Soit $n \geq 1$ quelconque, il s'agit de montrer l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Ceci s'effectue en montrant l'implication contraposée et il s'agit donc d'établir que s'il existe au moins un triangle primitif de Pythagore de longueur

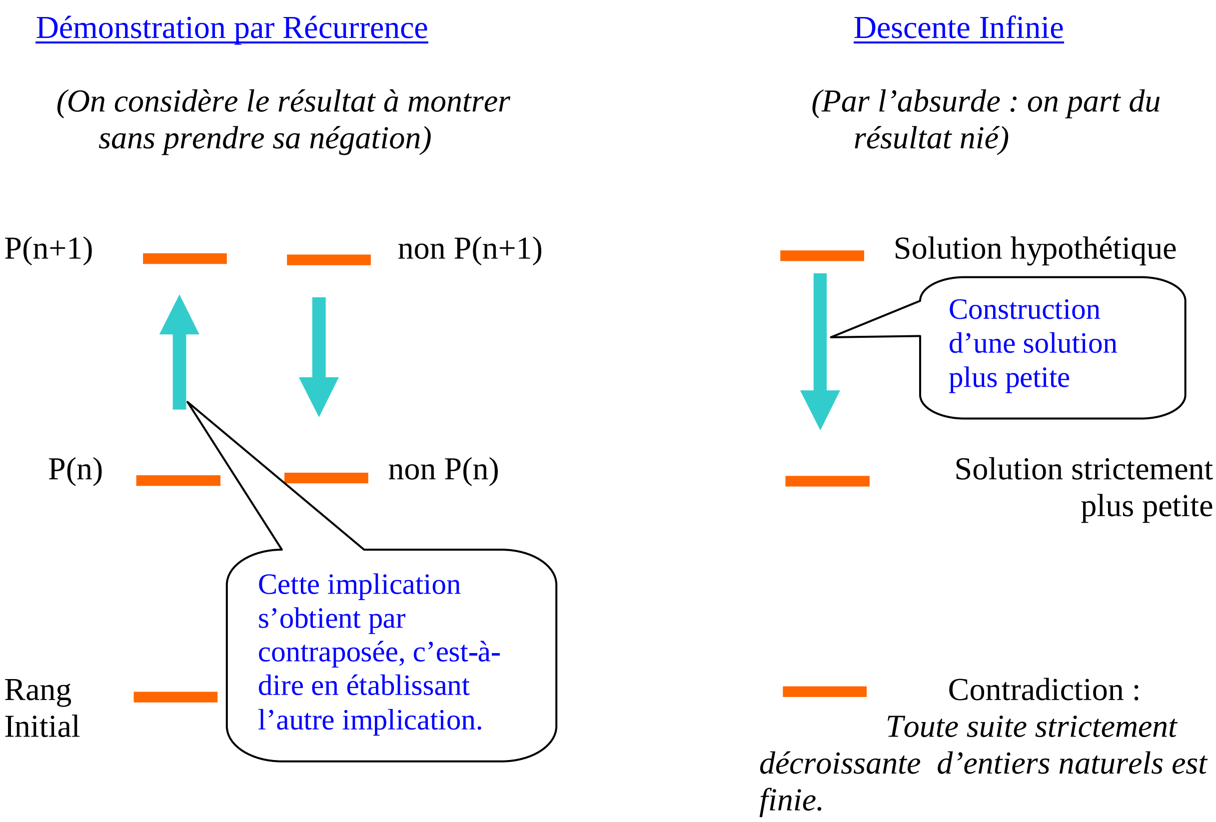
d’hypoténuse inférieure à n+1 dont l’aire soit un carré, alors il existe au moins un triangle primitif de Pythagore de longueur d’hypoténuse inférieure à n dont l’aire soit un carré. »

Et, comme le fait Fermat, cela revient donc à montrer que s’il existe un triangle de Pythagore dont l’aire soit un carré alors il en existe un autre, dont l’hypoténuse a une longueur strictement plus petite que celle de l’hypoténuse du premier (« grand ») triangle.

- En conclusion, P(n) est vraie pour tout n, entier naturel non nul. Autrement dit, pour tout n entier naturel non nul, il n’existe pas de triangle primitif de Pythagore dont l’aire soit un carré, d’hypoténuse inférieure à n, donc il n’existe pas de triangle primitif de Pythagore dont l’aire soit un carré.

I.2.2 Généralisation

Comme on le perçoit aisément à lire ce qui précède, la transposition de la descente infinie à la récurrence que nous venons d’effectuer sur un cas particulier, se généralise sans difficulté et, comme l’illustre la figure qui suit, toute démonstration utilisant la méthode de descente infinie peut être réécrite sous la forme d’une démonstration par récurrence :



Il est important de noter que le problème de l’initialisation de la récurrence ne se pose pas. En effet, P(0) sera toujours vraie puisque l’application t, par définition, prend ses valeurs dans N.

Face à une preuve de non-existence, où l'on choisit de suivre un raisonnement par récurrence, il est naturel de montrer « $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ » par contraposée, puisqu'il est plus facilement exploitable de supposer que quelque chose existe plutôt que le contraire. Que l'on raisonne par descente ou par récurrence, l'aspect « descente » apparaît. Mais dans le cas de la récurrence, sa position est, au moins apparemment moins centrale et peut apparaître comme un simple artifice technique. Le même argument pourrait être développé pour expliquer en quoi il n'est pas étonnant que Fermat ait été amené à suivre un raisonnement par l'absurde, en supposant qu'il existait un triangle rectangle dont l'aire fut un carré…

Dans cette approche épistémologique et didactique, bien que toute démonstration utilisant la descente infinie puisse être réécrite sous forme d'une récurrence et que ces deux modes de raisonnement soient deux traductions de la propriété de bon ordre de N, nous choisissons, comme nous l'avons dit, de considérer la descente infinie et la récurrence comme distinctes[12] :

- Sur le plan didactique : ces deux modes de raisonnement sont, *a priori*, non équivalents du point de vue de l'apprentissage.
- Sur le plan épistémologique : l'histoire des mathématiques est là pour appuyer ce choix : notre constat est anachronique et rétrospectif. En effet, Fermat n'a pas érigé son invention en méthode telle que ce que l'on appelle aujourd'hui une méthode par récurrence ; le « passage de l'étape k à l'étape k-1, ou k+1 » n'est pas thématisé en tant que tel. Par contre, il est intéressant de noter que les premières apparitions repérées de la récurrence se trouvent dans la correspondance entre Pascal et Fermat, sur le « problème des partis ». Remarquons que le texte correspondant est d'autant plus important pour l'histoire des mathématiques, qu'il s'agit du texte fondateur du calcul des probabilités.

I.3 Applications de la descente infinie

Fermat fut amené à inventer la méthode de descente pour résoudre un problème de non-existence mais il voulut ensuite l'investir dans la résolution de questions affirmatives. Il n'est pas surprenant qu'il fut alors « en belle peine »… :

> Je fus longtemps sans pouvoir appliquer ma méthode aux questions affirmatives, parce que le tour et le biais pour y venir est beaucoup plus malaisé que celui dont je me sers aux négatives.
>
> (Fermat, 1659)[Tannery et Henry, 1894]

La méthode de descente est effectivement avant tout adaptée aux assertions négatives comme l'illustre la première utilisation que nous présentons à présent.

[12] Nous pouvons faire la même remarque si l'on considère *descente infinie* et *raisonnement par l'absurde et minimalité* ; d'autant que dans ce dernier l'idée de l'itération de la descente n'y figure pas.

I.3.1 Montrer qu'une propriété P(n) est vraie pour tout entier n

Pour montrer qu'une propriété P(n) est vraie pour tout entier n en utilisant l'invention de Fermat, il s'agit de montrer que P(n) n'est fausse pour aucun entier n, autrement dit qu'il n'existe pas d'entier n tel que P(n) soit fausse en utilisant la méthode de descente infinie : en supposant qu'il existe un entier n tel que P(n) est fausse, on démontre donc l'existence d'un entier m, strictement plus petit que n, tel que P(m) est également fausse, ce qui conduit à une contradiction d'après la propriété fondamentale sur laquelle repose la méthode de Fermat.

Cette utilisation de la méthode de descente infinie est appelée « descente affirmative » par Rashed, Houzel et Christol (1999) au sens où il s'agit de démontrer une assertion affirmative.

Nous choisissons quant à nous de parler dans ce cas de descente infinie à visée affirmative : il ne s'agit pas d'une méthode autre mais d'une adaptation, dans la formulation (transformation du résultat sous une forme négative, de manière équivalente) du résultat à démontrer, pour utiliser la méthode de descente infinie.

Nous en trouvons l'exemple suivant dans les travaux de Fermat :

> « […] si un nombre premier pris à discrétion, qui surpasse de l'unité un multiple de 4, n'est point composé de deux quarrés, il y en aura un nombre premier de même nature, moindre que le donné, et ensuite un troisième encore moindre, etc., en descendant à l'infini jusques à ce que vous arriviez au nombre 5, qui est le moindre de tous ceux de cette nature, lequel il s'ensuivroit n'être pas composé de deux quarrés, ce qu'il est pourtant. D'où on doit inférer, par la déduction à l'impossible, que tous ceux de cette nature sont par conséquent composés de deux quarrés.»
>
> (Fermat, 1659)[Tannery et Henry, 1894]

Dans son deuxième livre d'Arithmétique consacré à Fermat, Guinot (1993) propose quatre démonstrations de ce théorème dont celle d'Euler qui se présente comme une démonstration par récurrence ; l'hypothèse étant :

« P(k) : tous les nombres premiers de la forme 4n+1, inférieurs à k, s'écrivent comme somme de deux carrés. »

Il s'agit alors de montrer que, pour tout k, P(k) implique P(k+1) en montrant que si tous les nombres premiers de la forme 4n+1, inférieurs à k, s'écrivent comme somme de deux carrés, il en est de même des nombres p premiers, de la forme 4n+1, inférieurs à k+1. On voit bien ici, ce qui n'apparaissait pas dans le cas précédent de descente infinie à visée négative, comment une différence qui peut paraître légère du point de vue de la dimension organisatrice va induire des différences elles substantielles dans le travail opératoire mené.

I.3.2 Résolutions d'équations diophantiennes

La deuxième utilisation de la descente infinie que nous présentons ici correspond à une méthode de résolution constituée de deux phases comme l'expliquent Rashed, Houzel et Christol :

> Etant donné une solution x d'une équation, on sait en construire une plus petite à condition que x soit suffisamment grand, disons $\geq \alpha$. En utilisant cette descente, on constate que, si l'équation a une solution, elle a une solution inférieure à α. Il n'est alors pas difficile de tester si cela est vrai puisqu'il ne reste qu'un nombre fini de cas possibles. De plus, ayant ainsi trouvé les petites solutions, on peut trouver toutes les solutions en « remontant », c'est-à-dire en inversant le procédé de la descente.
>
> [Rashed, Houzel, Christol, 1999]

Contrairement à la première utilisation de la méthode de descente, il s'agit là d'une nouvelle méthode qui conjugue en fait deux des catégories que nous étudions dans ce chapitre : la descente infinie et la recherche exhaustive. En effet, il y a descente et la propriété de bon ordre de N est cette fois mobilisée, à propos de l'ensemble des solutions de l'équation supérieures ou égales à α, et il y a recherche exhaustive des solutions sur un ensemble majoré, celui des nombres inférieurs à α.

Pour illustrer cette méthode, nous renvoyons à l'exemple de l'équation de Pell-Fermat $y^2-2x^2=1$, traité dans la brochure *Fragments d'Arithmétique* de l'IREM de Montpellier (Bernard, Briant, Faure, Fontana, Nogues & Trouche, 1999) que nous considérerons dans le cadre de l'analyse institutionnelle (cf. chapitre 6 *Ressources destinées aux enseignants*).

II. RAISONNEMENT PAR DISJONCTION DE CAS ET RECHERCHE EXHAUSTIVE

Face à la **problématique de ramener la résolution d'un problème arithmétique à l'étude d'un nombre fini de cas,** nous avons identifié deux méthodes : la disjonction de cas et la recherche exhaustive que nous analysons, comme cela a été annoncé, dans cette seconde partie.

Il nous semble utile de préciser dès à présent que la « réduction au fini » n'est pas de même type pour ces deux méthodes. Explicitons cette différence : soit E l'ensemble des entiers associé à un problème d'arithmétique donné. Dans un raisonnement par disjonction de cas, on se ramène à l'étude d'un nombre fini de cas en catégorisant les éléments de E, à l'aide d'une partition de cet ensemble. Alors que dans une recherche exhaustive, on réduit le problème à un nombre fini de possibilités en majorant E ou son cardinal.

Chacune d'entre elles sera définie puis présentée à l'aide d'exemples, tout en étant analysée à l'aide du cadre conceptuel que nous avons introduit dans le chapitre précédent.

II.1 Disjonction de cas

II.1.1 Définition

Rappelons tout d'abord la définition d'une *partition d'un ensemble E* : si E est un ensemble non vide, on appelle *partition de E* toute partie Q de $\wp(E)$ qui possède les trois propriétés suivantes :

(i) $\forall X, (X \in Q \Rightarrow X \neq \emptyset)$,

(ii) $\forall X\ \forall Y, [(X \in Q \text{ et } Y \in Q \text{ et } X \neq Y) \Rightarrow X \cap Y = \emptyset]$,

(iii) $\bigcup_{X \in Q} X = E$.

Raisonner par disjonction de cas sur un ensemble E, c'est considérer une partition <u>finie</u> de cet ensemble et traiter séparément chaque cas défini par cette dernière.

Si le raisonnement par récurrence est une forme de raisonnement clairement explicitée dans les programmes officiels comme dans les manuels, ce n'est déjà plus le cas pour le raisonnement par disjonction de cas et, même si nous anticipons en cela sur l'analyse institutionnelle, il nous semble intéressant de souligner que parmi les manuels de terminale S que nous avons consultés, un seul institutionnalise, de manière décontextualisée, ce mode de raisonnement, le faisant en ces termes :

> RAISONNEMENT PAR DISJONCTION DE CAS
> Pour démontrer qu'une proposition est vraie pour tout élément d'un ensemble E, on peut démontrer qu'elle est vraie pour tous les sous-ensembles (non vides) qui forment une partition de E.
> Exemple : Démontrez que dans le système d'écriture décimale le carré d'un entier n ne se termine pas par 3.
> […]
> Pour déterminer un ensemble dont on connaît la relation d'appartenance, on peut procéder par disjonction de cas.
> Exemple : Représentez graphiquement l'ensemble E des points M(x ; y) tels que $|x|+|y|=1$.
> [Nouveau TRANSMATH, Enseignement obligatoire (1998)]

Ce paragraphe apparaît dans le chapitre « *Logique et Raisonnements* » de l'enseignement obligatoire. Le but annoncé de ce chapitre est de « montrer les différents types de problèmes rencontrés à ce niveau, ainsi que les différents types de raisonnements pour les résoudre ». On comprend alors que le raisonnement par disjonction de cas soit défini en lui associant des types de problèmes. La définition que nous venons de donner correspond au premier point, qui est justement illustré par un exemple emprunté à l'arithmétique.

On trouve également une définition de ce mode de raisonnement dans certains ouvrages universitaires. Citons l'un d'entre eux :

Soit A_1, … A_n et B des assertions.

Si (A_1 ou … ou A_n) et ($A_1 \Rightarrow B$), … ($A_n \Rightarrow B$) sont vraies, alors B est vraie. (c'est la disjonction de cas).

[Arnaudies & Fraysse, 1987]

Et pour l'illustrer, les auteurs proposent l'exemple suivant :

A : $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ est rationnel

B : $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ est irrationnel

C : Il existe un réel u non rationnel tel que $u^{\sqrt{2}}$ soit rationnel.

Alors (A ou B) est vraie et $A \Rightarrow C$ et $B \Rightarrow C$ sont évidemment vraies puisqu'on sait que $\sqrt{2}$ est irrationnel ($B \Rightarrow C$: $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$) donc C est vraie sans avoir besoin de savoir si c'est l'assertion A ou B qui est vraie.

[Arnaudies & Fraysse, 1987]

Notre définition de la disjonction de cas ne correspond pas à la définition qu'en donnent les auteurs cités ci-dessus. En effet, la disjonction faite dans cet exemple provient de la distinction entre rationnels et irrationnels, au sein de l'ensemble R des nombres réels :

$$\{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\} = (\{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\} \cap R) \cup (\{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\} \cap R \backslash Q).$$

Cela ne correspond pas à une partition, au sens où nous l'avons définie. En fait, les points de vue adoptés dans les deux définitions sont différents : dans la nôtre, la disjonction porte sur des <u>parties</u> alors que les auteurs de l'ouvrage cité prennent pour objets des <u>assertions</u>. Bien sûr, la validité du raisonnement par disjonction de cas tel que nous l'avons formulé, repose sur l'énoncé de calcul propositionnel qui est exprimé ici, mais ce dernier ne nécessite absolument pas que les énoncés A_i s'excluent mutuellement, même si c'est généralement le cas quand on a recours à cette forme de raisonnement, ce qui est le cas pour une partition.

II.1.2 Nature d'une disjonction de cas – Notion de partition primaire

En arithmétique, on rencontre deux grandes catégories de partitions liées respectivement aux deux ordres dans Z : ordre naturel et divisibilité. Pour caractériser la nature d'une disjonction de cas, nous sommes donc amenée à introduire la notion de *partition primaire* que nous introduisons à l'aide d'un exemple qui interviendra dans la dernière partie de ce chapitre (cf. §IV).

Soit P l'ensemble des nombres premiers, dans cet exemple, on est amené à considérer la partition suivante :

$$(\wp 1) \quad P = \{2\} \cup \{p \in P / p \equiv 1[4]\} \cup \{p \in P / p \equiv 3[4]\}.$$

Il nous semble intéressant pour bien comprendre la nature de cette partition et les ressorts du raisonnement qu'elle sous-tend d'en faire intervenir une seconde, cette fois de Z :

$$(\wp 2) \quad Z = 4Z \cup (4Z+1) \cup (4Z+2) \cup (4Z+3),$$

qui mette bien en évidence que la première résulte d'une catégorisation des entiers modulo 4. En effet, en prenant l'intersection de Z avec P, on obtient :

$$P=Z\cap P=(P\cap 4Z) \cup (P\cap(4Z+1)) \cup(P \cap(4Z+2)) \cup(P \cap(4Z+3))$$

ce qui nous conduit bien à la partition annoncée.

Dans cet exemple, ce que nous appelons la partition primaire est donc la partition ($\wp$2) de Z. Le fondement de cette partition est la relation d'équivalence « congru modulo 4 ». A travers la notion de congruence, c'est le caractère algébrique de Z comme anneau muni de l'ordre partiel associé à la divisibilité qui est en jeu.

Plus généralement, la *partition primaire* est celle d'un ensemble contenant l'ensemble E envisagé dont est déduite celle utilisée pour ce dernier ; la partition de E se déduit alors de la partition primaire en prenant l'intersection terme à terme, tout en ne conservant que les intersections non vides. Les deux partitions coïncident bien sûr lorsque E=Z.

La partition primaire n'est pas *a priori* une partition de l'ensemble auquel on s'intéresse, mais d'un ensemble le contenant. Ainsi, **dans un raisonnement par disjonction de cas, un ensemble *a priori* amorphe (a-structuré) va bénéficier de la richesse structurelle de l'ensemble dans lequel il est « plongé »** (ici il s'agira de celle de Z).

Soulignons de plus que, c**ontrairement à la descente infinie, la dimension organisatrice associée à un raisonnement par disjonction de cas peut relever de propriétés de nature différente selon la nature de la disjonction faite, et donc en particulier selon l'ordre sous-jacent à la partition primaire.** Les deux exemples que nous allons donner maintenant vont nous servir à illustrer cette affirmation.

II.1.3 Exemples

Nous proposons ici deux exemples permettant d'illustrer l'affirmation faite dans le paragraphe précédent : dans l'un d'eux, en effet, la disjonction de cas sera basée sur l'ordre naturel, alors que dans l'autre elle le sera sur l'ordre associé à la divisibilité à travers la notion de congruence.

Ces exemples sont les deux problèmes suivants :

(P1) Déterminer les naturels m et n tels que $19^m - 2^n$ soit un carré.

(P2) Pour quelles valeurs du naturel non nul n le nombre $\frac{2n+1}{n(n+1)}$ est-il décimal ?

Il s'agit des problèmes n°44 et n°58 parmi *les 200 premiers problèmes de l'APMEP* (Roux, 1993). Les démonstrations proposées sont respectivement les solutions de Chevreau et Lemaire.

$\boxed{\text{(P1) Déterminer les naturels m et n tels que } 19^m - 2^n \text{ soit un carré (noté } a^2)}$

Distinguons les cas $n \geq 2$, $n=1$ et $n=0$:

- <u>$n \geq 2$</u> :

  <u>a est impair</u> ; en effet, sinon on aurait $(-1)^m - 2^n \equiv 0$ [4], ce qui est impossible.

  D'où $(-1)^m - 2^n \equiv 1$ [4] ; pour que l'on ait des solutions il faut que m soit pair.

  Posons m = 2r.

  $(19^r - a)(19^r + a) = 2^n$, d'où $19^r - a = 2^\alpha$ et $19^r + a = 2^{n-\alpha}$ avec $(n-\alpha) \geq \alpha$. On obtient :

  $19^r = \dfrac{2^\alpha + 2^{n-\alpha}}{2}$, ce qui entraîne $\alpha = 1$. On a alors $19^r - 1 = 2^{n-2}$ et une contradiction en raisonnant modulo 3 ($1-1 \equiv 2^{n-2}$ [3]).

- <u>n=1</u> : $19^m - 2 = a^2$ or $19^m - 2 \equiv -1$ [3], donc il n'y a pas de solution (car -1 n'est pas un carré dans Z/3Z)

- <u>n=0</u> : $19^m - 1 \equiv (-1)^m - 1$ [4] ; pour qu'il y ait des solutions, il faut que a soit pair. En conséquence on aura m pair (m=2r). D'où : $(19^r - a)(19^r + a) = 1$. Les deux facteurs sont égaux à 1, ce qui correspond à la solution : m = n = a = 0.

- Conclusion : l'unique solution est le couple (0,0).

La partition en jeu ici est la suivante :

$$E = N = \{n \in N / n \geq 2\} \cup \{1\} \cup \{0\}$$

La partition primaire associée peut être la suivante :

$$Z = \{n \in Z / |n| \geq 2\} \cup \{n \in Z / |n| = 1\} \cup \{0\},$$

Et, on a bien : $\{n \in N / n \geq 2\} \cup \{1\} \cup \{0\} = N \cap (\{n \in Z / |n| \geq 2\} \cup \{n \in Z / |n| = 1\} \cup \{0\})$.

A noter que l'on peut s'interroger sur la possibilité de traiter ce problème en faisant une disjonction de cas « a pair » et « a impair », basée cette fois-ci sur le caractère algébrique de Z. On constate que l'on retrouverait, à l'intérieur de ces deux cas, la disjonction faite dans la démonstration précédente. Cette dernière est donc plus économique.

Venons-en maintenant au deuxième problème.

(P2) Pour quelle(s) valeur(s) du naturel non nul n le nombre $\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ est-il décimal ?

Il faut remarquer tout d'abord que le nombre $\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ n'est décimal que si la décomposition de n(n+1) ne comporte que des puissances de 2 ou de 5. En effet, si p premier, divise n ou divise (n+1), il ne divise pas 2n+1 = 2(n+1)-1 ; la fraction $\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ est donc irréductible.

Distinguons à présent deux cas suivant la parité de l'entier n :

- n pair : n+1 impair, ne peut être qu'une puissance de 5. Mais, n et n+1 ne peuvent être simultanément multiples de 5, n doit donc être une puissance de 2 : n = 2^a et n + 1 = 5^b avec a∈N* et b∈N. Distinguons deux sous-cas suivants la parité de b :
    - b pair : $5^b \equiv 1$ [3] car $5^2 \equiv 1$ [3]. Donc $5^b - 1 \equiv 0$ [3] ; ce qui prouve que $5^b - 1$ ne peut être une puissance de 2 pour b pair.
    - b impair : $5^b \equiv 5$ [8] car $5^2 \equiv 1$ [8]. Donc $5^b - 1 \equiv 4$ [8]. Il en résulte que hormis le cas où b = 1, $5^b - 1$ ne peut être une puissance de 2 pour b impair, puisque b ≥ 3 implique $5^b - 1 > 8$. Le cas b = 1 fournit la solution :

$$n = 5 - 1 = 4 = 2^2, \text{ d'où } \frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{9}{20} = 0{,}45.$$

- n impair : n ne peut être que 1 ou une puissance de 5, donc n+1, une puissance de 2 :

n = 5^c et n + 1 = 2^d avec c∈N et d∈N. Or, 5 ≡ 1 [4] implique $5^c + 1 \equiv 2$ [4] pour tout entier c.
Il en résulte que hormis le cas où c = 0, 5^c+1 ne peut être une puissance de 2, puisque c ≥ 1 implique $5^c + 1 > 4$. Le cas c = 0 fournit la solution : n = 5^0 = 1 = 2 –1. D'où :

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

- En conclusion, les seuls entiers positifs n tels que $\frac{2n+1}{n(n+1)}$ soit décimal sont 1 et 4.

Les deux distinctions de cas rencontrées (pour les entiers n et b) correspondent à la partition suivante (en adaptant pour b entier naturel pouvant être nul) :

$$N^* = \{n \,/\, \exists\, k \in N^*,\ n = 2k\} \cup \{n \,/\, \exists\, k \in N,\ n = 2k+1\}$$

La partition primaire associée peut être la suivante :

$$Z = 2Z \cup 2Z+1$$

On a bien : $\{n \,/\, \exists\, k \in N^*,\ n= 2k\} \cup \{n \,/\, \exists\, k \in N,\ n= 2k+1\} = (N^* \cap 2Z) \cup (N^* \cap (2Z+1))$. Le fondement de la partition primaire est la relation d'équivalence « congru modulo 2 ».

A noter qu'au sein du cas b impair (*resp.* n impair), en différenciant les cas b=1 et b≠1(*resp.* c=0 et c≠0), on retrouve un exemple de disjonction de cas fondée sur le caractère topologique de Z, c'est-à-dire la structure de Z comme ensemble ordonné par l'ordre naturel.

Relativement à la dimension organisatrice, il nous semble aussi intéressant de mettre en évidence une méthode en jeu dans les deux démonstrations précédentes ; nous parlerons de «méthode des perspectives». Celle-ci consiste à considérer une même équation modulo différents entiers, afin de trouver éventuellement soit une impossibilité, soit des contraintes sur les solutions hypothétiques initiales. Nous aurons l'occasion de revenir sur cette méthode ultérieurement.

Le lecteur trouvera d'autres exemples de raisonnement par disjonction de cas dans la suite de notre exposé. Il y retrouvera en particulier les deux principales catégories de partitions dans Z construites respectivement à partir de l'ordre divisibilité et l'ordre naturel.

II.2 Recherche exhaustive

Notre voyage dans le monde des méthodes fondamentales en arithmétique se poursuit avec un séjour au pays de la recherche exhaustive, une méthode qui a connu un essor important dans les mathématiques du XX^{ème} siècle de par l'évolution de l'informatique...

En effet cette méthode, de par son caractère algorithmique, se prête particulièrement bien à une implémentation informatique, et l'évolution technologique en a augmenté singulièrement le champ d'application. Les conférences sur ce thème de la recherche exhaustive de Dowek (2000), lauréat du Prix d'Alembert des lycéens 2000, nous ont été précieuses ; certains extraits illustreront notre propos.

II.2.2 Démarche algorithmique et recherche exhaustive

Dans le cadre de la résolution d'un problème, on appelle méthode de *recherche exhaustive* une méthode où l'on teste l'une après l'autre, après les avoir énumérées, toutes les solutions potentielles.

Il nous semble important de distinguer deux types de recherche exhaustive :

- *La recherche exhaustive au sens strict* : dans ce cas, le contexte limite la recherche à un nombre fini de solutions potentielles, qu'il est raisonnable de traiter. C'est le cas par exemple de l'exemple suivant proposé par Dowek :

> Si on cherche une solution de l'équation X^3-15X² + 71X – 105 = 0 dans l'ensemble {1,2,3,4}, il suffit de tester ces quatre nombres pour trouver une solution de l'équation : 3.
>
> [Dowek, 2000]

- *La recherche exhaustive au sens large* : dans ce cas, un travail de limitation de la recherche précède une phase de recherche exhaustive au sens strict. Nous l'illustrons avec un autre exemple proposé par Dowek :

> Quand on cherche une solution d'une équation diophantienne comme $X^4 -4X^3 +X^2 + 6X + 2 = 0$ en énumérant les nombres 0, 1, 2, 3, …, il arrive un moment où le terme de plus haut degré (ici X^4) devient trop grand pour que les autres puissent le contrebalancer et que le résultat soit nul. Dans cet exemple, quand X est supérieur à 24 :
>
> $$X^4/4 > 4\,X^3$$
>
> $$X^4/4 > -X^2$$

$$X^4/4 > -6X$$

$$X^4/4 > -2$$

Et donc en ajoutant ces quatre inégalités :

$$X^4 > 4X^3 - X^2 - 6X - 2$$

Soit :

$$X^4 - 4X^3 + X^2 + 6X + 2 > 0$$

Et X n'est donc pas solution de l'équation. Autrement dit, on sait qu'il n'y a pas de solution au-delà de 24, et on peut donc limiter la recherche aux nombres inférieurs ou égaux à 24. Si on ne trouve pas de solution avant 24, il est inutile de continuer au-delà : cela signifie que l'équation n'a pas de solution. Les calculs de 0 à 24 donnent les résultats : 2, 6, 2, 2, 42, 182, 506, 1122, 2162, 3782, 6162, 9506, 14042, 20022, 27722, 37442, 49506, 64262, 82082, 103362, 128522, 158006, 192282, 231842, 277202. Aucun de ces nombres n'est nul et l'équation n'a donc pas de solution. En limitant ainsi la recherche on transforme un *semi-algorithme*[13] en algorithme.

[Dowek, 2000]

On a bien affaire dans ces deux cas, comme indiqué plus haut, à une démarche algorithmique et, comme le souligne Dowek, dans le cas que nous qualifions de recherche exhaustive au sens large où le contexte ne limite pas à lui seul le nombre d'essais, c'est le travail mathématique de limitation des cas à étudier qui assure que l'on a bien affaire à un algorithme, à savoir que le processus s'achève en un temps fini.

Il nous semble important, malgré cela, de conserver la distinction faite entre recherche exhaustive au sens strict et recherche exhaustive au sens large. Effectivement, le travail de limitation de la recherche, que l'on trouve dans le cas d'une recherche exhaustive au sens large, met généralement en jeu des raisonnements spécifiques et ceci organise de façon sensiblement différente le jeu entre dimensions organisatrice et opératoire, au fil du raisonnement. L'exemple de Dowek, donné précédemment, nous semble bien illustrer cette idée.

Comme le montre le dernier exemple donné, la phase de limitation de la recherche consiste à se ramener à un nombre fini de cas, en majorant l'ensemble des solutions possibles. La recherche d'un majorant peut être plus facile lorsqu' il s'agit de trouver la plus petite solution à un problème donné et non toutes les solutions à ce problème. En effet, toute solution trouvée permettra de limiter la recherche aux entiers plus petits qu'elle même. La situation n'est pas forcément pour autant plus simple comme le montre l'exemple suivant.

[13] Dowek définit un *semi-algorithme* comme étant une méthode qui trouve une solution quand une solution existe, mais qui poursuit sa recherche éternellement quand il n'en existe pas.

II.2.3 Un exemple

Il s'agit du problème suivant :

Quel est le plus petit entier n>1 tel qu'une somme de n carrés puisse être un cube.

Cette question est extraite des commentaires faits au sujet du problème n°96 des 200 premiers problèmes de l'APMEP (Roux, 1993) : *Combien existe-t-il d'entiers n pour lesquels n^3 est égal à une somme de plusieurs carrés d'entiers consécutifs ?*

En reprenant les commentaires faits dans l'ouvrage envisagé ici, on sait qu'une solution est n=26 ($274\,625 = 65^3 = 90^2+91^2+\ldots+115^2$ (26 carrés)) ; celle-ci est obtenue en examinant les résultats donnés par un programme construit, initialement, pour déterminer le plus petit entier n>1 dont le cube est une somme de carrés consécutifs. Ainsi, le plus petit entier n>1 tel qu'une somme de n carrés puisse être un cube est inférieur ou égal à 26.

Dans l'ouvrage mentionné, les cas 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15 17, 18, 19 20, 21, 24 et 25 sont éliminés. On sait alors que la solution au problème appartient à l'ensemble : {6, 11, 13, 16, 22, 23, 26}. Mais ici, contrairement à ce qui se passait dans les problèmes précédents, le problème n'est pas pour autant résolu, car si l'on a limité à un ensemble fini le nombre de cas à examiner, chacun de ces cas oblige à considérer *a priori* à nouveau une infinité de cas possibles. … Le problème reste ouvert.

Contrairement à la disjonction de cas, la dimension organisatrice associée à une recherche exhaustive est à rattacher à un unique caractère de Z : celui que nous avons dénommé « caractère topologique », c'est-à-dire relatif à la structure d'ordre naturel. En effet, cette méthode repose sur une majoration de l'ensemble des entiers associé au problème étudié.

Ajoutons qu'à travers une partie des exemples mentionnés, on remarque la dissymétrie qui peut exister entre la difficulté à résoudre un problème et la facilité à tester une solution potentielle. Cette dissymétrie exprime d'une certaine façon, toute la « puissance » de la méthode de recherche exhaustive…

III. JEU D'EXTENSION-REDUCTION : UNE METHODE SPECIFIQUE AUX ANNEAUX FACTORIELS

Nous présentons maintenant une méthode spécifique aux anneaux factoriels ; indiquons qu'on pourrait parler ici de méthode arithmétique, conformément à ce qu'écrit Perrin dans son cours d'algèbre (Perrin, 1981) :

> On entend par propriétés arithmétiques des anneaux celles relatives à la divisibilité (anneaux principaux, factoriels,...).
>
> [Perrin, (1981)]

Cette méthode sera présentée à l'aide du problème consistant à trouver combien il y a de nombres plus petits qu'un nombre donné A, et premiers avec lui, à travers la démonstration de Gauss (1801) ; voici l'extrait des *Recherches Arithmétiques* de Gauss qui nous intéresse ici :

38. PROBLEME. Trouver combien il y a de nombres plus petits qu'un nombre donné A, et premiers avec lui ? Désignons, pour abréger, le nombre cherché par le caractère φ placé avant le nombre donné ; le nombre cherché sera φA.

1°. Quand A est premier, il est évident que tous les nombres, depuis 1 jusqu'à A-1, sont premiers avec A, et partant, dans ce cas, on a φA=A-1.

2°. Quand A est une puissance d'un nombre premier p, p^m par exemple ; tous les nombres divisibles par p ne seront pas premiers avec A, les autres le seront ; c'est pourquoi de p^m-1 nombres, il faut rejeter ceux-ci : p, 2p, 3p,…(p^{m-1}-1)p. Il en restera donc p^{m-1}-1 - (p^m-1) = p^m-p^{m-1} = p^{m-1} (p-1) donc φp^m = p^{m-1}.(p-1).

3°. Les autres cas se ramènent facilement à ceux-ci, au moyen de la proposition suivante : Si on décompose A en facteurs M, N, P etc. premiers entre eux, on aura φA=φB.φN.φP, etc ., qui se démontre ainsi qu'il suit. Soient m, m', m'', etc. les nombres premiers avec M et plus petits que lui. Soient de même n, n', n'', etc., p, p', p'', etc., etc. les nombres premiers avec N, P, etc. respectivement, et plus petits qu'eux ; il est évident que tous les nombres premiers avec A le seront aussi avec les facteurs M, N, P, etc., et réciproquement (n°19), et que tous les nombres qui seront congrus à l'un quelconque des nombres m, m', etc. suivant le module M ; seront premiers avec M ; de même pour N, P, etc. La question est donc réduite à déterminer combien il y a de nombres au dessous de A, qui soient congrus à quelqu'un des nombres m, m', etc. suivant le module M, à quelqu'un des nombres n, n', etc. suivant le module N, etc. ; mais (n°32) tous les nombres qui ont des résidus donnés suivant chacun des modules M, N, P, etc. doivent être congrus suivant leur produit A, et parconséquent il ne peut y en avoir qu'un seul congru à des résidus donnés suivant les modules M, N, P, etc., et qui soit plus petit que A. Ainsi le nombre cherché sera égal au nombre des combinaisons des différens nombres m, m', m'', etc., etc. Or par la théorie des combinaisons, ce nombre est φ(M).φ(N).φ(P).etc.

4°. On voit facilement comment on peut appliquer cette proposition au cas dont il s'agit. On décomposera A en facteurs premiers ; c'est-à-dire, qu'on le réduira à la forme $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ etc., a, b, c etc. étant des nombres premiers différens. Alors on aura φA=φa^α.φb^β.φc^γ.etc.= $a^{\alpha-1}$(a-1).$b^{\beta-1}$ (b-1).$c^{\gamma-1}$ (c-1) etc., qui peut se mettre sous la forme plus élégante φA=A.$\frac{a-1}{a}.\frac{b-1}{b}.\frac{c-1}{c}$.etc.

[Gauss, 1801]

Décontextualisons la méthode associée à la dimension organisatrice de cette preuve, en prenant l'exemple de l'anneau Z : il s'agit de montrer qu'une propriété est vraie pour tout élément n de l'anneau Z. Cet anneau étant factoriel, tout élément n admet une unique décomposition en facteurs premiers que l'on écrit comme suit :

$$n = \prod_{p \in P} p^{v_p(n)}$$, avec P l'ensemble des nombres premiers.

Ainsi, si l'on montre que :

- d'une part, la *propriété est multiplicative*, c'est-à-dire que si elle vraie pour deux éléments de Z alors elle est encore vraie pour leur produit,
- d'autre part, la propriété est vraie pour tout nombre premier,

alors la propriété que l'on étudie sera vraie pour tout élément n entier, grâce à l'existence d'une décomposition de n en facteurs premiers. On pourrait dire que, d'une certaine façon, on va du « particulier » (entités que représentent les nombres premiers (plus généralement, les éléments irréductibles) au « général » (tout élément de l'anneau)).

On peut parfois associer une fonction à la propriété en jeu, comme dans l'exemple du problème « trouver combien il y a de nombres plus petits qu'un nombre donné A, et premiers avec lui ». Dans cet exemple, la fonction en question est l'indicateur d'Euler. Montrer que la propriété est multiplicative revient alors à montrer que la fonction qu'on lui a associée est multiplicative au sens de la définition donnée ci-après : on dit qu'une fonction arithmétique (fonction dont la source est l'ensemble des entiers positifs) dont le but est un anneau commutatif est *multiplicative* si on a f(ab)=f(a)f(b) lorsque pgcd(a,b)=1.

Cette étape de la démonstration est bien mise en évidence par Gauss. En effet, on peut lire :

> Les autres cas se ramènent facilement à ceux-ci, au moyen de la proposition suivante : Si on décompose A en facteurs M, N, P etc. premiers entre eux, on aura φA = φM.φN.φP, etc.
>
> [Gauss, 1801]

Nous proposons au lecteur de désigner la méthode explicitée ici à l'aide de l'appellation *jeu d'extension-réduction*. Cette dernière permet de désigner le principe (on pourrait parler de méta-méthode) fondateur de la méthode présentée ici qui se retrouve dans d'autres champs des mathématiques, tels l'analyse ou l'algèbre linéaire.

Pour finir, nous aimerions attirer l'attention du lecteur sur le point suivant : dans l'étude de la dimension organisatrice de certaines démonstrations, cette méthode et le raisonnement par disjonction de cas peuvent être confondus. Par exemple, la démonstration de Gauss, de par sa forme (énumération de cas), illustre la possibilité de diagnostiquer, à tort[14], un raisonnement par disjonction de cas. La confusion inverse pourrait être faite ; l'énoncé suivant nous aide à l'illustrer :

Soit n et k deux entiers tels que $n \geq 5$ et $2 \leq k \leq n$, on a $E\left(\frac{(n-1)!}{k}\right) \equiv 0$ [k-1], où E(x) désigne la partie entière de x.

Nous proposons la démonstration suivante (Francinou & Gianella, 1994) : tout d'abord, distinguons deux cas :

- Supposons k < n : On a alors : k(k-1) divise (n-1) ! et ainsi $\frac{(n-1)!}{k}$ est un entier divisible par k-1 ; le résultat est acquis.
- Supposons k = n :
  - Si n est un nombre premier : par le théorème de Wilson, (n-1) !+1 est divisible par n, d'où $\frac{(n-1)!}{n}+\frac{1}{n}$ est un entier que l'on note a. On a alors :

    $$E\left(\frac{(n-1)!}{n}\right) = a-1 = \frac{(n-1)!}{n}+\frac{1}{n}-1 = \frac{(n-1)!-(n-1)}{n},$$

    nombre entier divisible par (n-1) puisque n et n-1 sont premiers entre eux.
  - Si n = p² où p est premier : comme n≥5, p ≥3 et on a donc :

    $$1 < p < 2p < p^2-1 = n-1,$$

    d'où (n-1) ! est divisible par p(2p)(n-1) = 2n(n-1) et on conclut comme pour le cas[15] « k<n ».
  - Si n = ab avec 1< a < b < n : n et n-1 étant premiers entre eux, on a alors b<n-1 et donc (n-1) ! est divisible par ab(n-1) = n(n-1). On conclut à nouveau comme dans le cas k<n.

Apparaissent dans cette démonstration deux disjonctions de cas, l'une (dite inférieure) étant incluse dans l'autre (dite supérieure), au sens où une disjonction de cas est faite au sein d'un des cas de l'autre disjonction :

- La disjonction supérieure est basée sur l'ordre naturel : on distingue les cas « k < n » et « k = n ».
- La partition associée à la disjonction inférieure est la suivante : si l'on note :

  $$E_1 = \{ n \in E \ / \ n \text{ est premier}\} \text{ et } E_2 = \{ n \in E \ / \ n = p^2 \text{ avec p premier}\}$$

  On a $E = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n \geq 5\} = E_1 \cup E_2 \cup (E \setminus (E_1 \cup E_2))$.

---

[14] Conformément à notre définition de ce mode de raisonnement.

[15] Attention : cela n'implique pas que les cas ne soient pas isolés dans la disjonction qui est faite.

La partition primaire associée à cette partition est fondée sur la distinction entre nombres premiers et nombres non premiers ; la structure algébrique de Z est privilégiée à travers le caractère factoriel de cet anneau. Et, on constate que même si dans la disjonction de cas qui est faite ici la notion de nombre premier joue un rôle essentiel, il ne s'agit pas de la méthode propre aux anneaux factoriels que nous venons de mettre à jour.

Nous avons jusqu'ici, dans ce chapitre, abordé les catégories introduites, de façon isolée. L'exemple du premier chapitre, avec la descente infinie, tendait aussi à renforcer cet isolement. Mais quand on examine de près des raisonnements arithmétiques, on voit que très souvent s'y organisent des hiérarchies de dimensions organisatrices et que cette structuration, qui peut-être relativement complexe, est au cœur des rapports dialectiques existant entre dimension organisatrice et dimension opératoire. C'est pourquoi, avant même d'aborder plus avant cette dimension opératoire, dans le chapitre suivant, il nous a paru important de proposer une preuve arithmétique où interviennent si possible les différentes catégories introduites jusqu'ici. Même si elle ne correspond pas tout à fait à cette demande (une catégorie en est absente), il nous semble que la démonstration que nous présentons dans la quatrième partie de ce chapitre illustre bien cette imbrication possible dans le raisonnement d'une grande diversité de formes organisatrices.

IV. IMBRICATION DE DESCENTE INFINIE, DISJONCTION DE CAS ET JEU D'EXTENSION-REDUCTION

Nous proposons donc un exemple où sont réunies trois des méthodes présentées précédemment : la descente infinie, la disjonction de cas et le jeu d'extension-réduction. Il s'agit d'un problème concernant ce que l'on appelle communément, les sommes de deux carrés.

Comme le remarque Guinot (1993), les principales questions relatives aux sommes de carrés remontent à Diophante. Toutes ces questions furent naturellement reprises par Fermat. Les affirmations de ce dernier sur ce sujet seront toutes démontrées, pour la première fois, par Euler, entre 1742 et 1749.

Parmi cet ensemble de questions, nous allons nous intéresser plus particulièrement à la caractérisation des entiers naturels qui peuvent s'écrire comme somme de deux carrés. Le résultat que nous allons démontrer est donc le suivant :

Soit n un entier naturel non nul et $n = \prod_{p \in P} p^{v_p(n)}$ *(P est l'ensemble des nombres premiers), sa décomposition en facteurs premiers. On pose* $\Sigma = \{a^2 + b^2 \,;\, a, b \in N\}$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- *$n \in \Sigma$.*
- *$v_p(n)$ est pair pour tout $p \in P$ tel que $p \equiv 3[4]$.*

II.4.1 Résultats préliminaires

Nous aurons besoin tout particulièrement des trois choses suivantes:

- l'identité algébrique suivante : $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$, appelée parfois *identité de Lagrange*. L'usage de celle-ci est essentiel pour l'étude des sommes de deux carrés. En effet, elle assure la stabilité de l'ensemble Σ par multiplication. Cela est à rattacher à la méthode spécifique aux anneaux factoriels présentée dans la troisième partie. A noter que c'est seulement au XIIIème siècle que l'on voit cette relation énoncée explicitement et démontrée (par Fibonacci), même si Diophante devait la connaître d'une manière ou d'une autre.
- lemme 1 : *Soit $p \geq 3$ un nombre premier, -1 est un carré dans $\frac{Z}{pZ}$ si et seulement si $p \equiv 1[4]$.*

Nous en proposons ci-après une démonstration : soit $p \geq 3$ un nombre premier :

- Supposons que -1 soit un carré dans $\frac{Z}{pZ}$: il existe $x \in Z$ tel que $x^2 \equiv -1[p]$. D'où $x^4 \equiv 1$ [p]. On a donc trouvé un élément d'ordre 4 dans $\frac{Z}{pZ}$. D'après le **théorème de Lagrange**, 4 divise l'ordre du groupe multiplicatif. Finalement : 4 divise (p-1), ce qui est équivalent à $p \equiv 1[4]$.
- Supposons que $p \equiv 1[4]$: nous proposons une démonstration (Duverney, 2000) utilisant le **théorème de Wilson**[16] :

$$(p-1)\,! = \left(1\times 2\times ..\times \frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2}\times ..\times (p-2)\times (p-1)\right)$$

$$(p-1)\,! \equiv \left(1\times 2\times ..\times \frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p-1}{2}\times ...\times (-2)\times (-1)\right) \; [p]$$

$$= \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \times (-1)^{\frac{p-1}{2}} \; [p]$$

Comme $p \equiv 1[4]$, $\frac{(p-1)}{2}$ est pair. Ainsi $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$. Finalement :

[16] Ce théorème peut s'énoncer ainsi : « Si p est premier, alors $(p-1)\,! \equiv -1$ [p] ».

$$(p-1)\,! \equiv \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \; [p]$$

Or, d'après le théorème de Wilson, (p-1) ! ≡ -1[p]. Donc –1 est bien un carré dans $\frac{Z}{pZ}$.

Le lemme 1 est d'autant plus important qu'il est la source de la disjonction de cas apparaissant dans la démonstration du résultat auquel nous nous intéressons ici ; nous y reviendrons ultérieurement.

- lemme 2 : *Soit $N=a^2+b^2$ et l deux éléments de Σ tels que $l=x^2+y^2$ soit un diviseur premier de N. Alors $\frac{N}{l}$ est aussi un élément de **Σ**.* En voici une preuve:

L'idée de la preuve est que la division de N par l peut se faire à l'aide d'une multiplication astucieuse. Ecrivons :

$$Nl = (ax \pm by)^2 + (ay \pm bx)^2.$$

Et montrons que le signe peut être choisi de telle sorte que chacun des termes du second membre soit divisible par l^2 (c'est la multiplication « astucieuse »).

Si nous partons du dernier terme nous devons montrer que (ax – bx)(ay + bx) est divisible par l, on a :

$$\begin{aligned}(ay - bx)(ay+ bx) &= a^2y^2 - b^2 x^2\\ &= (a^2+b^2)y^2 - b^2 (x^2+y^2)\\ &= Ny^2 - b^2l \equiv 0 \bmod l.\end{aligned}$$

Le signe étant choisi correctement, la relation (1) montre que le premier terme du second membre est aussi divisible par l, on a donc :

$$ax \pm by = lu, \qquad ay \pm bx = lv.$$

Avec u et v dans Z, d'où :

$$N\, l^{-1}=u^2 + v^2.$$

(Hellegouarch, 1997)

Nous pouvons à présent débuter la démonstration du résultat concernant les sommes de carrés.

II.4.2 Une démonstration inspirée des idées de Fermat

Plutôt que de suivre la preuve utilisant les entiers de Gauss (anneau Z[i]), nous choisissons d'exposer une démonstration s'inspirant des idées de Fermat. Ce choix nous permettra en particulier d'illustrer à nouveau la méthode de descente infinie.

Nous débutons la démonstration :

- <u>(i)⇒(ii)</u> : montrons par <u>récurrence (récurrence forte)</u> sur $n \geq 1$ que si n est somme de deux carrés, il vérifie $v_p(n)$ pair pour tout p premier tel que $p \equiv 3[4]$:
  - C'est clair pour n=1.
  - Soit donc $n = a^2+b^2 > 1$. On suppose que le résultat à démontrer est vrai pour tout entier plus petit, strictement, que n. Montrons qu'il est encore vrai pour n : supposons que p premier congru à 3 modulo 4 divise n et montrons <u>par l'absurde</u> qu'alors p divise a ou b :
    - supposons donc que p divise n, tout en ne divisant ni a ni b. La première hypothèse nous donne l'égalité $a^2+b^2 \equiv 0$ [p] et la deuxième hypothèse, sachant que $\frac{Z}{pZ}$ est un corps (car p premier), a et en particulier b sont des éléments non nuls donc inversibles dans ce corps. Ainsi on peut écrire $(a.b^{-1})^2 \equiv -1[p]$. Donc (-1) serait un carré dans $\frac{Z}{pZ}$, ce qui contredirait le fait que $p \equiv 3[4]$.
    - Supposons alors par exemple que p divise a. Alors, p divise également b^2 et donc b. D'où p^2 divise n et $\frac{n}{p^2} = \left(\frac{a}{p}\right)^2 + \left(\frac{b}{p}\right)^2 \in \Sigma$. Par hypothèse de récurrence, v_p est pair et donc $v_p(n)$ aussi.

  Finalement on a établi l'implication voulue.

- <u>(ii)⇒(i)</u> : on suppose que $v_p(n)$ est pair pour tout $p \in$ P tel que $p \equiv 3[4]$. Il s'agit de montrer que $n \in \Sigma$. Pour cela, il va nous suffire de montrer que, pour tout p premier, $p^{v_p(n)} \in \Sigma$.

La justification de ce que nous venons d'écrire se situe dans l'association de deux propriétés (cf §II.3) : la stabilité de l'ensemble Σ par multiplication et le caractère factoriel de l'anneau Z ; la stabilité de Σ par multiplication peut s'exprimer par le résultat « Le produit de deux sommes de carrés est encore une somme de deux carrés d'entiers » (cf. §II.4.1). Nous sommes donc amenée à partitionner l'ensemble P de la façon suivante :

$$P = (P \cap 4Z+1) \cup \{2\} \cup (P \cap 4Z+3) ;$$

ce qui conduit à <u>distinguer trois cas au sein de l'ensemble des nombres premiers</u> :

- Premier cas (p=2) : on a $2\in \sum$ ($2=1^2+1^2$). Par stabilité de $\sum$ par multiplication, on a $2^{v_p(n)} \in \sum$.
- Deuxième cas (p≡3[4]) : par hypothèse, dans ce cas, $v_p(n)$ est pair. D'où :

$$p^{v_p(n)} = \left(p^{\frac{v_p(n)}{2}} \right)^2 + 0^2,$$

et ainsi $p^{v_p(n)} \in \sum$, pour tout p≡3[4].

- Troisième cas (p≡1[4]) : l'étude de ce cas revient à établir le résultat suivant : *Tout nombre premier de la forme 4n+1 est la somme de deux carrés.* Nous l'avons déjà rencontré lors de l'étude de la descente infinie ; Fermat l'exprimait ainsi :

> Tout nombre premier, qui surpasse de l'unité un multiple de 4, est composé de deux quarrés.
>
> (Fermat, 1659)[Tannery et Henry, 1894]

La dimension organisatrice d'une démonstration utilisant la descente infinie peut être présentée par Fermat lui-même :

> […] si un nombre premier pris à discrétion, qui surpasse de l'unité un multiple de 4, n'est point composé de deux quarrés, il y en aura un nombre premier de même nature, moindre que le donné, et ensuite un troisième encore moindre, etc., en descendant à l'infini jusques à ce que vous arriviez au nombre 5, qui est le moindre de tous ceux de cette nature, lequel il s'ensuivroit n'être pas composé de deux quarrés, ce qu'il est pourtant. D'où on doit inférer, par la déduction à l'impossible, que tous ceux de cette nature sont par conséquent composés de deux quarrés.
>
> (Fermat, 1659)[Tannery et Henry, 1894]

Dans un langage moderne, une preuve correspondante est la suivante (en s'inspirant de la preuve proposée par Hellegouarch (1997) :

Si p ≡ 1[4], on sait que –1 est un carré dans $\frac{Z}{pZ}$, donc il existe n entier naturel tel que :

$$n^2 + 1 \equiv 0 \ [p].$$

On peut choisir n tel que n < $\frac{p}{2}$. Ainsi il existe N' vérifiant 0 < **N' < p**, tel que :

$$n^2 + 1^2 = N'p$$

Supposons que p $\notin$ $\sum$; montrons en <u>raisonnant par l'absurde</u>, qu'il existe l premier (facteur de N'), n'appartenant pas à $\sum$, tel que l < p : supposons donc à présent que tous les facteurs premiers l de N' sont des éléments de $\sum$. D'après le lemme 2, $\frac{N}{l} = \frac{N'}{l}p$ est un élément de $\sum$. En recommençant autant fois que nécessaire on aboutira à p $\in$ $\sum$, ce qui contredira l'hypothèse p $\notin$ $\sum$. La conclusion de ce raisonnement par l'absurde est qu'il existe l < p, premier, qui n'est pas dans $\sum$.

Finalement, on peut construire **une suite strictement décroissante d'entiers (premiers) qui ne sont pas dans $\sum$** ; ce qui est impossible. Donc p $\in$ $\sum$.

Remarquons que si l'on voulait suivre les idées de Fermat jusqu'à la fin de son texte, il faudrait poursuivre en montrant qu'on arriverait à la contradiction suivante : 5 $\in$ $\sum$; cela n'est pas nécessaire, comme le précise Hellegouarch dans son ouvrage (Hellegouarch, 1997).

II.4.3 Un organigramme synthétisant la dimension organisatrice

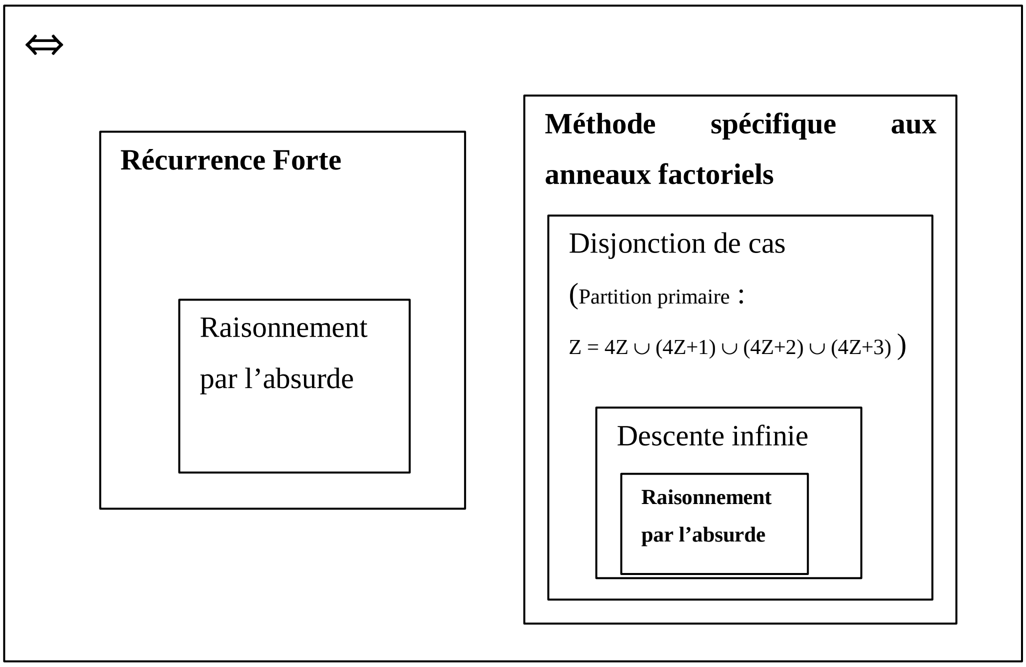
A l'aide de carrés, certains inclus dans d'autres, nous allons schématiser la dimension organisatrice de cette démonstration avec l'image de boîtes, certaines contenues dans d'autres.

Chaque boîte, symbolisée par un carré, représentera une méthode suivie au cours de la démonstration ; celle-ci pourra contenir d'autres boîtes ou (ou non exclusif…), être contenue elle-même. L'intitulé de la méthode apparaîtra à l'intérieur du carré correspondant, en haut.

Un tel emboîtement traduit la présence de sous-dimensions organisatrices au sein de la dimension organisatrice de la preuve analysée. Ainsi les constats :

- il s'agit <u>d'établir une équivalence</u> en montrant successivement les deux implications en jeu (la méthode associée sera intitulée « $\Leftrightarrow$ »),
- pour démontrer <u>l'une des implications,</u> on suit un <u>raisonnement par récurrence forte</u>, au sein duquel on est amené à faire un <u>raisonnement par l'absurde</u>,
- pour la <u>deuxième implication</u>, on adopte la <u>méthode propre aux anneaux factoriels</u>. Dans l'étape où il s'agit de montrer que le résultat est vrai pour tout nombre premier, apparaît une <u>disjonction de cas</u> basée sur la relation d'équivalence « congru modulo 4 » (La partition primaire sera indiquée dans l'organigramme qui suit). Et pour le cas p≡1[4], donc à l'intérieur même de cette disjonction de cas, on suit la méthode de descente infinie. Pour finir, lors de la descente infinie, on suit un raisonnement par l'absurde,

amènent à construire l'organigramme suivant :



La représentation de chaque méthode suivie au cours de la démonstration par une boîte offre l'avantage de mettre en évidence la dialectique entre les dimensions organisatrice et opératoire. En effet, elle permet de rappeler qu'à chaque sous-dimension organisatrice est associée une dimension opératoire : au sein de chaque méthode (dans chaque boîte…), on trouve tout un jeu opératoire, qui lui-même peut mettre en scène d'autre(s) méthode(s) pouvant être vue(s) comme de nouvelle(s) dimension(s) organisatrice(s).

Pour ce qui est de la dimension opératoire, nous y reviendrons dans le prochain chapitre que nous abordons à présent. Nous allons y dégager des pôles fondamentaux afin de préciser l'opératoire de l'arithmétique de même que nous l'avons fait dans ce chapitre pour la dimension organisatrice.

CHAPITRE 3 :

POLES OPERATOIRES FONDAMENTAUX EN ARITHMETIQUE

CHAPITRE 3 : **61**

POLES OPERATOIRES FONDAMENTAUX EN ARITHMETIQUE **61**

INTRODUCTION **62**

I. DIFFERENTES FORMES DE REPRESENTATION DES ENTIERS **64**

I.1 STRUCTURATION DES ENTIERS AUTOUR DES NOMBRES PREMIERS 64
I.1.1 Introduction *64*
I.1.2 Exemples de problèmes associés *65*
I.2.3 Niveau Technologique *67*
I.2.4 Une pensée organisatrice associée *67*
I.2 STRUCTURATION DES ENTIERS A L'AIDE DE RESEAUX REGULIERS 67
I.2.1 Introduction *67*
I.2.2 Exemples de problèmes associés *68*
I.2.3 Niveau Technologique *70*
I.2.4 Pensées organisatrices associées *71*

II. UTILISATION DE THEOREMES-CLEFS **72**

II.1 INTRODUCTION 72
II.2 EXEMPLES ASSOCIES AUX THEOREMES DE GAUSS ET BEZOUT 73
II.3 NIVEAU TECHNOLOGIQUE 75

III. L'OUTIL ALGEBRIQUE **76**

III.1 INTRODUCTION 76
III.2 FACTORISATION ET DIVISIBILITE 76
III.3 COMBINAISONS LINEAIRES D'ENTIERS 77
III.4 RETOUR A FERMAT ET FRENICLE 77

IV. ORDRES NATUREL ET DIVISIBILITE **79**

IV.1 INTRODUCTION 79
IV.2 NIVEAU TECHNOLOGIQUE ET ILLUSTRATION DES TECHNIQUES ASSOCIEES 80

INTRODUCTION

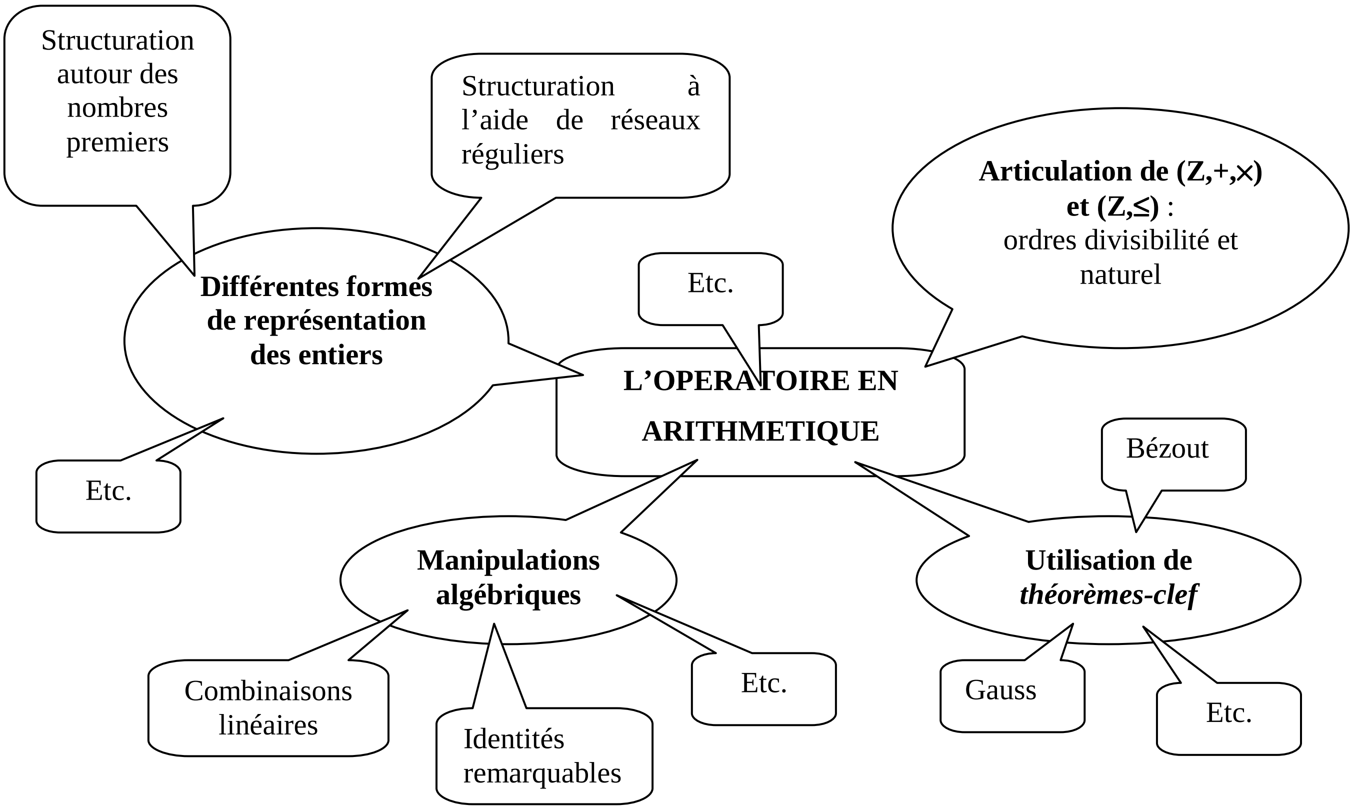
Ce troisième chapitre de la partie épistémologique concerne la dimension opératoire du raisonnement en arithmétique. De même que nous l'avons fait dans le précédent chapitre pour la dimension organisatrice, nous allons préciser ici les formes sous lesquelles « vit » la dimension opératoire en arithmétique. Dans cette démarche, le cours de Marc Rogalski (1999), dispensé à des étudiants préparant le CAPES de mathématiques, a constitué pour nous une aide précieuse.

Dans un ordre ne portant aucune hiérarchie, nous allons nous centrer successivement sur quatre pôles qui nous serviront à structurer l'analyse. Ce sont les suivants :

- **Les formes de représentations choisies pour les entiers** ; en effet, les techniques de calcul et les raisonnements qui sous-tendent l'opératoire dépendent, au moins partiellement, des formes choisies pour représenter les entiers. Nous nous centrerons dans ce chapitre sur deux types de représentations, d'une part celles liées au caractère factoriel de l'anneau Z et exploitant la possibilité de décomposer un entier en produit de puissances de nombres premiers, d'autre part celles exploitant les réseaux réguliers liés à la divisibilité[17].
- **L'utilisation de théorèmes-clefs** ; l'opératoire peut être en effet gouverné par moments par l'utilisation d'un *théorème-clef* de l'arithmétique, par exemple les théorèmes de Gauss et Bézout, et ceci constituera notre deuxième pôle.
- **Les manipulations de nature algébrique** ; nous nous centrerons dans ce troisième pôle sur l'analyse des manipulations algébriques en jeu dans le travail opératoire en arithmétique, en identifiant certains types de manipulations qui y jouent un rôle privilégié.
- Enfin, nous retenons pour quatrième pôle l'ensemble des traitements opératoires relevant de **l'articulation entre la structure d'anneau de $(Z,+,\times)$ et celle d'ensemble bien ordonné de $(Z,\leq)$ relative aux deux ordres divisibilité et ordre naturel.**

Cette structuration de l'analyse peut se synthétiser dans la vue d'ensemble suivante :

[17] Nous pourrions envisager aussi l'écriture spécifique à la numération décimale avec pour application la démarche d'approximation décimale d'un nombre rationnel (nous renvoyons au cours de Rogalski par exemple (Rogalski, 1999)).



La distinction que nous faisons entre ces quatre pôles ne signifie pas que nous les voyions comme quatre pôles indépendants d'analyse et nous mettrons en évidence au fil du chapitre un certain nombre d'interactions entre ces différents niveaux.

En nous inspirant de la notion de praxéologie issue de la théorie anthropologique (Chevallard, 1998) et la structuration qu'elle propose autour du quadruplet (type de tâche, technique, technologie, théorie), nous nous proposons, pour chacun des pôles retenus, après l'avoir introduit, de préciser les techniques opératoires associées en nous appuyant sur des exemples de problèmes dans la résolution desquels ce pôle est particulièrement en jeu, de préciser le(s) élément(s) technologique(s) correspondant(s) et d'indiquer, le cas échéant, une ou plusieurs pensées organisatrices en relation dialectique avec le pôle envisagé.

I. DIFFERENTES FORMES DE REPRESENTATION DES ENTIERS

L'opératoire rencontré en arithmétique n'est bien sûr pas indépendant des systèmes d'écriture utilisés pour représenter et manipuler les entiers. C'est à ces systèmes et à la façon dont ils façonnent le travail opératoire que nous nous intéressons dans ce pôle d'analyse. Plus particulièrement, nous allons considérer successivement deux systèmes d'écritures qui constitueront deux sous-pôles pour l'analyse.

I.1 Structuration des entiers autour des nombres premiers

I.1.1 Introduction

Le premier sous-pôle, comme annoncé au début du chapitre, est lié au caractère factoriel de l'anneau Z qui fait que tout entier n peut s'écrire sous la forme factorisée :

$$n=\prod_{p\in P} p^{v_p(n)}$$, avec P l'ensemble des nombres premiers,

Dans ce sous-pôle désigné par « structuration autour des nombres premiers », nous centrons l'analyse sur un travail opératoire sur les entiers mené à partir de cette écriture.

L'utilisation de la décomposition en nombres premiers permet d'interpréter aisément des notions de l'arithmétique telles les notions de diviseur, multiple, nombres premiers entre eux, *PGCD* et PPCM. En effet :

- les diviseurs positifs de n sont de la forme $\prod_{p\in P} p^{\alpha_p}$ avec $0 \leq \alpha_p \leq v_p(n)$ pour tout p élément de P,
- les multiples positifs de n sont de la forme $\prod_{p\in P} p^{\alpha_p}$ avec $\alpha_p \geq v_p(n)$ pour tout p élément de P,
- n et m deux entiers naturels sont premiers entre eux si et seulement si :

$$\forall p\in P\ (v_p(n)\neq 0 \Rightarrow v_p(m)=0)$$

(aucun facteur premier de n ne figure dans la décomposition de m),

- $PGCD$(n,m)= $\prod_{p \in P} p^{\min(v_P(n), v_P(m))}$,
- PPCM(n,m)=$\prod_{p \in P} p^{\max(v_P(n), v_P(m))}$.

I.1.2 Exemples de problèmes associés

L'exploitation du caractère factoriel de Z opérationalisée par l'emploi de l'écriture factorisée des entiers est susceptible d'intervenir dans la résolution de nombreux problèmes d'arithmétique, faisant intervenir des notions que cette écriture permet d'exprimer commodément. Citons-en quelques-unes :

- des problèmes portant sur les diviseurs ou multiples d'un nombre dont on connaît la factorisation en nombres premiers : déterminer les diviseurs d'un tel nombre, leur nombre ainsi que leur somme, ou ses multiples, reconnaître un carré (un cube,…), …
- des problèmes mettant en jeu les notions de *PGCD* ou de primarité relative, et ne faisant intervenir que des produits ou des quotients entiers. C'est le cas par exemple du théorème fondamental en jeu dans la preuve de la non-existence de triangles rectangles en nombres dont l'aire soit un carré (cf. chapitre 1) : *si le produit de deux nombres entiers a et b premiers entre eux est un carré, il en est de même de ces deux nombres.* On pose ab=c² et on écrit la décomposition en facteurs premiers de c comme suit : $c=p_1^{\alpha 1}\ p_2^{\alpha 2}\ \dots p_n^{\alpha n}$. Dans la décomposition en facteurs premiers de c², l'exposant de chaque facteur premier est pair. a et b étant premiers entre eux, chaque nombre de la forme $p_i^{2\alpha i}$ ($i \in I=\{0,\dots n\}$) est un diviseur de a ou, de manière exclusive, de b. On en déduit que a et b sont donc des carrés,
- des problèmes de rationalité comme celui consistant à démontrer le résultat suivant : *Soit a et b deux entiers naturels non nuls, premiers entre eux,* $\sqrt{\frac{a}{b}}$ *est rationnel si et seulement si a et b sont des carrés*. La condition « a et b sont des carrés » est clairement suffisante ; montrons qu'elle est nécessaire : supposons donc que $\sqrt{\frac{a}{b}}$ est rationnel, il existe alors deux entiers naturels non nuls x et y tels que $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{x}{y}$. D'où : ay²=bx² (*). Supposons par l'absurde que a ne soit pas un carré, il existe p premier tel que $v_p(a)$ soit impair. a et b étant premiers entre eux, $v_p(b)$ est nul. Ainsi, on obtient à partir de (*) $v_p(a)+2v_p(y)=2v_p(x)$, D'où une contradiction ($1\equiv 0$ [2]).

  Précisons qu'une de nos expérimentations en classe de terminale S a été construite à partir de ce résultat.

Soulignons que les deux dernières preuves données diffèrent relativement à l'emploi de la notation de la valuation p-adique (on pourrait réécrire l'un ou l'autre pour les uniformiser à ce niveau). Cela permet de pointer le confort opératoire qu'offre l'emploi de cet ostensif.

L'écriture sous forme factorisée conduit à une autre écriture : tout entier n supérieur ou égal à 1 s'écrit de façon unique comme le produit d'une puissance de 2 par un nombre impair. Cette écriture peut être utilisée par exemple pour démontrer que *la somme de p+1 entiers consécutifs à partir de n, pour n entier naturel non nul et p >1, permet d'atteindre tous les entiers sauf les puissances de 2*. En voici une démonstration :

Soit S = n+(n+1)+…+(n+p), on a $S = \frac{(2n+p)(p+1)}{2}$. De plus, il existe deux entiers k et k' tels que S s'écrit $2^k \times k'$. Montrons que S a au moins un diviseur impair en raisonnant par disjonction de cas modulo 2 :

- Si p est pair :

$$S = \underbrace{\left(n + \frac{p}{2}\right)}_{\in N} \times \underbrace{(p+1)}_{impair}$$

- Si p est impair :

$$S = \underbrace{\left(\frac{p+1}{2}\right)}_{\in N} \times \underbrace{(2n+p)}_{impair}$$

Ainsi, pour tout k : $S \neq 2^k$.

Réciproquement, supposons qu'un nombre S s'écrit $2^k \times k'$ avec k'>1 impair. On cherche à déterminer n et p tels que $\frac{(2n+p)(p+1)}{2} = 2^k \times k'$. Il suffit en fait, comme nous allons le montrer, d'identifier ces deux factorisations pour trouver un des couples (n,p) solution.

Posons par exemple p+1=k' ; p=k' – 1 est pair. On obtient :

$$n = 2^k - \left(\frac{k'-1}{2}\right).$$

Ces valeurs conviennent si n est positif strict soit si $2^k > \left(\frac{k'-1}{2}\right)$. Si ce n'est pas le cas, posons cette fois : $\left(\frac{p+1}{2}\right) = 2^k$ et 2n+p=k'. On obtient alors :

$$2n = k' - p = k' - 2^{k+1} + 1.$$

Ce qui convient cette fois si $2^{k+1} < k'+1$. Finalement on a bien le résultat annoncé puisque l'une au moins des deux inégalités est vérifiée.

Pour terminer ce paragraphe, nous voudrions souligner que, comme l'écrit Rogalski :

> Les problèmes d'arithmétique qu'on peut résoudre en utilisant le théorème de factorisation sont en général uniquement des problèmes de type multiplicatif, où n'interviennent que des produits ou des quotients entiers. Les problèmes où interviennent des sommes ou des différences sont en général impossibles à résoudre par ce théorème, même si la considération de facteurs premiers peut y être une aide.
>
> [Rogalski, 1999]

I.2.3 Niveau Technologique

L'élément technologique en jeu ici est le *théorème fondamental de l'arithmétique*, c'est-à-dire l'existence unique, pour tout entier (autres que 0, 1 et –1), d'une décomposition en produit de nombres premiers ; à travers son caractère factoriel, c'est le pôle algébrique de Z qui est concerné. Comme Perrin le souligne au sujet de la définition d'un anneau (intègre) factoriel :

> Contrairement à ce que l'on pourrait penser, le point crucial de cette définition n'est pas l'existence d'une décomposition, qui est le plus souvent banale, mais son unicité.
>
> [Perrin, 1997].

I.2.4 Une pensée organisatrice associée

Nous associons en priorité à ce pôle opératoire la pensée organisatrice *jeu d'extension-réduction* spécifique aux anneaux factoriels, identifiée lors de l'étude des pensées organisatrices fondamentales en arithmétique (cf. chapitre 2). Rappelons que celle-ci est mise en œuvre lorsqu'il s'agit de montrer qu'une propriété est vraie pour tout élément de l'anneau Z : si l'on montre que, d'une part, la propriété est « multiplicative » (c'est-à-dire que si elle vraie pour deux éléments de Z alors elle est encore vraie pour leur produit) et que, d'autre part, la propriété est vraie pour tout nombre premier, alors elle est vraie pour tout entier.

A noter que l'ensemble des problèmes associés à cette méthode vient se greffer sur celui des problèmes où l'outil opératoire étudié ici est en jeu.

I.2 Structuration des entiers à l'aide de réseaux réguliers

I.2.1 Introduction

Ce deuxième sous-pôle se définit, comme le premier, en référence à un système d'écriture des entiers naturels. Comme annoncé au début du chapitre, ici ce sont les réseaux réguliers liés à la divisibilité qui sont concernés. L'écriture dépend d'un paramètre, un entier naturel non nul que l'on notera b. Le paramètre b étant donné, tout entier n peut s'écrire de façon unique, sous une des formes suivantes :

- $n \equiv 0[b]$, $n \equiv 1[b]$, …, $n \equiv b-1[b]$, si on utilise la notation de la congruence modulo b :

- n=bk, n=bk+1, …, n=bk+(b-1), k étant un entier, si l'on revient à la définition de cette congruence.

Du point de vue de la composante opératoire, nous avons ici deux systèmes à part entière : choisir une écriture où intervient l'entier k et travailler à l'aide des congruences induisent des traitements opératoires *a priori* spécifiques. D'un point de vue didactique, il nous semble primordial de conserver cette distinction, et ce d'autant plus que l'enseignement, au niveau où nous allons le considérer, manifeste souvent une certaine réserve vis-à-vis de l'usage de la notation congruence, craignant qu'elle ne favorise les dérapages formels liés à un calcul aveugle. Néanmoins, nous préférerons dans le cadre de cette étude épistémologique privilégier cette notation, ce qui nous permettra de montrer son efficacité opératoire ou, en d'autres termes, la forte valence pragmatique de cet ostensif (Bosch & Chevallard, 1998).

I.2.2 Exemples de problèmes associés

Nous nous centrerons dans ce paragraphe sur trois champs privilégiés d'intervention des congruences : le calcul modulo n, les problèmes de divisibilité, la résolution de certaines équations diophantiennes.

<u>Le calcul modulo n</u>

Comme Rogalski l'écrit dans son cours :

> La théorie des congruences – qui n'est en fait qu'une pratique de calcul raisonnée – a pour but de faire des calculs sur des entiers « à des multiples près » d'un certain entier fixé. Par exemple, si on cherche le jour de la semaine que sera le 17 janvier 2003, il suffit de faire des calculs à un multiple de 7 près, puisque le même jour de la semaine se reproduit tous les 7 jours. Cela permet de ramener de grands nombres à des nombres bien plus raisonnables, en leur soustrayant de grands multiples du nombre fixé, 7 dans notre exemple.
>
> [Rogalski, 1999]

Mais la puissance du calcul modulo n ne doit pas faire oublier la spécificité de la structure des objets $\frac{Z}{nZ}$, et en particulier le fait que ces anneaux ne sont des corps que si et seulement si n est premier. Si n n'est pas premier, il y a dans $\frac{Z}{nZ}$ des diviseurs de 0. Dans ce cas, les calculs dans $\frac{Z}{nZ}$ ne vérifient pas une propriété importante des calculs dans Z : on ne peut pas toujours simplifier par un nombre non nul. Plus précisément, ax=ay, avec a≠0, n'entraîne pas nécessairement x=y. Par exemple, dans $\frac{Z}{6Z}$, $3\times2=3\times4$, mais $2\neq4$ (on calcule modulo 6).

Dans ce calcul modulo n, le petit théorème de Fermat joue un rôle particulier, en permettant de réduire fortement les puissances qui peuvent intervenir dans des calculs de congruence. Nous reviendrons sur ce théorème dans la partie suivante concernant le pôle *Utilisation de théorèmes-clef* (cf. §II).

Problèmes de divisibilité

D'une manière générale, les congruences constituent un outil performant pour aborder des questions de divisibilité. Nous en donnons ici un exemple qui apparaît en annexe du rapport sur le calcul de la Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques[18]. Pour tout n entier, le nombre $F_n = 2^{2^n}+1$ est appelé *nième nombre de Fermat* ; il s'agit de montrer que le nombre F_5 n'est pas premier contrairement à ce que pensait Fermat[19] :

> […] Les deux décompositions suivantes de 641 : 641=640+1=625+16 conduisent aux deux relations de congruence :
> $5\times 2^7 \equiv -1$ (641) et $5^4 \equiv -2^4$ (641).
> On en déduit que : $5^4\times 2^{28} \equiv 1$ (641) et donc que : $2^{32} \equiv -1$ (641). F_5 est bien divisible par 641.
> [Rapport sur le Calcul, Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques]

L'efficacité de l'outil des congruences apparaît de manière encore plus évidente si l'on compare cette solution avec une solution qui ne l'utilise pas, comme c'est fait dans cette même annexe :

> $2^{32}=16\times 2^{28}$, or $5^4 = 625 = 641 - 16$
> d'où $2^{32} = (641 - 5^4)\times 2^{28} = 641\times 2^{28} - (5\times 2^7)^4 = 641\times 2^{28} - (641 - 1)^4$
> En décomposant $(641 - 1)^4$ en produit de deux carrés et en développant, on finit par arriver à
> $2^{32}=641q - 1$ c'est-à-dire au fait que F_5 est divisible par 641.
> [Rapport sur le Calcul, Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques]

Soulignons que l'outil des congruences permet de mettre au point des critères simples de divisibilité tels les critères de divisibilité par 3, par 9, par 11…

Equations diophantiennes

18 Disponible sur le site informatique de la Société Mathématique Française : http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/RapportCalcul

19 C'est Euler qui en 1732 démontra ce résultat en montrant que ce nombre est divisible par 641.

Nous proposons, pour illustrer cet aspect, le problème suivant extrait d'un sujet de contrôle composé par D.Perrin dans le cadre de la licence pluridisciplinaire de l'université de ParisXI (année 1999-2000) : *Soit l'équation $7x^2 - 15y^2 = a$ pour a entier, $1 \leq a \leq 20$; préciser pour quelles valeurs de a l'équation a des solutions dans Z.*

Voici la solution proposée par Perrin : Si on a une solution x, y de l'équation $7x^2 - 15y^2 = a$, elle vérifie $7x^2 \equiv a \pmod 3$, ou encore $x^2 \equiv a \pmod 3$, de sorte que a doit être un carré modulo 3. Comme 2 n'est pas un carré modulo 3 cela montre que l'équation n'a pas de solution pour a=2,5,8,11,14,17 et 20.

De même, si on a une solution de l'équation, on a $2x^2 \equiv a \pmod 5$. Or, modulo 5 les carrés sont 0, 1 et –1, donc $2x^2$ vaut 0, 2 ou –2. Cela permet de montrer que l'équation n'a pas de solution lorsque a est congru à ± 1 modulo 5 donc pour a=1,4,6,9,11,14,16 et 19.

De même si on a une solution, on a $-y^2 \equiv a \pmod 7$, donc – a est un carré modulo 7. Comme les carrés modulo 7 sont 0, 1, 2, –3 cela montre que l'équation n'a pas de solution si a est congru à 1, 2 ou – 3 modulo 7 donc pour a=1,2,4,8,9,11,15,16 et 18.

Enfin, si on a une solution, on a $-x^2 + y^2 \equiv a \pmod 4$. Comme les carrés modulo 4 sont 0 et 1, cela montre que a est congru à 0, 1 ou – 1. L'équation n'a donc pas de solution lorsque a est congru à 2 modulo 4, c'est-à-dire pour a=2,6,10,14,18. En consultant la liste on voit qu'il reste une incertitude pour a=3,7,12,13. Dans tous ces cas l'équation admet des solutions :

$7 \times 3^2 - 15 \times 2^2 = 63 - 60 = 3$, $7 \times 1^2 - 15 \times 0^2 = 7$, $7 \times 6^2 - 15 \times 4^2 = 252 - 240 = 12$ et

$7 \times 2^2 - 15 \times 1^2 = 13$.

La pensée organisatrice sous-jacente à cet emploi des congruences est explicitée dans la suite (cf. §I.2.4).

I.2.3 Niveau Technologique

La base technologique de ces écritures est le *théorème de la division euclidienne* ; c'est le caractère euclidien de l'anneau Z qui est directement concerné ici.

L'idée de *réseau régulier* intervient à travers l'ensemble périodique des multiples de l'entier b et les ensembles qui sont obtenus en le « translatant » (initialement il y a l'idée géométrique de réseau comme le souligne Rogalski). Cette notion est d'ailleurs à rattacher à une vision plus générale de la notion de réseau :

> On peut concevoir un réseau comme une suite strictement croissante $f : Z \to Z$ ou bien $f : N \to N$ (on convient dans ce dernier cas que f(0)=0). On s'en sert en disant qu'un entier n se trouve dans un intervalle [f(q), f(q+1)[et un seul.
>
> [Rogalski, 1999]

I.2.4 Pensées organisatrices associées

Le *raisonnement par disjonction de cas* est directement concerné par ce pôle. En effet, la partition primaire en jeu est alors la suivante :

$$Z=bZ\cup(bZ+1)\cup...\cup(bZ+(n-1))$$

Apparaissent explicitement les b réseaux réguliers de période b. Rappelons que ce type de pensée organisatrice n'est pas relatif exclusivement à l'ordre divisibilité. Il existe en effet une deuxième grande catégorie de partitions primaires construites à partir de l'ordre naturel. Ici, nous sommes dans le cas où c'est l'aspect algébrique de Z qui est concerné, puisque c'est la *relation de congruence modulo b* qui est à la base de la partition primaire.

Rogalski associe à ce pôle le *principe des tiroirs* bien connu en combinatoire :

Si on a n+1 chaussettes à ranger dans n tiroirs, l'un d'eux au moins contient au moins 2 chaussettes ; on peut généraliser avec p chaussettes et r tiroirs … […] On l'applique souvent en prenant pour tiroirs les p classes de congruence modulo p. Exemple : parmi 7 nombres distincts, on peut toujours en trouver 3 dont la somme est divisible par 3 [on range les sept nombres dans les trois classes de congruence modulo 3 ; l'une contient au moins 3 des nombres, a, b, c, qui ont donc le même reste r modulo 3 ; leur somme vaut donc 3r (mod 3), c.a.d. 0 (mod 3)]. [Rogalski, 1999]

Ce *principe*, spécifique aux entiers, a été mis en valeur par Lejeune-Dirichlet (1805-1859) et peut être utilisé dans différentes branches des mathématiques. Voici un exemple de son utilisation en arithmétique, emprunté à Casiro et Cohen (1998) : *on se donne un ensemble F de n+1 entiers distincts inférieurs ou égaux à 2n* et l'on va établir *qu'alors il en existe au moins deux tels que le premier divise le second*. En effet : tout entier naturel m peut s'écrire de manière unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 et d'un nombre impair : $m=2^p(2q+1)$ avec p et q entiers naturels. Les (n+1) entiers de F, notés m_k, prennent la forme $2^{p_k}(2q_k+1)$. Les (n+1) entiers impairs $(2q_k+1)$ appartiennent à l'ensemble {1, 2, …, 2n-1} puisque $1\leq m_k\leq 2n$. D'après le principe de Dirichlet, deux de ces nombres impairs sont égaux. Pour ces deux entiers m_s et m_t on a : $m_s=2^{p_s}(2q+1)$ et $m_t=2^{p_t}(2q+1)$. Si $p_s<p_t$, m_s divise m_t, sinon, m_t divise m_s. A noter que ce résultat peut se démontrer aussi par récurrence.

Nous identifions enfin une troisième pensée organisatrice associée à ce pôle : il s'agit de « plonger » le travail opératoire dans un des anneaux $\frac{Z}{nZ}$ (structure de corps si n est premier), voire même successivement dans plusieurs, afin d'en extraire diverses informations. Suivre cette pensée peut être particulièrement fructueux pour établir qu'une équation diophantienne n'a pas de solution ou limiter la recherche de ces dernières. L'exemple de D. Perrin cité ci-dessus en est une claire illustration.

II. UTILISATION DE THEOREMES-CLEFS

II.1 Introduction

Comme nous l'annoncions en introduction, le travail opératoire peut être gouverné par l'utilisation de théorèmes d'arithmétique ; les théorèmes sont considérés ici comme des « briques d'opératoire encapsulé ».

Nous choisissons de porter tout spécialement notre attention sur les théorèmes de Gauss et Bézout pour les deux raisons principales suivantes :

- une raison de nature épistémologique : ces deux résultats jouent un rôle fondamental au sein de la théorie, comme nous l'expliciterons en abordant le niveau technologique du pôle opératoire envisagé ici. Nous ne nous limitons pas ici aux applications (plus ou moins) directes de ces deux théorèmes en considérant des théorèmes qui en sont des conséquences tels le petit théorème de Fermat et le théorème de Wilson (on pourrait d'ailleurs imaginer une structuration du pôle opératoire envisagé basée sur une (des) arborescence(s) construite(s) à partir d'une hiérarchie technologique),
- la deuxième raison est d'origine didactique. ces deux théorèmes occupent une place privilégiée dans le programme officiel de l'enseignement de spécialité de la classe de terminale S. Ce choix s'inscrit donc dans notre perspective d'étude de l'écologie possible dans l'institution scolaire des potentialités offertes au raisonnement par l'arithmétique.

Rappelons les énoncés des deux théorèmes envisagés :

- Le théorème de Gauss : *Si un entier divise le produit de deux autres entiers et est premier avec l'un, alors il divise l'autre.* Comme cela est démontré dans un des articles de Henry (2001), une forme équivalente est la suivante (appelée théorème d'Euclide dans son article) : « Soient (a,b) et (c,d) deux couples d'entiers non nuls en même rapport (ad=bc) ; si a et b sont premiers entre eux, alors c et d sont équimultiples de a et b (i.e. il existe un entier q tel que c=aq et d=bq). ».
- Le théorème de Bézout peut s'énoncer de plusieurs façons selon le niveau de conceptualisation[20] où l'on se situe :

[20]Au sens de Robert (1997).

- Dans le cours de Rogalski, destiné rappelons-le à des étudiants préparant le CAPES de mathématiques, ce théorème explicite la structure de l'ensemble des diviseurs communs à deux entiers :

> L'ensemble D des diviseurs communs de deux nombres a et b non tous deux nuls est exactement l'ensemble des diviseurs de $d=a\frown b$[21]. De plus, l'ensemble $\Im$(a,b) des combinaisons linéaires de a et b à coefficients dans Z est exactement le réseau régulier dZ des multiples de d. En particulier, il existe deux entiers relatifs u et v tels que d=ua+vb.
> [Rogalski, 1999]

- Dans les manuels de la classe de terminale S, on trouvera plutôt des formulations de ce type :

> Soit a et b deux entiers relatifs non nuls, et D leur *PGCD*. Il existe deux entiers u et v tels que au+bv=D (en particulier si a et b sont premiers entre eux au+bv=1). C'est l'égalité de Bézout. De plus, tout diviseur commun à a et b divise leur *PGCD* D.
> [Collection Terracher des éditions Hachette Education].

II.2 Exemples associés aux théorèmes de Gauss et Bézout

Que ce soit dans le cadre d'une application (plus ou moins) directe ou dans l'établissement d'autres théorèmes, les théorèmes de Gauss et Bézout sont susceptibles d'intervenir pour le même objet. En conséquence, nous ne scindons pas notre présentation en mettant d'un côté ce qui concerne l'un de ces théorèmes-clef et d'un autre côté ce qui relève de l'autre.

Nous proposons cinq utilisations : deux applications (plus ou moins) directes et trois théorèmes classiques qui découlent des théorèmes-clef envisagés ici.

<u>Equations linéaires diophantiennes</u>

Sont concernées ici les équations du premier degré à deux inconnues ax+by=c (E) où a, b et c sont des entiers et où l'on cherche les solutions dans Z ; on note (E_0) l'équation dite homogène ax+by=0. Nous reprenons l'un des théorèmes du cours de Rogalski :

1) *L'équation homogène (E_0) a toujours une infinité de solutions. Si l'équation (E) a des solutions, pour trouver toutes les solutions de (E), il suffit d'ajouter à une solution particulière de cette équation n'importe quelle solution de (E_0).*
2) *L'équation (E) a des solutions si et seulement si PGCD(a,b) divise c. Si elle a des solutions, elle en a une infinité.*
3) *Si d=PGCD(a,b) divise c, on détermine u et v vérifiant au+bv=d, et une solution particulière de (E) est $x_0=\frac{c}{d}u$, $y_0=\frac{c}{d}v$. On trouve toutes les solutions de (E) en ajoutant à (x_0,y_0) la*

[21] Notation employée pour désigner le PGCD des entiers a et b.

« solution générale » (kb', -ka') de l'équation homogène modifiée (E'0) obtenue en divisant les coefficients de (E0) par d ($a'=\frac{a}{d}$, $b'=\frac{b}{d}$).

Les théorèmes de Bézout et Gauss sont au cœur de la démonstration de ce théorème.

Etude de rationalité

Le théorème de Gauss peut être mobilisé pour l'étude de problèmes de rationalité. Intéressons-nous par exemple à la question suivante[22] :

Quels sont les entiers n tels que $\sqrt{n}$ soit rationnel ?

Montrons préalablement que si r est une racine rationnelle du polynôme $P(x)=x^2+ax+b$, alors r est entier : en écrivant r sous sa forme irréductible $\frac{p}{q}$ on obtient $p^2+apq+bq^2=0$. q divise $apq+bq^2$ donc divise p^2 et étant premier avec p, par application du théorème de Gauss, q est égal à 1 ou –1 puisqu'il doit diviser p ! En utilisant ce résultat avec $r=\sqrt{n}$ et $P(x)=x^2-n$ on arrive à la conclusion suivante : $\sqrt{n}$ est rationnel si et seulement si n est le carré d'un entier.

Ce résultat est un cas particulier de celui mentionné dans le cadre de l'étude de la structuration des entiers autour des nombres premiers ; le théorème de Gauss permet d'opérationaliser autrement le ressort en jeu (caractère factoriel de l'anneau Z).

Le petit théorème de Fermat

Le petit théorème de Fermat peut être énoncé de la façon suivante *: soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p alors $a^{p-1}-1$ est divisible par p.* Il est équivalent de montrer que $a^p \equiv a$ [p] car $a^p-1=a(a^{p-1}-1)$ et, d'après le théorème de Gauss, le produit $a(a^{p-1}-1)$ est divisible par p si et seulement si $(a^{p-1}-1)$ l'est du fait que a et p sont supposés premiers entre eux.

Ce théorème est utile pour simplifier les calculs de congruence (réduction des puissances) et intervient de façon essentielle en cryptographie (Demazure, 1997).

Le théorème d'Euler

Soit φ la *fonction indicatrice d'Euler* (φ(n) est le nombre d'entiers naturels inférieurs à n et premiers avec n), ce théorème s'énonce ainsi : *pour tout a premier avec n, on a $a^{\varphi(n)} \equiv 1$ modulo n.* Avec le cas particulier de n premier, on retrouve le petit théorème de Fermat.

Le théorème de Wilson

[22] C'est autour de ce problème que nous avons construit l'expérimentation menée en classe de terminale S (cf. Chapitre 8).

Un entier naturel p est premier si et seulement si $(p-1)!\equiv -1$ modulo p.

Contrairement au petit théorème de Fermat, le théorème de Wilson donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre soit premier. Cependant, d'un point de vue algorithmique, cela ne fournit par pour autant un test efficace de primalité car il n'existe aucune méthode rapide pour déterminer n!. Une application est l'étude de la primalité de n!+1.

II.3 Niveau technologique

Deux organisations technologiques existent selon que l'on « va du caractère factoriel vers le caractère euclidien » de l'anneau Z ou dans le « sens » inverse[23]. Dans le premier cas, le théorème de Gauss ne peut se démontrer à partir du théorème de Bézout qui lui-même ne peut être démontré à partir du théorème de la division euclidienne, comme cela est habituellement fait par les auteurs des manuels scolaires. Selon le choix qui est fait entre ces deux options, le niveau technologique est assujetti à certaines contraintes en termes de niveau de conceptualisation. Il est d'ailleurs intéressant de donner le point de vue de Perrin qui, pour son cours de licence pluridisciplinaire (université Paris XI), opte pour le second choix :

> S'agissant d'une approche élémentaire, je préfère pour ma part l'ordre qui s'appuie sur la division euclidienne (comme celui de mon cours de licence) pour plein de raisons :
> 1) La démonstration de l'existence de la division euclidienne est facile avec le « bon ordre ».
> 2) C'est quelque chose qui est connu depuis l'école primaire.
> 3) C'est la propriété la plus forte sur le plan des maths (car euclidien implique principal implique factoriel, aucune des réciproques n'étant vraie) .
> 4) Ca donne un algorithme très simple de calcul du *PGCD* et des coefficients de Bézout.
> [Perrin (Correspondance par voie électronique)]

Dans le premier cas, le théorème de Bézout se démontre en se basant directement sur le caractère principal de Z à travers la notion d'idéal.

Pour le théorème de Gauss, nous proposons la preuve donnée ci-après. Cette dernière utilise les éléments suivants :

- [1] Toute partie finie non vide d'entiers naturels a un plus grand élément (ordre naturel).
- [2] Tout entier n admet au moins 1 et lui-même (réflexivité) comme diviseurs. De plus, son nombre total de diviseurs est fini car tout diviseur d de n est inférieur ou égal à n .
- [3] Soit a et b deux entiers non tous deux nuls. L'ensemble D(a,b) admet un plus grand élément noté *PGCD*(a,b). C'est aussi le plus grand pour l'ordre divisibilité.

  Démonstration : D(a,b) est non vide car 1 divise à la fois a et b. De plus, D(a,b) est fini car d'après [2] l'ensemble des diviseurs de a est fini ainsi que celui de b. D'après [1] D(a,b) admet un plus grand élément. Pour la seconde partie de l'énoncé nous renvoyons à §IV.

[23] A ce type d'analyse mathématique nous associons l'article de Samuel intitulé *Sur l'organisation d'un cours d'arithmétique* (Samuel, 1967).

- [4] Soit a et b deux entiers non tous deux nuls et k un entier non nul. *PGCD*(k×a,k×b)=k×*PGCD*(a,b)

  Démonstration : On note d' le *PGCD* de ka et kb et d le *PGCD* de a et b. d divise a donc kd divise ka ; de même kd divise kb donc kd $\in$ D(ka,kab). D'après [3] kd divise d' donc il existe q entier tel que d'=qkd. Or d' divise ka et kb donc qkd divise ka et kb ie qd$\in$D(a,b). Comme d est le plus grand on a q=1.

Voici la démonstration annoncée : a et b sont premiers entre eux donc par définition *PGCD*(a,b)=1. D'après [4] on a donc *PGCD*(ac,bc)=c. Or a divise ac et a divise bc par hypothèse donc, d'après [3] a divise *PGCD*(ac,bc), c'est-à-dire c. Ce que nous voulions démontrer.

III. L'OUTIL ALGEBRIQUE

III.1 Introduction

On ne peut entrer dans la démarche d'étudier ce qui, d'un point de vue épistémologique, est susceptible de vivre au sein de la composante opératoire de l'arithmétique sans penser à l'outil algébrique. L'explicitation de ce pôle nous permet de nous centrer sur l'ensemble des manipulations algébriques pouvant être rencontrées dans le travail opératoire de l'arithmétique.

Le jeu de transformation des écritures algébriques est fondamental en arithmétique, tout particulièrement pour les problèmes de divisibilité[24] et le pôle *Structuration autour des nombres premiers* est directement concerné. Nous nous centrons ici plus particulièrement sur la factorisation ainsi que sur l'utilisation de combinaisons linéaires d'entiers. Nous reviendrons ensuite sur les preuves de Fermat et Frenicle étudiées lors du chapitre 1.

III.2 Factorisation et divisibilité

Factoriser intervient naturellement de façon essentielle dans les problèmes de divisibilité. Reprenons deux exemples du cours de Rogalski :

> Si $n \geq 0$, $n^7 - n$ est divisible par 6 [on factorise en utilisant les identités remarquables :
> $n^7 - n=(n-1)n(n+1)(n^2+n+1)(n^2 - n +1)$].
> Si $q \geq 1$, $q(q+1)(q+2)(q+3)$ n'est jamais un carré [on rapproche les termes symétriques q et q+3, d'une part, et q+1 et q+2 de l'autre : on obtient ainsi $(q^2+3q)(q^2+3q+2)$, qui s'écrit
> $(q^2+3q+1 - 1)(q^2+3q+1+1) = (q^2+3q+1)^2 - 1$, et $N^2 - 1$ ne peut être un carré si $N\geq2$…].
> [Rogalski, 1999]

Ces exemples de factorisation sont proposés à des étudiants de DEUG mais on en trouve bien sûr également dans le travail arithmétique développé en terminale, comme le montrent les deux

[24] Nous avons déjà l'exemple présenté en §I.2.2 sur les nombres de Fermat.

exemples suivants extraits de sujets de baccalauréat (cf. chapitre 5) ; dans le premier, on retrouve l'une des identités utilisées dans le premier exemple donné dans l'extrait précédent :

> […]
> [Soit n entier naturel]
> Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$.
> (On rappelle l'égalité $a^n - 1 = (a - l)(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a^0)$, valable pour tout entier naturel n non nul).
> [PONDICHERY / MAI 2001]

> Soit n un entier naturel non nul.
> On considère les nombres a et b tels que:
> $$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 \qquad et \qquad b = 2n^2 + n.$$
> 1. Montrer que 2n + 1 divise a et b.
> 2. Un élève affirme que le PGCD de a et b est 2n + 1.
> Son affirmation est-elle vraie ou fausse? *(La réponse sera justifiée.)*
> [AMERIQUE SUD / NOVEMBRE 2001]

On notera que dans les deux cas, le travail de factorisation est fortement guidé : dans le premier cas, la factorisation à mettre en jeu est donnée, dans le second cas, ce travail est directement induit par une question intermédiaire.

III.3 Combinaisons linéaires d'entiers

Les combinaisons linéaires sont un objet privilégié dans le travail opératoire en arithmétique car la relation de divisibilité est conservée par combinaisons linéaires, ce qui est intimement lié au théorème de Bézout (cf. §II.1).

Cette conservation est en particulier très efficace pour les problèmes généraux de PGCD comme le souligne Rogalski qui explicite la méthode associée :

> Pour déterminer $x \cap y$, les nombres x et y étant des fonctions de a et b, on écrit qu'un diviseur d de x et y divise diverses expressions qu'on fabrique avec a et b pour arriver à des nombres dont on connaît le pgcd δ ; alors d divisera δ ; et on regarde la réciproque…
> [Rogalski, 1999]

On peut appliquer cette méthode pour démontrer par exemple que *la somme et le produit de deux entiers premiers entre eux sont deux entiers qui sont aussi premiers entre eux.*

III.4 Retour à Fermat et Frenicle

Nous ne pouvons traiter le pôle algébrique sans souligner l'absence de l'emploi du symbolisme algébrique dans les textes de démonstration de Fermat et Frenicle[25]. Les conditions générales des études sur les nombres au cours du XVIIème siècle sont à préciser même succinctement

[25] Goldstein précise elle-même : « La transcription algébrique est issue d'un travail qu'un entraînement suivi dès l'école secondaire invite désormais à sous-estimer. ».

ainsi que les positions des deux mathématiciens auxquels nous nous intéressons ; nous citons Goldstein à ce sujet :

> […] Nous avons repéré autour de Mersenne au moins deux groupes. Les arithméticiens, d'une part, s'intéressent surtout aux nombres concrets, solutions de problèmes spécifiques, et beaucoup moins aux preuves théoriques ; les autres, les géomètres disons rapidement, rompus ou non à des techniques algébriques, jugent les problèmes sur les nombres inutiles, besogneux et trop particuliers. Sainte-Croix, Frenicle lui-même seraient sans doute du premier groupe. […] Comme nous l'avons vu, lui-même [Fermat] occupe une place intermédiaire. Il se propose en particulier d'étendre le mode démonstratif dans les questions arithmétiques.
>
> [Goldstein, 1995]

De plus, ce non-emploi est volontaire de la part de ces mathématiciens et s'explique en particulier lorsque que c'est l'aspect calculatoire qui est privilégié :

> Elle [absence de tout symbolisme, algébrique en particulier] frappe d'autant plus que le traité de Frenicle mentionne la possibilité de l'employer, spécialement si les preuves sont compliquées, et que Fermat, au demeurant bien connu comme algébriste, aurait pu l'utiliser comme abréviation.
> […] S'il y a donc absence d'algèbre, elle est volontaire et liée à des prédilections qui transparaissent dans les lettres et les manuscrits. Par exemple, Frenicle donne plusieurs manières de calculer la différence de deux carrés : comme produit de la différence par la somme, comme double produit de la différence par la demi-somme, et d'autres formes encore, dont la longue explication rend la lectrice moderne perplexe. En fait, toutes ces formes équivalentes ne le sont que si l'on privilégie l'aspect symbolique à l'aspect purement calculatoire : comme le savent à nouveau les spécialistes du calcul sur ordinateur des procédures algébriquement équivalentes peuvent induire des raccourcis importants en temps de calcul. Trouver des voies rapides dans les questions numériques sur les entiers, par exemple sur les nombres premiers, fait partie des préoccupations communes à Fermat et à Frenicle pour lesquelles le talent spécifique du second est bien connu.
>
> [Goldstein, 1995]

Nous revenons pour finir à la descente infinie, étudiée dans les deux chapitres précédents, en soulignant que cette pensée organisatrice porte en elle la prise en compte de la spécificité des nombres entiers contrairement au symbolisme algébrique susceptible d'intervenir dans le travail opératoire ; Goldstein précise ce point en parlant de Fermat :

> Le mathématicien apparaît ici au confluent de deux exigences : l'une s'autorise à l'utilisation de l'algèbre, outil privilégié de la généralité analytique, l'autre souhaite maîtriser spécifiquement les questions soulevées dans un contexte euclidien, qui portent sur les entiers. La contradiction vient de ce que la variable algébrique ne contient aucune spécificité en soi sur la nature des nombres qu'elle recouvre. C'est en principe le prix à payer pour la généralité. La méthode de descente tente de gérer ainsi la question des entiers : les transformations entre problèmes sont facilitées grâce à l'appareillage algébrique, le principe de descente garantit que soit prise en compte la particularité des entiers.
>
> [Goldstein, 1995]

IV. ORDRES NATUREL ET DIVISIBILITE

IV.1 Introduction

Le pôle envisagé ici concerne l'ensemble des traitements opératoires où l'un des ordres, naturel ou divisibilité, est en jeu « au service » de l'autre[26]. Plutôt que de préciser en toute généralité ce que l'on entend par l'expression « au service de », nous proposons l'exemple suivant : on peut démontrer qu'un entier est inférieur ou égal ($\leq$) à un deuxième en montrant que ce dernier divise ($\prec$) le premier ; le travail opératoire est alors spécifique à la relation d'ordre divisibilité.

L'idée essentielle qui est au cœur de l'explicitation de ce pôle n'est pas tant d'étudier le travail opératoire qui peut être fait à partir d'un ordre au service de l'autre, que d'avoir à l'esprit une analyse en termes d'ordres, au sens où l'on est attentif à identifier si c'est Z en tant qu'anneau ou en tant qu'ensemble bien ordonné qui est privilégié ; la question en jeu est donc : quel est l'ordre qui est concerné de manière privilégiée dans ce traitement opératoire ?

Qu'est-ce qui légitime que l'on s'intéresse à cette question ? D'une part, d'un point de vue épistémologique, à chacun des ordres sont associées des manipulations opératoires qui lui sont, *a priori*, spécifiques. D'autre part, sur le plan didactique, la légitimité nous semble assurée parce que l'ordre divisibilité est un objet beaucoup moins familier pour les élèves que ne l'est l'ordre naturel.

Rappelons que c'est en ayant eu à l'esprit la distinction entre les objets $(Z,+,\times)$ et $(Z,\leq)$ que notre étude épistémologique menée sur le résultat *Il n'existe pas de triangle rectangle en nombres dont l'aire soit un carré* nous a permis de mettre à jour les composantes organisatrice et opératoire. Dans les preuves de Frenicle et de Fermat envisagées, les développements opératoires concernent en effet tous la divisibilité alors que la visée à laquelle ils se rattachent est de construire une solution plus petite au sens de l'ordre naturel…

---

[26] Dans son cours Rogalski parle à ce sujet de changements de points de vue « locaux » auxquels il associe l'exploitation des différentes traductions de la relation de divisibilité pour le travail opératoire (b multiple de a traduit dans le travail opératoire par l'existence d'un entier k tel que b=ka, reste nul dans la division de b par a…).

IV.2 Niveau Technologique et illustration des techniques associées

Qu'est-ce qui lie, d'un point de vue technologique, l'ordre naturel (total) à l'ordre divisibilité (partiel) ? Pour tous entiers a et b, nous avons les deux résultats suivants :

- $a \prec b \Rightarrow a \leq b$
- $a \prec b$ et $b \prec a \Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow a \leq b$ et $b \leq a$

Le premier lien nous indique qu'au sein du pôle étudié ici, c'est l'ordre divisibilité qui *a priori* est au service de l'ordre naturel puisque la réciproque n'est pas vraie. Ce dernier interviendra pour établir des résultats de divisibilité lorsque l'égalité sera en jeu, comme en atteste le deuxième lien.

Un point est essentiel : ces deux ordres coïncident pour le PDCD de deux entiers (non tous deux nuls), au sens où tout diviseur commun divise le plus grand (au sens de l'ordre naturel) diviseur commun[27]. Nous proposons ci-après une preuve proposée par Perrin :

> Soit a et b deux entiers non tous deux nuls. Si d est le pgcd de a et b et si δ est un diviseur de a et b, alors δ divise d.
> Démonstration. On note d'abord que le cas où a ou b est nul est trivial. On raisonne par l'absurde et minimalité en choisissant un contre-exemple a, b, avec a≤b, tel que a soit le plus petit possible et b le plus petit pour a fixé. On a a > 0. On considère alors a et b – a. Il est clair que les diviseurs communs à a et b sont les mêmes que ceux de a et b – a. En particulier, on a d = pgcd (a,b) = pgcd (a, b – a) et δ divise aussi a et b – a. Mais, comme b – a est < b, le couple (a, b – a) (ou (b – a, a) si b – a < a) n'est plus un contre-exemple en vertu de l'hypothèse de minimalité. Il en résulte que divise d et on a gagné.
> [Perrin, Correspondance par voie électronique]

Ce résultat est fondamental en arithmétique (« le cœur de l'arithmétique » selon Perrin) car avec lui on a facilement le théorème de Gauss (cf. §II.3) et donc l'unicité de la décomposition en facteurs premiers.

Soulignons que c'est le caractère bien ordonné relatif à l'ordre naturel qui assure cette coïncidence ; nous avons un contre-exemple avec l'anneau $A=R[T^2,T^3]$ totalement ordonné mais non bien ordonné, comme Perrin l'indique :

> Il s'agit du sous-anneau de R[T] formé des polynômes en T sans terme de degré 1. On ordonne R[T] (et donc A) en définissant pour $P(T)=\sum_{i=0,\, i\neq 1}^{n} a_i T^i$ avec $a_n \neq 0$, $P(T)>0 \Leftrightarrow a_n>0$. Sur les monômes, cet ordre coïncide avec celui des degrés. On considère alors, au sens de cet ordre, *PGCD*(T^5,T^6). Je dis que c'est T^3. Il est clair qu'il divise et que les diviseurs communs dans A (qui le sont aussi dans R[T]) ne peuvent être que les T^i, avec $0 \leq i \leq 5$. On voit que 1, T^2, T^3 sont des diviseurs communs, (car on a

[27] Il en est de même pour le **PPCM** au sens où l'ensemble des multiples communs à deux entiers coïncide avec l'ensemble des multiples de leur PPCM.

$T^5=T^2 \times T^3$ et $T^6=T^3 \times T^3=T^2 \times T^2 \times T^2$), mais pas T (il n'est pas dans A) ni T^4 ni T^5 (toujours à cause de l'absence de T). Mais alors T^2 divise T^5 et T^6 mais ne divise pas T^3.

[Perrin, Correspondance par voie électronique]

Avec le fait donc que, dans Z, le plus grand commun diviseur au sens de l'ordre naturel soit aussi le plus grand au sens de l'ordre divisibilité, on peut penser que, dans le cas des problèmes où la notion de *PGCD* est en jeu, l'ordre naturel puisse aussi être au service de l'ordre divisibilité au niveau de la composante opératoire.

Porter son attention sur l'articulation entre ordre divisibilité et ordre naturel susceptible de se développer au sein de l'opératoire de l'arithmétique conduit en particulier à donner toute son importance au sens de lecture en termes de divisibilité des égalités. En effet, si l'on prend l'exemple d'une égalité A=BC, celle-ci peut être lue en énonçant que A est multiple de B et multiple de C. En inversant le sens de lecture en termes de divisibilité avec une perte d'information (A divise BC ; BC divise A est écarté), on lit BC est multiple de A ; ce traitement opératoire sera illustré lors de l'analyse *a priori* de l'expérimentation menée en classe de terminale S (cf. Chapitre 8).

Dans ce chapitre, nous avons, comme cela avait été annoncé, cherché à préciser les formes que prend le travail opératoire en arithmétique. Sans chercher à décrire de façon exhaustive ce travail opératoire, nous avons organisé l'analyse autour de quatre pôles approchant ce travail opératoire suivant quatre perspectives complémentaires. Dans la première de ces perspectives, nous avons essayé de montrer comment ce travail opératoire dépend, dans ses caractéristiques, des formes de représentation choisies pour les entiers, en privilégiant deux modes de représentation spécifiques à l'arithmétique, exploitant la caractère d'anneau factoriel de Z d'une part, les réseaux de divisibilité et les congruences d'autre part. Dans la seconde de ces perspectives, nous nous sommes intéressée au rôle que jouent certains théorèmes dans ce travail opératoire, en nous centrant plus particulièrement sur les théorèmes de Gauss et de Bézout. Dans la troisième perspective, nous nous sommes intéressée aux manipulations algébriques inhérentes à ce travail opératoire en privilégiant des types de manipulations qui nous paraissaient jouer dans ce domaine un rôle particulièrement important. Enfin, dans la quatrième et dernière perspective, nous avons abordé le travail opératoire sous l'angle des relations qu'il met en jeu entre les deux ordres sur Z que sont l'ordre naturel, ordre total, et l'ordre de divisibilité, ordre partiel. Pour chacune de ces perspectives, nous avons essayé de préciser des catégories de problèmes pour lesquelles elles apparaissaient comme un outil pertinent d'analyse et d'illustrer par quelques exemples certaines caractéristiques du travail opératoire correspondant. Nous nous sommes aussi penchée à nouveau sur l'articulation entre dimensions organisatrice et opératoire en soulignant, cette fois, les liens privilégiés que certaines catégories opératoires pouvaient entretenir avec des catégories organisatrices.

Il nous semble maintenant utile, et ce sera l'objet du prochain chapitre, de revenir de façon plus synthétique sur le travail effectué jusqu'ici, en croisant des regards qui ont été, malgré quelques tentatives de liens, développés de façon séparée pour la clarté de l'exposition.

CHAPITRE 4 :

CONCLUSION

CHAPITRE 4 : 83
INTRODUCTION 84
I. DIMENSIONS ORGANISATRICE ET OPERATOIRE ET LEURS INTERACTIONS AU SEIN DE DEUX DEMONSTRATIONS 84
I.1 LA DEMONSTRATION INSPIREE DE FRENICLE 84
I.2 REPRESENTATION DES ENTIERS COMME SOMME DE DEUX CARRES 85
II. SYNTHESE ET PERSPECTIVES DIDACTIQUES 87
II.1 SYNTHESE 88
II.2 PERSPECTIVES DIDACTIQUES 89

INTRODUCTION

Ce quatrième chapitre, qui clôt la partie épistémologique de notre manuscrit, comprend deux parties. Dans la première, nous revenons sur les deux démonstrations-clefs de notre travail : la démonstration inspirée des travaux de Frenicle du résultat « *Il n'existe pas de triangle rectangle en nombres dont l'aire soit un carré.* » (cf. chapitre 1 §I.3) et celle relative à la représentation des entiers comme sommes de carrés (cf. chapitre 2 §II.4). Pour chacune d'entre elles, nous rappelons les pensées organisatrices associées, précisons l'opératoire par rapport aux différents pôles explicités dans le chapitre 3, et étudions comment ces deux dimensions s'articulent. Dans la deuxième partie, nous faisons une synthèse du travail mené dans les trois chapitres précédents ainsi que dans celui-ci et ouvrons un certain nombre de perspectives didactiques à partir de cette synthèse.

I. DIMENSIONS ORGANISATRICE ET OPERATOIRE ET LEURS INTERACTIONS AU SEIN DE DEUX DEMONSTRATIONS

I.1 La démonstration inspirée de Frenicle

Concernant la première démonstration, la pensée organisatrice sous-jacente s'identifie rappelons-le à la descente infinie, méthode qui a été présentée en détail dans le chapitre 2. Du côté opératoire, deux pôles sont essentiellement en jeu comme l'organigramme que nous avions proposé le met bien en évidence : utilisation de théorèmes-clefs et manipulations algébriques. Ce qui est « encapsulé » dans les deux théorèmes en jeu renvoie pour l'un (la paramétrisation) au pôle algébrique et l'autre (le théorème fondamental) à la structuration autour des nombres premiers. Rappelons que ces théorèmes qui interviennent chacun à deux reprises font partie du « paysage mathématique » de l'époque concernée.

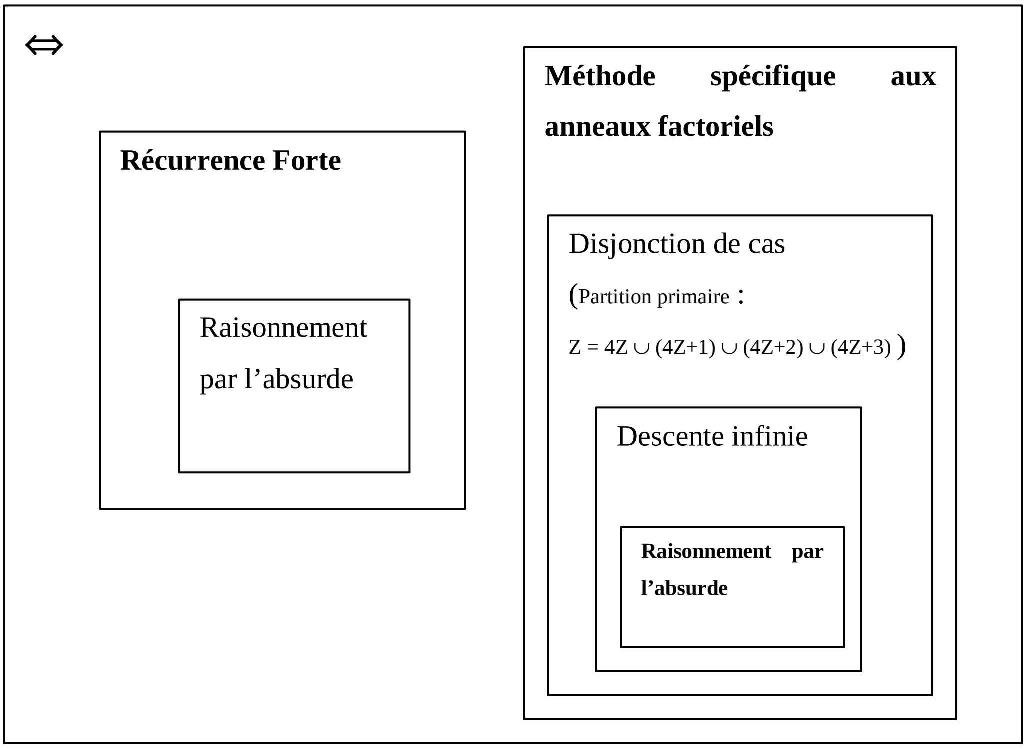
L'articulation entre $(Z,+,\times)$ et $(Z,\leq)$ est présente au niveau de la mise en acte de la visée de construire une solution plus petite (au sens de l'ordre naturel) : l'emploi de la paramétrisation introduit un diviseur-clef qui, par définition, est plus petit que l'un des objets initiaux (le diviseur en question est l'entier noté p, racine de la mesure de l'hypoténuse du deuxième triangle, et l'objet initial est l'entier noté x, mesure de la longueur d'un des côtés autre que l'hypoténuse du premier triangle ; la relation en jeu est $x=2pq$). L'autre élément opératoire intervenant dans la construction d'un objet plus petit correspond à une simple manipulation algébrique ($x < x^2+y^2$).

Rappelons que cette démonstration inspirée des idées de Frenicle nous a permis d'illustrer un des aspects de la dialectique entre les composantes organisatrice et opératoire en la comparant avec celle de Fermat : les objets sur lesquels porte le travail opératoire ont une influence directe sur l'organisation des preuves (ici ils conditionnent l'amorce de la descente).

Mais la dialectique entre les dimensions organisatrice et opératoire est ici limitée parce qu'il n'y a qu'une pensée organisatrice générale : la descente infinie, et que l'opératoire, relativement complexe, fonctionne de façon assez autonome. A l'inverse, la démonstration sur laquelle nous revenons maintenant permet de bien mettre en évidence les interactions profondes qui peuvent exister entre les deux dimensions dans le travail arithmétique.

I.2 Représentation des entiers comme somme de deux carrés

Nous reproduisons ci-après l'organigramme synthétisant la hiérarchie de dimensions organisatrices correspondant à la démonstration proposée, déjà donné dans le chapitre 2 :



Le problème concerné ici peut être lui-même associé au pôle opératoire que nous avons défini à partir des différentes formes de représentation des entiers : ici c'est la représentation des entiers comme somme de deux carrés, et plus généralement par des formes quadratiques du type X^2+AY^2 avec A égal à 1, 2 ou 3, qui est en jeu. Citons, à ce propos, Hellegouarch :

> Fermat comme beaucoup d'autres avant lui, s'est intéressé à la représentation d'un entier comme somme de deux carrés et il a pu commencer à en bâtir une théorie rigoureuse. Plus généralement, il s'est intéressé à la représentation d'un entier par des formes quadratiques du type AX^2+Y^2 avec $A\in\{1,2,3\}$. Comme la méthode est la même dans les trois cas, nous nous limiterons au cas où A=1.
>
> [Hellegouarch, 1997]

L'explicitation dans l'énoncé du théorème d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un entier s'écrive comme somme de deux carrés montre que les deux sous-pôles de structuration des entiers envisagés dans notre étude de la dimension opératoire (structurations autour des nombres premiers et à l'aide de réseaux réguliers) sont directement concernés eux aussi. L'un des ressorts de la démonstration réside dans le lemme 1 qui énonce que (–1) est un carré dans $\frac{Z}{pZ}$ si et seulement si p est congru à 1 modulo 4. Soulignons qu'au niveau de ce lemme l'opératoire est « encapsulé » avec une profondeur supplémentaire : les théorèmes de Lagrange et Wilson interviennent en effet à leur tour dans sa démonstration comme opératoire « encapsulé ». Les congruences interviennent alors naturellement de façon essentielle, tant du côté opératoire (calcul de congruences) qu'organisateur (partition primaire définissant la disjonction de cas en jeu). Le pôle algébrique joue quant à lui un rôle central à travers l'emploi de l'identité de Lagrange qui assure la stabilité de l'ensemble des sommes de carrés par multiplication. Ceci est essentiel à la fois dans la mise en œuvre du jeu d'extension-réduction et dans le lemme 2, élément de l'opératoire encapsulé fondamental dans la construction d'une solution plus petite pour la descente infinie. De même que pour la démonstration précédente, l'articulation entre $(Z,+,\times)$ et $(Z,\leq)$ est privilégiée au sein de la dialectique entre les niveaux organisateur et opératoire : c'est à travers la notion de diviseur que des éléments plus petits au sens de l'ordre naturel sont injectés dans le travail opératoire de la descente infinie et également de la récurrence. Ceci nous permet de compléter l'organigramme centré sur la dimension organisatrice que nous avons reproduit plus haut, en y plaçant ces éléments cruciaux de l'opératoire ainsi que d'autres que l'on peut qualifier de secondaires :

$\Leftrightarrow$

Congruences

Récurrence Forte

Structuration autour nbs premiers & Conservation relation divisibilité par combinaisons linéaires

Raisonnement par l'absurde

$\frac{Z}{pZ}$ *est un corps*

Lemme 1

Méthode spécifique aux anneaux factoriels

*Identité de Lagrange**

Disjonction de cas

(Partition primaire** :

$Z = 4Z \cup (4Z+1) \cup (4Z+2) \cup (4Z+3)$)

Deux premiers cas : *Simples manipulations algébriques (décomposition en somme de 2 carrés)*

Troisième cas :

Descente infinie

*Lemme 1***

Raisonnement par l'absurde

Lemme 2*

Ceci correspond bien sûr à un premier niveau de description, qui schématise l'articulation organisateur/opératoire dans cette démonstration, les lemmes 1 et 2 étant considérés comme des énoncés pré-établis disponibles. En zoomant sur lemme 1 et lemme 2, on pourrait faire apparaître un second niveau de description où la preuve analysée contiendrait la démonstration de ces deux lemmes, dans lequel les théorèmes de Lagrange et de Wilson fonctionneraient à leur tour comme opératoire encapsulé.

II. SYNTHESE ET PERSPECTIVES DIDACTIQUES

Comme nous l'avions exprimé en introduction, la fonction du travail que nous avons présenté dans les chapitres précédents et dans ce chapitre est de nous aider à comprendre les spécificités du raisonnement en arithmétique et à nous interroger sur les potentialités qu'offre ce domaine pour le développement de la rationalité mathématique des élèves au niveau de la terminale S. Dans ce qui suit, nous synthétisons ce travail et la connaissance que nous en avons tiré avant d'amorcer la transition vers le didactique.

II.1 Synthèse

Dans la perspective rappelée précédemment, nous avons éprouvé le besoin de distinguer deux dimensions au sein du raisonnement en arithmétique, la dimension organisatrice et la dimension opératoire, présentées dans le chapitre 1. Nous avons ensuite dans les chapitres 2 et 3 précisé les formes que peut prendre chacune de ces dimensions avant de revenir plus précisément, dans ce chapitre 4, sur la façon dont elles sont susceptibles de s'articuler.

Du côté organisateur, nous avons présenté en détail différentes formes organisatrices : la descente infinie et la récurrence, la disjonction de cas, la recherche exhaustive et une méthode propre aux anneaux factoriels que nous avons appelée « jeu d'extension-réduction ». Nous avons regroupé dans une même catégorie la descente infinie et la récurrence parce qu'elles constituent deux modes d'exploitation dans le raisonnement de la propriété de bon ordre de l'ensemble N, ce qui n'implique aucunement que nous les considérions comme équivalentes sur le plan didactique. Même si nous les distinguons en tant que formes organisatrices, la recherche exhaustive et la disjonction de cas ont été rapprochées car elles illustrent toutes deux une même démarche globale : ramener la résolution d'un problème à l'étude d'un nombre fini de cas. La dernière catégorie retenue, quant à elle, fonctionne de façon plus implicite dans le travail arithmétique ; elle repose sur les propriétés des anneaux factoriels. Nous avons choisi l'appellation « jeu d'extension-réduction » afin de désigner le principe fondateur de cette méthode qui se retrouve dans d'autres champs des mathématiques, tels l'analyse ou l'algèbre linéaire.

Du côté opératoire, nous avons proposé une arborescence explicitant différents pôles au sein de cette composante qui nous ont servi à structurer l'analyse. Ceci nous a permis de prendre en compte conjointement dans l'analyse du travail opératoire, les formes de représentations des objets employées, la structure de Z privilégiée, l'utilisation de théorèmes-clef et les différentes manipulations algébriques. En nous inspirant de la notion de praxéologie issue de la théorie anthropologique et la structuration qu'elle propose autour du quadruplet (type de tâche, technique, technologie, théorie), nous avons, pour chacun de ces pôles, après l'avoir introduit, précisé des techniques opératoires associées ainsi que le(s) élément(s) technologique(s) correspondant(s) et indiqué, le cas échéant, une ou plusieurs pensées organisatrices en relation dialectique avec le pôle envisagé.

Nous avons étudié la dialectique susceptible d'exister entre les deux dimensions distinguées dans le raisonnement en arithmétique. Dans le chapitre 1, comme nous le rappelions précédemment, nous avons particulièrement mis en évidence un des aspects de ce processus dialectique en pointant un élément essentiel y participant : les objets sur lesquels porte le travail opératoire ont une influence directe sur l'organisation des preuves. Dans le chapitre 2, nous avons pointé un deuxième aspect de la dialectique entre les dimensions organisatrice et opératoire : des sous-dimensions organisatrices sont susceptibles de naître dans le jeu opératoire qui règne au sein d'autres dimensions organisatrices, ceci conduisant à une imbrication de formes organisatrices faisant vivre chacune *a priori* plusieurs formes opératoires. La démonstration sur les sommes de deux carrés est un exemple particulièrement fort de ce point de vue de par la richesse identifiée mais on peut penser qu'une démonstration arithmétique met bien souvent en jeu plusieurs organisations chacune appelant à, ou étant pilotée par, un certain travail opératoire. Dans le chapitre 3, cet aspect a été à nouveau explicité en associant à chaque pôle opératoire une ou plusieurs pensées organisatrices privilégiées.

II.2 Perspectives didactiques

Tout ceci montre qu'il y a là, à propos d'un univers familier pour les élèves du secondaire, celui des nombres entiers où de nombreuses questions peuvent se formuler et se comprendre aisément, un univers du raisonnement, à la fois solidement structuré, qui peut être instrumenté par des outils opératoires efficaces, avec une marge énorme dans la complexité tant dans les deux dimensions distinguées que dans leurs interactions. L'existence de cet univers est sans aucun doute susceptible de nourrir par sa richesse le développement de la rationalité mathématique. Dans le même temps, on ne peut s'empêcher, à la lecture des nombreux exemples fournis, d'être impressionné par le caractère foisonnant de ce paysage, par la diversité des ressorts sur lesquels s'appuie le raisonnement, et de penser que la construction d'un cheminement cohérent et adapté aux élèves de terminale S, compatible avec les contraintes et notamment les contraintes horaires de l'enseignement, ne va pas forcément aller de soi.

Comment ce potentiel peut-il être exploité au niveau d'enseignement envisagé et avec quelle responsabilité pour l'élève dans le travail mathématique, tant du côté organisateur qu'opératoire ? Comment une prise d'autonomie peut-elle s'organiser progressivement de son côté ? Et que peut-on viser effectivement à la fin de l'enseignement secondaire en série S comme connaissances mobilisables, disponibles, en termes de raisonnements arithmétiques, en termes de compétences opératoires outillant ces raisonnements ? Il y a, compte tenu des contraintes, tant institutionnelles que cognitives, sans aucun doute des choix à effectuer. Les programmes en imposent certains et en favorisent d'autres. Mais les programmes ne sont qu'un cadre pour l'action didactique. Ils ne suffisent pas à la définir. Comme nous l'écrivions dans l'introduction, on peut aujourd'hui penser que la dynamique du processus de transposition didactique qui s'est amorcée (dans sa composante savoir à enseigner $\rightarrow$ savoir enseigné) en 1998 avec la réintroduction officielle de l'arithmétique, a atteint aujourd'hui un quasi point d'équilibre et que l'arithmétique vit aujourd'hui sous une forme relativement stabilisée dans l'institution scolaire. C'est cette vie qu'il nous faut à présent étudier pour cerner ce qui est exploité des riches potentialités de l'arithmétique pour le développement de la rationalité mathématique et comment cela est exploité.

Pour aborder ces questions d'écologie institutionnelle, une approche naturelle aurait pu être d'étudier la vie de l'arithmétique dans les manuels ; une telle étude ayant été menée par Ravel (2003), nous avons préféré choisir une approche complémentaire et nous avons d'abord décidé de prendre comme objet d'étude les sujets de baccalauréat. Que subsiste-t-il des potentialités *a priori* révélées par l'analyse épistémologique ? Et quelle y est l'autonomie laissée à l'élève ? Observe-t-on, au fil des années, une évolution de ces sujets, traduisant une certaine dynamique du processus de transposition ? Et si oui, de quel type ? Conduit-elle, comme on peut le craindre, vu les tendances usuelles des systèmes d'enseignement, à une réduction de l'exploitation des potentialités après une première phase d'explosion initiale, ou la richesse du domaine accessible aux élèves semble-t-elle avoir permis d'éviter une telle dynamique réductrice ?

Mais si le filtre des sujets de baccalauréat est un filtre pertinent et intéressant pour mener cette analyse écologique, car nul ne songerait à nier l'influence que le baccalauréat a sur l'enseignement en terminale, approcher l'enseignement uniquement à travers le baccalauréat est extrêmement réducteur. Pour contrebalancer ce point de vue, nous avons donc décidé de prendre en compte des ressources destinées aux enseignants telles les publications des IREM, de l'APMEP ou encore celles disponibles sur les sites académiques. Parmi ces différentes ressources, nous avons choisi plus particulièrement deux brochures de l'IREM de Montpellier, une publication de l'APMEP ainsi que le document d'accompagnement du programme d'arithmétique en réduisant nécessairement à la dimension de ce travail de thèse une enquête qui aurait pu être plus systématique.

Mais une étude des potentialités de l'arithmétique pour le développement de la rationalité mathématique au niveau de la terminale S ne peut se limiter aux deux champs d'analyse convoqués jusqu'ici. Même si nous savons que les sujets de baccalauréat sont pensés pour être accessibles aujourd'hui à une majorité d'élèves, même si nous savons que les activités proposées dans les documents retenus se veulent adaptées aux élèves de ce niveau, nous pensons que tout ceci ne nous confronte que de manière indirecte à la réalité de l'enseignement en classe et du fonctionnement des élèves face à des problèmes d'arithmétique. Les études menées nous arment pour affronter plus directement cette contingence mais elles ne peuvent s'y substituer. C'est pour répondre à ce besoin que s'est donc mise en place la troisième dimension de cette recherche.

De même que pour l'étude institutionnelle, nous avons choisi de nous situer dans deux espaces d'observation distincts par rapport aux contraintes auxquelles ils étaient assujettis. Le premier espace envisagé renvoie à l'analyse des sujets du baccalauréat puisqu'il s'agit d'une épreuve d'entraînement à cette évaluation. Le deuxième espace, moins contraint que le premier, correspond à l'introduction en classe d'une situation de recherche avec un professeur et des élèves volontaires.

Ces deux espaces sélectionnés pour une confrontation à la contingence didactique permettent également d'envisager deux facettes quant au contexte de production et à la nature des corpus en jeu.

En effet, le premier se matérialise par la donnée d'une quinzaine de copies d'élèves alors que pour le second nous avons un accès assez intime au fonctionnement cognitif des élèves à travers la donnée de l'ensemble des discussions qui eurent lieu pendant la recherche de ces derniers face à la résolution d'un problème d'arithmétique. La façon dont nous avons organisé l'expérimentation définissant le deuxième espace d'observation permet ainsi d'accéder de façon privilégiée aux modes de raisonnement des élèves et de mettre en parallèle productions écrites et processus de production.

PARTIE 2 :

ANALYSE DIDACTIQUE

<u>CHAPITRE 5</u> :

L'EPREUVE DE L'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE AU BACCALAUREAT DEPUIS LA MISE EN APPLICATION DES PROGRAMMES DE 1998

<u>CHAPITRE 5</u> : 93

L'EPREUVE DE L'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE AU BACCALAUREAT DEPUIS LA MISE EN APPLICATION DES PROGRAMMES DE 1998 93

INTRODUCTION.. 94

I. UNE CLASSIFICATION DES SUJETS ETUDIES 96

II. REGROUPEMENT AUTOUR DE LA RESOLUTION D'EQUATIONS DIOPHANTIENNES.. 100

II.1 RESOLUTION D'EQUATIONS DU TYPE AX+BY+CZ=D 100

II.1.1 La tâche τ'... 101

II.1.2 La tâche τ.. 102

II.1.3 Résolution d'équations du type ax+by+cz=d avec c non nul.. 117

II.2 TRIPLETS PYTHAGORICIENS ET EQUATIONS DU TYPE N²-SN+11994 (S ENTIER NATUREL)................. 120

III. REGROUPEMENT AUTOUR DE LA NOTION DE DIVISIBILITE............................ 121

III.1 QUESTIONS DE DIVISIBILITE 122

III.1.1 Type de tâche T1 124

III.1.2 Types de tâche T2 et T3.. 127

III.1.3 Importance quantitative et qualitative des questions de divisibilité 127

III.2 PGCD 129

III.2.1 Un cas particulier : nombres premiers entre eux... 130

III.2.2 Autres cas rencontrés... 131

III.3 PGCD ET PPCM 134

IV. REGROUPEMENTS AUTOUR DES NOTIONS DE DIVISION EUCLIDIENNE ET PRIMALITE... 136

IV.1 PRIMALITE.. 136

IV.2 DIVISION EUCLIDIENNE 138

V. CONCLUSION.. 138

INTRODUCTION

A propos d'un univers familier pour les élèves du secondaire, celui des nombres entiers où de nombreuses questions peuvent se formuler et comprendre aisément, il y a comme le montre notre travail épistémologique un univers du raisonnement, à la fois solidement structuré, qui peut être instrumenté par des outils opératoires efficaces, avec une marge de jeu dans la complexité tant dans les deux dimensions distinguées que dans leur interaction qui ouvre effectivement *a priori* des potentialités intéressantes à l'apprentissage et l'enseignement de la rationalité mathématique. Dans une perspective d'écologie des savoirs, il s'agit dans ce chapitre, et le suivant, d'étudier l'exploitation de ces potentialités par l'institution scolaire. Cette étude est menée à travers deux types de corpus : les sujets du baccalauréat et des brochures destinées aux enseignants. Nous aurions pu en considérer d'autres (les manuels par exemple) mais ceux retenus offrent l'avantage d'illustrer les deux extrêmes qui existent relativement aux contraintes institutionnelles auxquelles les corpus sont assujettis (le moins contraint étant les brochures destinées aux enseignants telles certaines publications des IREM).

Dans ce chapitre, nous nous centrons sur l'épreuve de l'enseignement de spécialité au baccalauréat, à partir de la mise en application des programmes de 1998 (avec lesquels l'arithmétique réapparaît). L'épreuve de mathématiques du baccalauréat, série S, comporte de trois à cinq exercices (ou problèmes) indépendants les uns des autres, notés chacun de 3 à 10 points. Le sujet proposé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité diffère de celui proposé aux candidats ne l'ayant pas suivi par un de ces exercices, noté sur 5 points. Cet exercice peut porter sur la totalité du programme (enseignement obligatoire et spécialité).

A la lumière de l'analyse épistémologique, il s'agit dans cette étude écologique d'apprécier la richesse de ce qui « vit » dans les sujets du baccalauréat, et d'identifier l'autonomie qui est dévolue à l'élève, tant du côté organisateur qu'opératoire. Vu le nombre relativement important de sujets concernés par cette étude institutionnelle (une trentaine), il s'agit tout particulièrement d'étudier à la fois les similarités et les différences par rapport aux deux axes d'analyse définis précédemment. Une fois déterminés les types de tâches principaux en jeu dans l'épreuve de l'enseignement de spécialité, il s'agira d'identifier les variantes rencontrées à l'aide de notre outil épistémologique.

L'épreuve d'arithmétique de la classe de terminale S ne peut intervenir que dans un exercice de l'enseignement de spécialité, où elle est en compétition avec d'autres domaines au programme de cet enseignement, notamment la géométrie. Pour la constitution de notre corpus, nous avons donc, dans un souci d'exhaustivité, recensé dans les annales[28] tous les exercices de spécialité évaluant les

[28] *Mathématiques S enseignement de spécialité,* Collection Annabac Hatier (1999, 2000, 2001, 2002, 2003).

élèves sur le programme d'arithmétique. A partir de la session 1999 (dans la session 1998 il n'y a que des exercices de géométrie), sur les 39 exercices de spécialité, 20 concernent exclusivement l'arithmétique, 9 sont mixtes du point de vue des contenus en jeu et 10 sont des exercices exclusivement de géométrie (avec ou sans nombres complexes). Cette donnée statistique est grossière car nous ne disposons pas toujours, pour un site géographique donné, des exercices de spécialité de toutes les sessions ; elle nous semble néanmoins assez représentative car, si l'on considère les sites où nous avons tous les sujets[29], nous avons confirmation de la forte présence de l'arithmétique dans l'exercice de spécialité : parmi les 23 exercices correspondants, 12 concernent exclusivement l'arithmétique, 5 sont mixtes du point de vue des contenus en jeu et 6 sont des exercices exclusivement de géométrie.

En procédant comme indiqué ci-dessus, l'étude institutionnelle que nous présentons dans ce chapitre porte sur les 29 sujets suivants :

- France : sessions de juin 2002, 2001 et 1999, session de septembre 2001,
- Asie : sessions de juin 2002, 2000 et 1999,
- Amérique du nord : sessions de juin 2002, 2001 et 1999,
- Amérique du sud : session de novembre 2001,
- Centres étrangers groupe 1 : sessions de juin 2002, 2001 et 1999,
- Pondichéry : sessions de mai 2001 et 1999, sessions de juin 2002 et 2000,
- La Réunion : session de Juin 2000,
- Guadeloupe – Guyane – Martinique : sessions de juin 2001, 2000 et 1999, session de septembre 2001,
- Polynésie : sessions de juin 2002, 2001, 2000 et 1999,
- Nouvelle Calédonie : session de novembre 2001, session de mars 2001.

Pour étudier ce nombre important de sujets, il nous est apparu inévitable, sur le plan méthodologique, de procéder à des regroupements. Et il nous a semblé pertinent de le faire en fonction des principaux problèmes mathématiques en jeu.

La nature du corpus envisagé ici (sujets d'examen) nous conduit à faire certaines prévisions. Nous prévoyons d'une part, à travers une centration autour de quelques tâches emblématiques du niveau d'enseignement étudié, une certaine réduction dans les sujets proposés de la richesse potentielle offerte par cet enseignement et, d'autre part, une autonomie limitée laissée à l'élève et située essentiellement, voire exclusivement, au niveau opératoire, la composante organisatrice étant « figée ». Soulignons néanmoins que le fait qu'il s'agisse d'un exercice, et qui plus est un exercice pour ceux ayant choisi la

[29] France (sessions de juin 1999, 2000, 2001, 2002 et septembre 1999, 2000, 2001), Asie (sessions de juin 1999, 2000, 2001, 2002), Pondichéry (sessions de Mai 1999, 2000, 2001, 2002), Amérique du Nord (sessions de juin 1999, 2000, 2001, 2002), Centres Etrangers Groupe 1 (sessions de juin 1999, 2000, 2001, 2002).

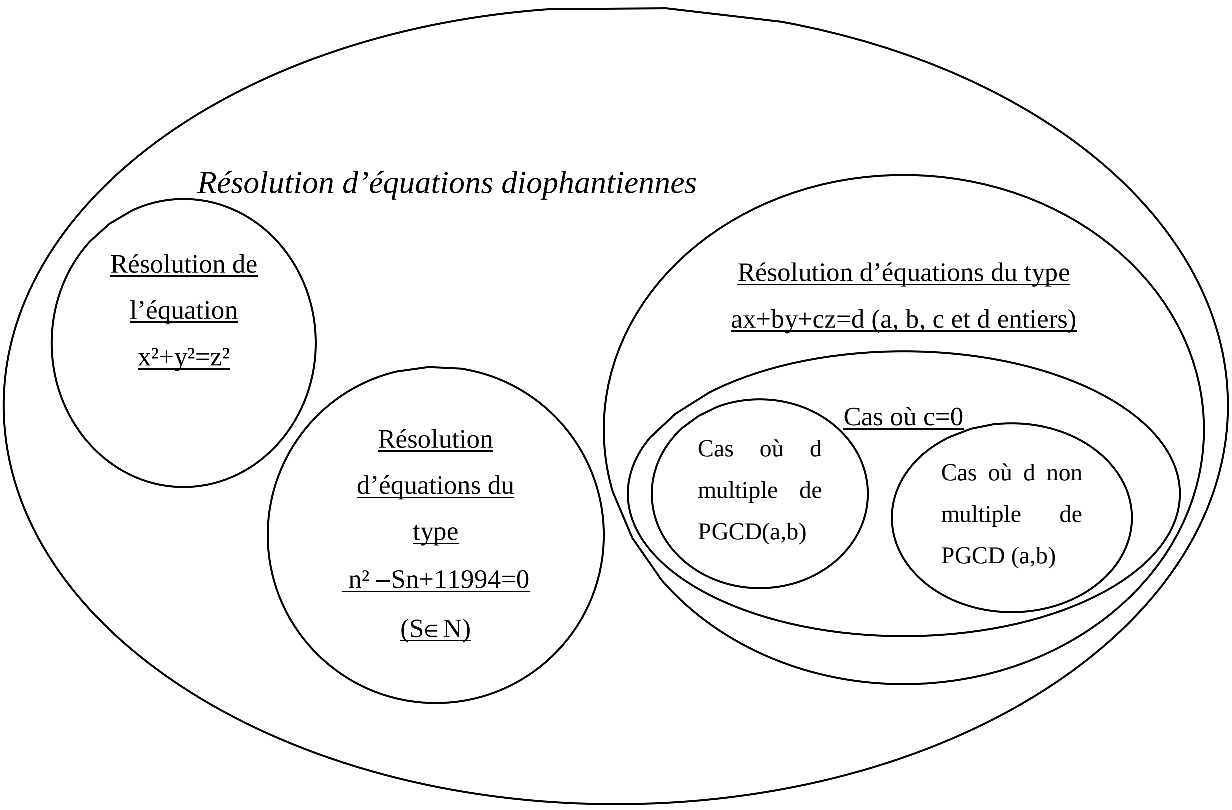
spécialité, peut laisser penser que les contraintes institutionnelles auxquelles est assujetti le type d'évaluations envisagé ici joueront moins fortement que dans la partie s'adressant à tous les élèves et notamment dans le problème d'analyse. Jusqu'à quel point ces prévisions sont-elles observées dans les faits ? C'est ce que nous allons étudier à présent.

Nous présenterons dans un premier temps la classification que nous avons faite pour organiser l'étude des sujets envisagés ici. Nous mènerons ensuite successivement l'analyse des sujets de chacun des regroupements définis par notre classification. Nous proposerons, pour finir, une vue synthétique croisant ces différentes analyses.

I. UNE CLASSIFICATION DES SUJETS ETUDIES

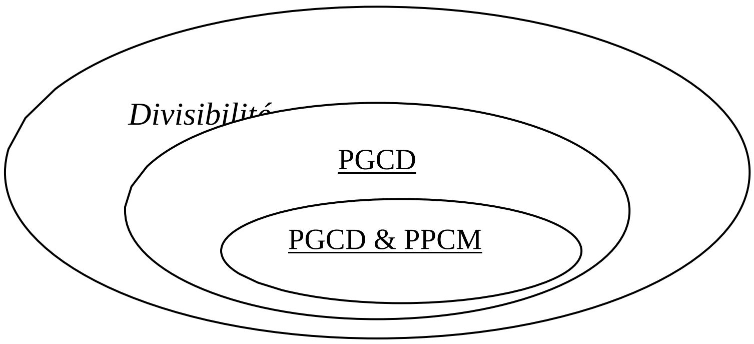
Une première lecture de l'ensemble des sujets du baccalauréat nous amène à y faire des regroupements à partir du thème « *résolution d'équations diophantiennes* » ainsi que des notions de *divisibilité, division euclidienne* et *primalité* ; précisons ce que ce thème et ces notions mathématiques désignent dans cette analyse :

- Le thème de la résolution d'équations diophantiennes est subdivisé selon le découpage ensembliste suivant :
-



Un sujet est associé au regroupement défini par le thème envisagé ici si l'une des tâches principales en jeu correspond à l'un des sous-ensembles de ce découpage. Dans la suite, on notera τ *(resp.* τ'*) la tâche de résolution d'équations du type ax+by=c où c est multiple (resp. non multiple) du PGCD de a et b.*

- D'un point de vue mathématique, il est légitime de rattacher les notions de PGCD et PPCM à celle de divisibilité (la notion de nombres premiers entre eux est rattachée à celle de PGCD). Notre première lecture des différents énoncés conduit à distinguer les sujets construits autour des notions de PGCD et PPCM de ceux où celles-ci n'apparaissent pas. On constate qu'aucun sujet ne met en scène la notion de PPCM sans que la notion de PGCD n'intervienne (au cours de l'analyse de chacun des sujets correspondants, nous préciserons si ces deux notions entrent en jeu indépendamment l'une de l'autre). C'est ainsi que nous procédons au découpage ensembliste donné ci-après :



Un sujet est associé à l'un des trois ensembles apparaissant dans le schéma donné ci-dessus si l'un des problèmes mathématiques le définissant est fondé sur la (ou les) notion(s) correspondante(s). Une exception est faite pour les sujets comportant une **question relative à la notion de *nombres premiers entre eux*** : ils seront rattachés au sous-groupement défini par la notion de PGCD même si cette question correspond à une tâche non isolée et que rien d'autre ne les relie au groupement défini par la notion de PGCD. Ce choix est motivé par le fait que la tâche consistant à démontrer que deux nombres sont premiers entre eux correspond à l'un des principaux types de tâches de l'enseignement de l'arithmétique en TS (Ravel, 2000).

- Le regroupement associé à la notion de division euclidienne renvoie exclusivement, dans cette analyse, aux questions de détermination du reste et de recherche d'entiers avec une contrainte en termes de reste.
- L'appellation *primalité* désigne ici le type de problèmes où il s'agit de trouver la décomposition en produit de nombres premiers d'un entier donné avec le cas particulier où le caractère premier de cet entier est à montrer.

On rattache un sujet à l'un des deux derniers regroupements si et seulement si le type de questions correspondant y apparaît sous forme d'une tâche isolée.

Cette classification implique qu'un sujet est susceptible d'appartenir à plusieurs des quatre sous-ensembles qui la définissent. Ce découpage n'a qu'une fonction de nature méthodologique ; des liens jugés pertinents à faire entre, et au-delà de, ces quatre regroupements seront faits tout au long de cette étude. Cela sera en particulier nécessaire pour que chaque sujet soit analysé « comme un tout ».

Le tableau qui suit recense les sujets appartenant à chacun des groupements de notre classification.

Référence Sujet	**Résolution d'équations diophantiennes**					**Divisibilité**			**Division euclidienne**	**Primalité**
	$x^2+y^2=z^2$	$n^2-Sn+11994=0$	ax+by+cz=d				PGCD			
				c = 0						
				τ d multiple de PGCD(a,b)	**τ'** d non multiple de PGCD(a,b)			PGCD PPCM		
[France, Juin 2002]			♦	♦						
[France, Sep. 2001]				♦	♦					
[France, Juin 2001]				♦		♦				
[France, Juin 1999]				♦		♦	♦			♦
[Asie, Juin 2002]						♦	♦			
[Asie, Juin 2000]				♦						
[Asie, Juin 1999]				♦						
[Amérique Nord , Juin 2002]				♦		♦				
[Amérique Nord , Juin 2001]				♦			♦			
[Amérique Nord , Juin 1999]						♦			♦	
[Amérique Sud, Nov. 2001]							♦			
[Centres Etrangers 1, Juin 2002]	♦						♦			
[Centres Etrangers 1, Juin 2001]				♦						
[Centres Etrangers 1, Juin 1999]				♦						
[Pondichéry, Juin 2002]							♦			
[Pondichéry, Mai 2001]				♦			♦			
[Pondichéry, Juin 2000]						♦	♦			
[Pondichéry, Mai 1999]		♦					♦			♦
[La Réunion, Juin 2000]							♦			
[Guadeloupe-Guyane-Martinique, Sep. 2001]								♦		
[Guadeloupe-Guyane-Martinique, Juin 2001]								♦		
[Guadeloupe-Guyane-Martinique, Juin 2000]				♦						
[Guadeloupe-Guyane-Martinique, Juin 1999]				♦						
[Polynésie, Juin 2002]							♦			
[Polynésie, Juin 2001]				♦		♦				
[Polynésie, Juin 2000]				♦		♦				
[Polynésie, Juin 1999]						♦				
[Nelle Calédonie, Nov. 2001]							♦			
[Nelle Calédonie, Mars 2001]								♦		
Nombre de sujets	**1**	**1**	**1**	**15**	**1**	**9**	**12**	**3**	**1**	**2**

A noter qu'une simple lecture de ce tableau informe en particulier sur l'importance quantitative de la tâche τ et sur le caractère exogène de certains sujets comme par exemple [Centre Etrangers 1, Juin 2002] construit autour du thème des triplets pythagoriciens.

II. REGROUPEMENT AUTOUR DE LA RESOLUTION D'EQUATIONS DIOPHANTIENNES

Pour chaque type d'équation diophantienne concerné par notre étude, nous organisons l'analyse des sujets qui lui sont associés suivant deux niveaux principaux :

- le niveau de la résolution elle-même : à travers les questions posées, comment est-il proposé de procéder pour résoudre les équations mises en scène ? Comment se définit l'autonomie dévolue à l'élève ? Lorsque plusieurs sujets sont concernés : la méthode de résolution sous-jacente varie-t-elle sur l'ensemble des sujets ? Ce qui est laissé à la charge de l'élève est-il constant ou observe-t-on des variations au sein de cet ensemble ?
- le niveau de la mise en scène de la tâche de résolution : la résolution des équations est-elle exploitée ? Le cas échéant, dans quelle mesure, au service de quel(s) type(s) de problèmes ? Fait-on vivre différents cadres ? Le cas échéant, y a-t-il des jeux entres ces cadres[30] ? Reste-t-on dans le domaine des mathématiques ?

  Pour les sujets où ce qui est demandé à l'élève ne se réduit pas à la tâche de résolution, on parlera d' *« habillage de la tâche »*. A ce niveau, il s'agit en particulier d'apprécier la qualité des différents habillages en jeu ainsi que la diversité rencontrée.

Comme nous le précisions en introduction de cette étude institutionnelle, l'utilisation de l'outil épistémologique présenté précédemment est omniprésente : le questionnement relatif à chacun des deux niveaux d'analyse introduits ci-dessus est pensé en termes de dimensions organisatrice et opératoire et de processus dialectique entre ces deux composantes.

II.1 Résolution d'équations du type AX+BY+CZ=D

Les quinze sujets concernés ici sont les suivants :

- France : sessions de juin 2002 (questions 1 et 2), 2001 et 1999, session de septembre 2001,
- Asie : sessions de juin 2000 et 1999,
- Amérique du nord : sessions de juin 2002 (Partie B) et 2001,
- Centres étrangers groupe 1 : sessions de juin 2001 et 1999,
- Pondichéry : session de mai 2001,
- Guadeloupe – Guyane – Martinique : Sessions de juin 2000 et 1999,
- Polynésie : sessions de juin 2001 et 2000.

[30] Le mot « cadre » et l'expression « jeu de cadres » sont employés ici au sens de R.Douady (Douady, 1986).

Les équations en jeu dans ces sujets sont des équations diophantiennes du type ax+by+cz=d. Selon que l'entier c est nul ou ne l'est pas, deux cas sont possibles. Le cas où c est non nul n'apparaît que dans un seul sujet ([France, Juin 2002]). Avant d'étudier la question de l'unique sujet où ce cas apparaît, nous nous intéressons aux tâches τ et τ' qui recouvrent celui où l'entier c est nul. La tâche τ est rencontrée dans tous les sujets et la tâche τ' dans deux d'entre eux. Nous débutons notre étude avec la tâche τ' dont les équations associées n'admettent pas de solution.

II.1.1 La tâche τ'

Parmi les sujets envisagés dans cette analyse, on trouve le cas d'équations du type ax+by=c avec a et b entiers et c non multiple du PGCD de ces deux entiers dans le sujet [France, sep2001] : « Soit l'équation 168x+20y = 6 dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a-t-elle des solutions ? ». Dans ce sujet, l'équation mentionnée est associée à l'équation 168x+20y = 4 vis-à-vis de laquelle elle apparaît comme objet secondaire. On constate en effet que la tâche correspondante τ' introduit la tâche τ autour de laquelle est construit le sujet ; la lecture de l'énoncé permet de s'en convaincre :

1) a) Déterminer le PGCD des nombres 168 et 20.

b) Soit l'équation 168x + 20y = 6 dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a-t-elle des solutions ? (0,5 POINT)

c) Soit l'équation 168x + 20y = 4 dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a-t-elle des solutions ? (0,5 POINT)

2) a) Déterminer, en utilisant l'algorithme d'Euclide, et en détaillant les calculs effectués, deux entiers relatifs m et p tels que 42m + 5p = 1. (0,75 POINT)

b) En déduire deux entiers relatifs u et v tels que 42u + 5v = 2. (0,5 POINT)

c) Démontrer que le couple d'entiers relatifs (x ; y) est solution de l'équation 42x + 5y = 2 si, et seulement si, 42(x+4) = 5(34 – y). (1 POINT)

d) Déterminer tous les couples (x ; y) d'entiers relatifs solutions de l'équation 42x+5y=2. (0,75 POINT)

3) Déduire du 2) les couples (x ; y) d'entiers relatifs solutions de l'équation :

(42x + 5y – 3)(42x + 5y + 3)

[France, Septembre 2001]

D'une manière générale, une réflexion en lien avec la tâche τ' est celle relative à l'existence de solutions pour les équations en jeu dans la tâche τ. On rencontre cette réflexion dans le sujet [Polynésie, Juin2000] (pour les autres sujets concernés cf. §II.1.2.1.1 – *Recherche dans Z : existence et recherche d'une solution particulière*) à travers l'équivalence « ax+by = 60 admet au moins une solution si et seulement si le PGCD de a et b divise 60 ». La dimension organisatrice relative à l'équivalence est prise en charge dans l'énoncé par l'intermédiaire du découpage des questions : dans la question [1a] il est supposé que l'équation a une solution et dans la question 1b que le PGCD de a et b divise 60. Dans certains manuels, ce résultat apparaît généralisé au titre de corollaire du théorème de Bézout ; sur ce point, nous renvoyons au chapitre 3. Du point de vue de l'opératoire, la première implication concerne le pôle algébrique, que ce soit à travers une factorisation, pour revenir à la définition de la divisibilité, ou à travers la conservation de cette dernière par combinaisons linéaires. Dans l'implication réciproque, c'est l'identité de Bézout qui est en jeu, celle-ci étant utilisée une fois traduite la notion de PGCD via l'existence de deux entiers a' et b' premiers entre eux tels que a = da' et b = db'. Dans le cadre de la réalisation de tâche τ', la première implication peut être investie dans [France, sep2001] sur le plan heuristique en particulier : à supposer que l'équation ait une solution, on montre que le PGCD de 168 et 20 diviserait 6, ce qui conduit à une contradiction. On peut aussi diviser les membres de l'équation par le PGCD de 168, 20 et 6 puis la « plonger » dans $\frac{Z}{2Z}$ ou, sans expliciter l'outil des congruences, raisonner en termes de multiples de 2.

Au-delà du fait qu'elle apparaisse au second plan de la mise en scène de la tâche τ, nous émettons l'hypothèse que la présence de la tâche τ', tout comme celle de la question de l'existence de solutions pour les équations associées à la tâche τ, est avant tout motivée par la volonté d'évaluer la connaissance du théorème de Bézout, résultat-clef du cours d'arithmétique de terminale S (se reporter à *Recherche dans Z : existence et recherche d'une solution particulière* au paragraphe II.1.2.1.1).

II.1.2 La tâche τ

Nous recensons d'abord les différentes équations en jeu dans l'ensemble des quinze sujets où l'on rencontre la tâche τ à l'aide du tableau suivant :

<u>*SUJET*</u>		**Equations du type ax+by = c rencontrées dans l'énoncé** **(en respectant l'ordre d'apparition et les lettres employées)**
France	**Juin 2002**	6x+7y = 57 6u+7v = 1
	Sep. 2001	168x+20y = 6 168x+20y = 4 42m+5p = 1 42u+5v = 2
	Juin 2001	12x–5y = 3
	Juin 1999	$b_3x+c_3y = 1$ avec $b_n = 2\times10^n - 1$ et $c_n = 2\times10^n + 1$ (n entier naturel non nul)
Centres étrangers 1	**Juin 2001**	35x–27y = 2 35x–27y = 1
	Juin 1999	48x+35y+1

Asie	**Juin 2000**	$2688x+3024y = -3360$ $8x+9y = -10$
	Juin 1999	$8x+5y = 1$ $8x+5y = 100$
Amérique Nord	**Juin 2002**	$4p-11q = 2$
	Juin 2001	$87x+31y = 2$ $87u+31v = 1$
Pondichéry	**Mai 2001**	$11n-24m = 1$
Guadeloupe-Guyane-Martinique	**Juin 2000**	$7x-5y = 1$
	Juin 1999	$2x+3y = 78$
Polynésie	**Juin 2001**	$91x+10y = 1$ $91x+10y = 412$ $A_3x+A_2y = 3296$ avec $A_n = 3^{2n}-1$ où n est un entier naturel non nul
	Juin 2000	$ax+by = 60$ (a et b entiers naturels donnés tels que $ab\neq 0$) $24x+36y = 60$

Conformément à la méthodologie annoncée, nous mènerons l'étude de la tâche τ suivant le niveau de la résolution des équations en jeu, puis suivant celui de sa mise en scène.

II.1.2.1 Résolutions dans Z, dans N et dans un ensemble fini.

Même si, comme nous le verrons ultérieurement, l'ensemble au sein duquel les solutions sont recherchées peut être N ou encore un ensemble fini, une résolution dans Z des équations en jeu est toujours demandée (à l'exception de [Centres Etrangers 1, Juin 2001] où cet ensemble reste implicite). Une équation étant donnée, nous envisageons donc, préalablement, le cas où l'on recherche les solutions dans l'ensemble Z.

II.1.2.1.1 Résolution dans Z

Pour l'analyse mathématique de la résolution dans Z, nous renvoyons au chapitre 3. Nous redonnons néanmoins ci-après l'organigramme synthétisant les niveaux organisateur et opératoire en jeu dans la technique générale de résolution qui est enseignée en terminale S et qui est sous-jacente à tous les sujets concernés. En se rappelant que ce schéma renvoie à l'étape où l'on s'est préalablement ramené au cas où a et b sont premiers entre eux, on est conduit à se poser la question suivante : comment cette étape est-elle gérée par les auteurs des sujets où elle est nécessaire ? C'est ce point que nous examinons tout d'abord.

***Résolution dans Z** : se ramener à une équation où les entiers a et b sont premiers entre eux*

Seuls quatre sujets sur quinze mettent en scène une équation qui nécessite une telle étape : [France, sep.2001], [Polynésie, Juin 2000], [Asie, Juin 2000] et [Polynésie , Juin 2001] ; les couples (a,b) en jeu sont respectivement (168, 20), (24, 36), (2688, 3024) et (A_3,A_2) avec $A_n = 3^{2n}-1$ (n entier naturel non nul).

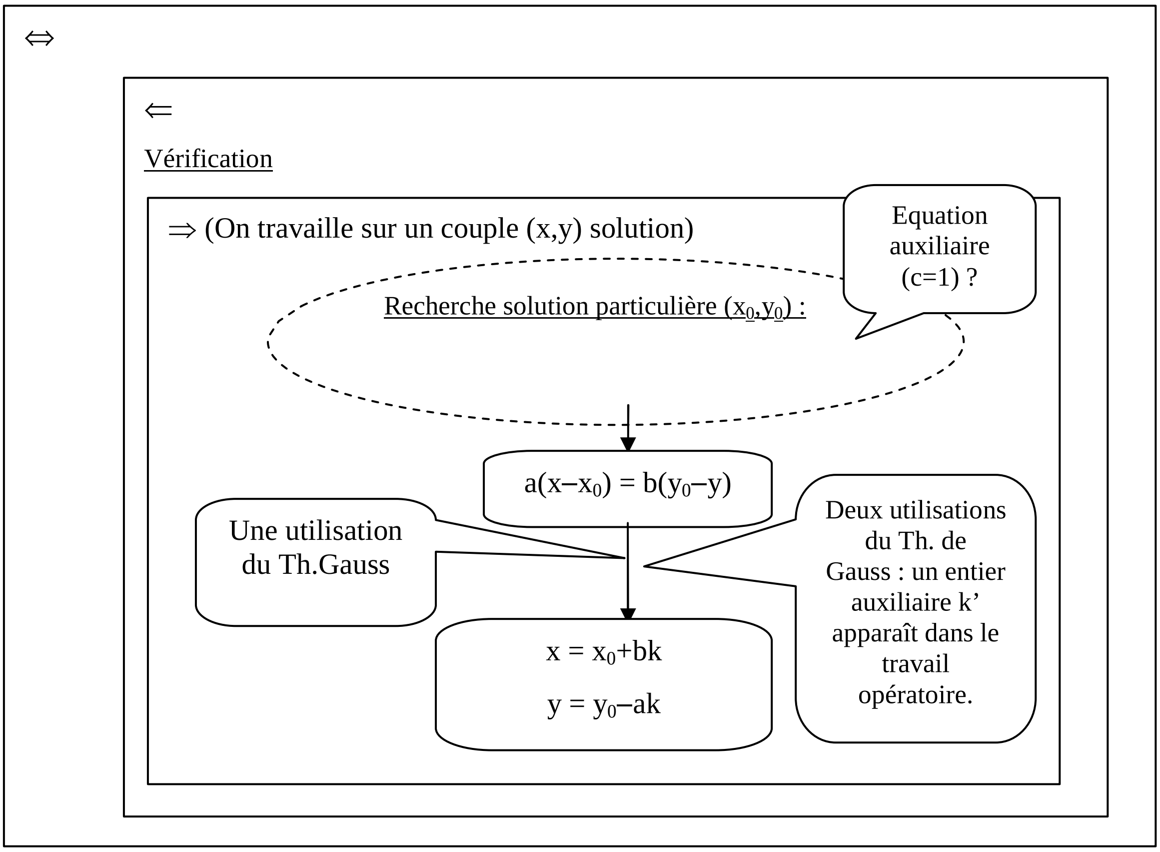
L'étape envisagée ici est liée à la détermination du PGCD de a et b ; il s'agit toujours de déterminer le PGCD de deux entiers donnés (registre numérique). Seul le sujet [Polynésie, Juin 2000] explicite ce lien qui renseigne sur le ressort opératoire du passage de l'équation initiale à l'équation dite réduite ; l'extrait suivant en témoigne :

> On considère l'équation:
> (2) 24x + 36y = 60. (x et y entiers relatifs).
> a) Donner le PGCD de 24 et 36 en justifiant brièvement.
> Simplifier l'équation (2). (0,5 pOINT)
> b) Trouver une solution évidente pour l'équation (2) et résoudre cette équation.
>
> [Polynésie, Juin 2000]

Cet extrait illustre une deuxième caractéristique qui marginalise ce sujet relativement à l'étape en jeu ici : l'équation réduite 2x+3y = 5 n'apparaît pas dans l'énoncé et l'équation initiale 24x+36y = 60 reste au cœur du questionnement. L'équation réduite est un outil implicite pour la résolution de l'équation initiale à travers la recherche d'une solution particulière.

Dans les trois autres sujets, les équations initiale et réduite apparaissent toutes les deux. L'ordre d'apparition est inversé dans [Polynésie , Juin 2001] par rapport aux deux autres ; dans ces deux sujets, on ne revient pas à l'équation initiale qui est introduite en premier. De plus, aucun lien évident n'est fait entre les équations initiale et finale dans [France, sep.2001] et [Polynésie, Juin 2001]. Concernant le sujet [Asie, Juin 2000], aucune indication n'est donnée à l'élève pour établir l'équivalence annoncée (« Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes »).

Nous allons à présent analyser la façon dont la résolution des équations en jeu est prise en charge en suivant le découpage suggéré par l'organigramme donné ci-après :



Le schéma donné ci-dessus rappelle l'organisation de résolution correspondant à la technique enseignée en terminale S. Il s'agit de trouver l'expression générale de solutions à partir d'une solution particulière et de vérifier que cette expression donne toutes les solutions. Et c'est le théorème de Gauss qui est au cœur du travail opératoire.

Le tableau qui suit est déduit de cette analyse de la tâche τ dans Z en termes de dimensions opératoire et organisatrice. Il offre une vue synthétique des éléments fournis par l'analyse *a posteriori* que nous développons ensuite.

Sujet		Existence d'une solution particulière : justification demandée	Recherche d'une solution particulière				Mise en évidence de l'utilisation de « la » solution particulière au sein de la pensée générale	Présence d'éléments opératoires autres que ceux relatifs à la recherche d'une solution particulière	Explicitation de l'équivalence
			Vérifier un couple donné	« solution évidente » demandée	Emploi algorithme d'Euclide recommandé	Rien n'est précisé			
France	**Juin 2002**					♣			
	Sep. 2001	♣			♣			♣	♣
	Juin 2001		♣						
	Juin 1999	♣			♣				
Centres étrangers 1	**Juin 2001**					♣			
	Juin 1999				♣		♣		
Asie	**Juin 2000**		♣				♣		
	Juin 1999					♣			
Amérique Nord	**Juin 2002**		♣						
	Juin 2001				♣				
Pondichéry	**Mai 2001**	♣			♣				
Guadeloupe-Guyane-Martinique	**Juin 2000**					♣			
	Juin 1999		♣					♣	♣
Polynésie	**Juin 2001**	♣				♣			
	Juin 2000	♣		♣				♣	

***Résolution dans Z** : existence et recherche d'une solution particulière*

Intéressons-nous d'abord à la phase de recherche d'une solution particulière. Dans cinq sujets, il est préalablement demandé de justifier l'existence d'une telle solution :

- « Justifier le fait que (1) possède au moins une solution. » [France, Juin 1999]
- « Enoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E). » [Polynésie, Juin 2001]

- « Montrer, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution » [Pondichéry, Mai 2001]
- « Soit l'équation $168x+20y = 4$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a-t-elle des solutions ? » [France, sep. 2001] (cf. § II.1.1)
- « On suppose que d divise 60. Prouver qu'il existe alors au moins une solution $(x_0 ; y_0)$ à l'équation (1). » [Polynésie, Juin 2000] (cf. § II.1.1)

Dans les trois premiers sujets cités, les entiers a et b correspondants sont premiers entre eux et c'est parmi ceux-ci que l'on trouve les deux sujets au sein desquels le **théorème de Bézout** est explicitement attendu (à travers le mot « théorème »). Cela appuie l'hypothèse formulée en II.1.1, à savoir que c'est la volonté d'évaluer la connaissance du théorème de Bézout, résultat-clef du cours d'arithmétique de terminale S, qui motive la demande de justification d'existence de solutions pour les équations mises en scène.

Concernant la recherche elle-même, on identifie quatre types de sujets :

- Des sujets où il est simplement demandé de vérifier qu'un couple donné est solution : [France, Juin 2001], [Amérique Nord, Juin 2002], [Asie, Juin 2000]. Le sujet [Guadeloupe…, Juin 1999] est en marge car la donnée provient du cadre géométrique qui y vit ; nous renvoyons à l'étude de l' « habillage » de la tâche analysée ici.
- Des sujets où une « solution évidente » est demandée : [Polynésie, Juin 2000] (cf. paragraphe précédent).
- Des sujets où l'emploi de l'algorithme d'Euclide est recommandé plus ou moins directement. Dans [France, Sep. 2001], [France, Juin 1999] et [Pondichéry, Mai 2001], cette recommandation est explicite. A noter que dans [Centres étrangers 1, Juin 1999] cet algorithme est spécifiquement rattaché à la recherche de PGCD :

l) a) Déterminer un couple $(x_0 ; y_0)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation :

$$48x + 35y = 1$$

(On pourra utiliser l'algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD de deux nombres).

[Centres étrangers 1, Juin 1999, question 1a]

Par contre, dans [Amérique Nord, Juin 2001], l'algorithme d'Euclide n'apparaît qu'implicitement à travers le résultat « 87 et 31 sont premiers entre eux » à démontrer :

1. Montrer que, pour tout entier relatif n, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux. (1 POINT)
2. On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Vérifier, en utilisant par exemple la question 1., que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple (u;v) d'entiers relatifs tel que $87u + 31v = 1$ puis une solution $(x_0 ; y_0)$ de (E). (1,5 POINT)

[Amérique Nord, Juin 2001, question 2a et 2b]

- Des sujets où rien n'est précisé : [France, Juin 2002], [Polynésie, Juin 2001] et [Asie, Juin 1999], [Guadeloupe…, Juin 2000] et [Centres étrangers 1, Juin 2001]

Les deux derniers groupes correspondent aux sujets où une équation du type ax+by=1 avec a et b premiers entre eux apparaît dans l'énoncé. Mis à part le sujet [Asie, Juin 1999], il s'agit d'une part de sujets où cette équation est l'unique en jeu et, d'autre part, de sujets où celle-ci est utilisée pour trouver une solution de l'équation associée ax+by=c (c > 1) (cf. *tableau recensant les équations des différents sujets*). Pour ces derniers, il est toujours explicite <u>d'utiliser la solution trouvée dans le cas où c=1 pour le cas c>1</u>. Ainsi, il n'est pas étonnant de constater que les équations en jeu dans les sujets des deux premiers groupes soient du type ax+by=c avec c>1 (a et b premiers entre eux) sans que l'équation associée ax+by=1 n'entre en scène. En effet, pour les équations de ce dernier type, l'élève dispose d'une technique générale : cette tâche peut donc être plus ou moins à sa charge (aucune indication ou algorithme d'Euclide plus ou moins indiqué). Le sujet définissant à lui seul le deuxième groupe reste cependant en marge : une équation autre que celle pour laquelle on cherche une solution particulière est implicitement utilisée ; il s'agit en effet de trouver le couple (12,12) solution de 24x+36y=60 à l'aide du couple (1,1) solution évidente de 2x+3y=5.

Le sujet [Asie, Juin 1999] est un cas unique : l'équation du type ax+by=1 (a et b premiers entre eux) est à la fois objet (une résolution complète est attendue) et outil de résolution (au service de l'équation 8x+5y=100). Les deux tâches en jeu sont déconnectées l'une de l'autre : aucune liaison n'est faite et, entre ces deux tâches, une nouvelle question qui leur est étrangère est formulée (cf. § IV).

Résolution dans Z : *utilisation d'une solution particulière pour obtenir la solution générale*

Du point de vue de la prise en charge de la composante organisatrice, deux cas sont possibles relativement à <u>l'utilisation d'une (de la) solution particulière pour résoudre les (l') équations</u> en jeu :

- Les sujets [France, Juin 2002], [France, Sep. 2001], [France, Juin 1999], [Centre étrangers 1, Juin 2001], [Pondichéry, Mai 2001], [Amérique du Nord, Juin 2001], , [Polynésie, Juin 2001], [Asie, Juin 1999], [Guadeloupe – Guyane – Martinique, Juin 2000] et [Guadeloupe – Guyane – Martinique, Juin 1999] (10 sujets sur 15) illustrent le cas extrême où rien n'est explicité : les demandes d'une solution particulière et de la résolution sont formulées dans le cadre de questions distinctes et sans expression de liaison telle que « en déduire ».
- Dans les sujets restants, soit les deux demandes sont formulées au sein d'une même phrase, soit dans deux questions successives avec l'expression « déduire de ce qui précède » [Asie, Juin 2000] ou « déduire de » [Centres étrangers 1, Juin 1999].

Concernant l'équivalence logique, celle-ci est entièrement à la charge de l'élève dans tous les sujets mis à part dans [France, Sep. 2001] et [Guadeloupe – Guyane – Martinique, Juin 1999] où elle est explicitement formulée à travers l'emploi d'un « si et seulement si ».

II.1.2.1.2 Résolution dans N – Résolution dans un ensemble fini

Une résolution dans N ou dans un ensemble fini est demandée dans plus des deux tiers des sujets étudiés ; les références sont les suivantes : [Centres Etrangers 1, Juin 2001], [Centres étrangers 1, Juin 1999], [Amérique Nord , Juin 2002], [Amérique Nord, Juin 2001], [Polynésie, Juin 2001], [Polynésie, Juin 2000], [France, Juin 2002], [France, Juin 2001], [Guadeloupe – Guyane – Martinique, Juin 2000], [Guadeloupe – Guyane – Martinique, Juin 1999] et [Asie, Juin 1999]. A l'aide du tableau donné ci-après, nous précisons pour chacun d'entre eux les ensembles (autres que Z) au sein desquels les solutions sont à chercher, tout-en rappelant les équations en jeu.

Sujet		**Equations du type ax+by = c rencontrées dans l'énoncé (en respectant l'ordre d'apparition et les lettres employées)**	**Ensemble des solutions potentielles**
France	**Juin 2002**	6x+7y = 57 6u+7v = 1	N
	Juin 2001	12x–5y = 3	N
Asie	**Juin 1999**	8x+5y = 1 8x+5y = 100	N
Centres étrangers 1	**Juin 2001**	35x–27y = 2 35x–27y = 1	Les deux conjonctions successives de deux corps célestes
	Juin 1999	48x+35y+1	$-100 \leq x \leq 100$ $-100 \leq y \leq 100$
Amérique Nord	**Juin 2002**	4p–11q = 2	N & Les six plus petits éléments d'un ensemble donné (années bissextiles dont l'écriture en base 10 est de la forme abba)
	Juin 2001	87x+31y = 2 87u+31v = 1	$0 \leq x \leq 100$
Guadeloupe-	**Juin 2000**	7x–5y = 1	N

Guyane-Martinique	**Juin 1999**	$2x+3y = 78$	$-6 \leq x \leq 21$ $-5 \leq y \leq 14$
Polynésie	**Juin 2001**	$91x+10y = 1$ $91x+10y = 412$ $A_3x+A_2y = 3296$ avec $A_n = 3^{2n}-1$ où n est un entier naturel non nul	N
	Juin 2000	$ax+by = 60$ (a et b entiers naturels donnés tels que $ab\neq0$) $24x+36y = 60$	$-10 \leq x \leq 10$

Rappelons que dans ces sujets une résolution dans Z a toujours été préalablement l'objet d'une ou plusieurs questions (mis à part [Centres Etrangers 1, Juin 2001] comme nous le mentionnions dans le paragraphe II.1.2.1). Et, à travers les nouvelles résolutions envisagées ici, c'est le **dépassement du caractère routinier de la tâche τ dans Z** qui nous intéresse tout particulièrement. Plus précisément, on s'interroge sur les conséquences de ce dépassement au niveau des composantes organisatrice et opératoire.

Une pensée organisatrice possible (et même privilégiée) à suivre est celle dont la visée est d'utiliser la résolution dans Z. Cette pensée est explicitée dans cinq sujets par l'intermédiaire de l'expression « en déduire » ([France, Juin 2001], [Amérique Nord, Juin 2002], [Asie, Juin 2000], [Guadeloupe – Guyane – Martinique, Juin 2000]) ou du mot « application » ([Amérique Nord, Juin 2001]). Ces sujets regroupent en particulier tous ceux où l'ensemble solution correspondant est infini. On constate que dans le cas où l'ensemble associé à la résolution dans N est fini ([France, Juin 2002], [Polynésie, Juin 2001] : une solution, [Asie, Juin 1999] : deux solutions), rien n'est précisé. On identifie ici une **ouverture au niveau organisateur en termes d'autonomie potentielle dévolue à l'élève**.

Prenons l'exemple du sujet [Polynésie, Juin 2001] : on peut analyser ce sujet en identifiant les résolutions dans Z et dans N comme deux problèmes distincts, c'est-à-dire sans donner à la résolution dans Z le statut de sous-problème. On propose ci-après une résolution dans N basée sur cette nouvelle pensée organisatrice :

$$91x + l0y = 412$$

d'où $91x = 2(206-5y)$.

Nécessairement 2 divise x par application du théorème de Gauss.

De plus, x et y étant des entiers naturels, $91x \leq 412$ et ainsi $x\in \{2 ; 4\}$.

Seule la valeur $x = 2$ convient ($y = 23$).

La spécificité des solutions recherchées est exploitée ici dans le travail opératoire avec la visée de limiter la recherche en majorant l'ensemble des solutions potentielles : la composante organisatrice s'identifie à une recherche exhaustive au sens large.

Ajoutons que dans ce sujet ainsi que dans [France, Juin 2002], l'unicité de la solution recherchée étant annoncée, on peut également envisager de procéder tout simplement par tests successifs de solutions potentielles jusqu'à en trouver une ; cette procédure est à rapprocher d'une recherche exhaustive au sens strict.

Toutefois, il semble peu probable qu'un élève n'utilise pas la résolution dans Z. Même si nos analyses antérieures mettent en évidence une certaine créativité des élèves, on ne peut pas effectivement sous-estimer, d'une part, le poids des effets de contrat régissant ce type d'évaluation, et d'autre part, la difficulté pour un élève de terminale S à élaborer (consciemment ou non) une autre organisation.

Lorsque l'ensemble au sein duquel on recherche les solutions est fini, aucun lien n'est fait avec la résolution dans Z ; on retrouve l'ouverture annoncée au niveau organisateur. Néanmoins, on peut raisonnablement émettre la même hypothèse que celle formulée précédemment. Contrairement aux deux sujets cités précédemment, aucune information relative au nombre de solutions n'est donnée (à l'exception de [Centres Etrangers 1, Juin 2001] et de [Amérique Nord, Juin 2002] pour lesquels cette information est contenue dans la définition des solutions à trouver). A noter que dans [Guadeloupe – Guyane – Martinique, Juin 1999], c'est précisément le nombre des solutions qui est demandé. De cette façon, et étant donnée la taille des différents ensembles finis en jeu, il semble délicat pour ces sujets (ainsi que [Asie, Juin 1999]) de procéder autrement qu'en exploitant la résolution dans Z.

Concernant la composante opératoire, que ce soit pour une recherche dans un ensemble fini ou dans N, utiliser la résolution dans Z amène à un **travail de nature algébrique sur des inéquations du type $x_0+bk \geq 0$** (resp. $y_0–ak \geq 0$).

<u>II.1.2.2 Mise en scène de la tâche τ</u>

Mener une analyse de la vie de la tâche τ dans les sujets du baccalauréat, relativement à la façon dont elle est mise en scène, équivaut à y apprécier sa place et son rôle au sein de ceux-ci. Comme nous allons le montrer, même si elle varie, cette mise en scène reste, dans l'ensemble, artificielle du point de vue mathématique. Cette observation nous conduira à pointer l'une des lois auxquelles la conception de tels corpus est assujettie.

Hiérarchisons les sujets en fonction de la richesse mathématique de la mise en scène de la tâche τ. Nous procédons à trois groupements au sein des quinze sujets où cette tâche intervient. Il y a deux positions extrêmes : d'une part des sujets où c'est la tâche τ en tant qu'objet qui est essentiellement travaillée et qui est accompagnée d'applications directes et, d'autre part, des sujets où elle constitue un outil de résolution pour un problème centré hors du champ de l'arithmétique. Entre ces deux extrémités, il y a des sujets où la tâche τ occupe une place centrale à laquelle se greffent d'autres problèmes, sans que l'on puisse parler d'applications.

Dans le premier cas mentionné, des connaissances géométriques peuvent être plus ou moins nécessaires. Il y a tout d'abord des sujets où une simple traduction est à faire pour passer d'un cadre (arithmétique ou géométrique) à un autre. [Amérique Nord, Juin 2001] illustre la position limite car la traduction est donnée :

Indication : On remarquera que le point M de coordonnées (x ; y) appartient à la droite (D) si, et seulement si, le couple (x ; – y) vérifie l'équation (E).

[Amérique Nord, Juin 2001 (extrait question 2c)]

Il en est de même dans [Polynésie, Juin 2000] mis à part que la traduction est à la charge de l'élève. L'application de la tâche τ se réduit également à une traduction entre cadres géométrique et arithmétique dans [France, 2002 (questions 1 et 2)] dont voici l'extrait correspondant :

2. Soit (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) un repère orthonormal de l'espace. On considère le plan (P) d'équation: 6x + 7y + 8z = 57. On considère les points du plan (P) qui appartiennent aussi au plan (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$). Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point. (0,75 POINT)

[France, Juin 2002 (question 2)]

Les sujets [Asie, Juin 2000] et [Centres étrangers 1, Juin 1999] peuvent ensuite être associés car l'ensemble des connaissances géométriques en jeu n'est pas aussi réduit que dans les sujets précédents. Ces deux sujets sont construits de la même façon par rapport à la tâche τ dans Z : une première partie correspondant à cette dernière est présentée dans le champ de l'arithmétique, puis on trouve une seconde partie où il s'agit d'utiliser la résolution de l'équation en jeu pour déterminer les points à coordonnées entières ([Asie, Juin 2000]), ou appartenant à un ensemble fini ([Centres Etrangers 1, Juin 1999)]), d'une droite intersection de deux plans de l'espace. Nous donnons ci-après l'énoncé des questions géométriques autres que celles où il s'agit de passer d'un cadre (arithmétique ou géométrique) à un autre :

3. Soit (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) un repère orthonormal de l'espace. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives :

x + 2y – z = - 2 et 3x – y + 5z = 0

a) Montrer que (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D). (1,5 POINT)

[Asie, Juin 2000, question3a]

2. L'espace étant rapporté à un repère orthonormal, on donne le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (48; 35; 24) et le point A de coordonnées (- 11 ; 35 ; - 13).

a) Préciser la nature et donner une équation cartésienne de l'ensemble (Π) des points M de l'espace, de coordonnées (x; y; z) tels que $\vec{u}\,.\,\overrightarrow{AM} = 0$. (1 POINT)

[Centres Etrangers 1, Juin 1999, question 2a]

Au sein des sujets où c'est la tâche τ en tant qu'objet qui est centrale et à laquelle sont ajoutées des applications directes, il y a deux sujets qui restent dans le champ de l'arithmétique :

- [France, Septembre 2001] propose, comme application de la tâche τ dans Z, la résolution dans Z de (42x+5y – 3)(42x+5y+3) = –5 qui se ramène alors à une discussion en termes de divisibilité (décompositions possibles de –5 en produit de deux entiers) laissée entièrement à la charge de l'élève.
- Dans [Asie, Juin 1999], deux applications sont en jeu : l'une concerne la notion de division euclidienne (question 2 ; cf. § IV) et l'autre un contexte de la « vie courante ». L'énoncé est le suivant :

Au VIIIème siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe? (1 POINT)

[Asie, Juin 1999, question 3b]

Le qualitatif « décousu » nous semble approprié pour caractériser ce sujet où seule la tâche τ dans Z relie les différentes parties entre elles.

Nous rattachons également à ce premier cas d'étude [Guadeloupe – Guyane – Martinique, Juin 1999]. Ce sujet est écrit d'une façon qui fait jouer à l'arithmétique le rôle d'outil au service d'un problème de géométrie plane :

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on donne le point A (12 ; 18). On désigne par B un point de l'axe (O ; $\vec{i}$) et par C un point de l'axe (O; $\vec{j}$) tels que $(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{\pi}{2}$.

On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1. Démontrer que le couple (x ; y) est solution de l'équation (E) : 2x + 3y = 78. (1 POINT)

2. On se propose de trouver tous les couples (B, C) de points ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.

a) Montrer que 1'on est ramené à l'équation (E), avec x et y appartenant à l'ensemble Z des nombres entiers relatifs. (1 POINT}

b) A partir de la définition de B et C, trouver une solution particulière (x_0 ; y_0) de (E) avec x_0 et y_0 appartenant à Z. (1 POINT)

c) Démontrer qu'un couple (x ; y) d'entiers relatifs est solution de l'équation.(E) si, et seulement si, il est de la forme (12 + 3k ; 18 – 2k), où k appartient à Z. (1 POINT)

d) Combien y a-t-il de couples de points (B, C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que :

$$-6 \leq x \leq 21 \text{ et } -5 \leq y \leq 14 \text{ ? (1,5 POINT)}$$

[Guadeloupe – Guyane – Martinique, Juin 1999]

D'un point de vue mathématique, le problème de géométrie en jeu ici constitue une application de la résolution de l'équation en jeu.

Comme nous le précisions en introduction, il y a une position intermédiaire pour la mise en scène de la tâche τ.

Une caractéristique commune à certains sujets concernés ici est un aspect « décousu », comme [Asie, Juin 1999]. [Pondichéry, Mai 2001] est constitué de deux parties et la tâche τ est au centre de la première. Cependant, il n'est pas nécessaire d'utiliser la résolution de l'équation diophantienne en jeu pour traiter la seconde partie qui concerne ici la notion de PGCD (cf. § III.2). Et, de cette façon, le seul lien existant entre ces deux parties est l'équation elle-même. [France, Juin 1999] manque également de cohésion ; l'énoncé est le suivant :

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres

$a_n = 4\times10^n - 1$, $b_n = 2\times10^n - 1$ et $c_n = 2\times10^n + 1$.

1. a) Calculer a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 et c_3. (0,25 POINT)

b) Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3. (0,5 + 0,5 POINT)

c) Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que b_3 est premier. (0,5 POINT)

d) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $b_n\, c_n = a_{2n}$. (0,25 POINT)

En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6. (0,25 POINT)

e) Montrer que PCCD (b_n, c_n) = PGCD (c_n, 2).

En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux. (0,5 + 0,5 POINT)

2. On considère l'équation:

(1) $b_3x + c_3y = 1$

d'inconnues les entiers relatifs x et y.

a) Justifier le fait que (1) possède au moins une solution. (0,5 POINT)

b) Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 ; en déduire une solution particulière de (1). (0,75 POINT)

c) Résoudre l'équation (1). (0,5 POINT)

Liste des nombres premiers inférieurs à 100

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67 ; 71; 73 ; 79; 83 ; 89 ; 97.

[France, Juin 1999]

Il nous semble impossible de définir une problématique unifiant les différentes questions entre elles. Et d'une manière générale, même si des ponts existent entre les différentes tâches en jeu dans l'ensemble du problème, ceux-ci sont en nombre insuffisant pour lui assurer une véritable cohésion. On peut considérer comme problème général la résolution de l'équation $b_nx+c_ny = 1$; la tâche τ est mise en scène via le cas particulier défini par n = 3 qui, d'un point de vue heuristique, « ouvre le chemin » pour traiter le cas général (une solution particulière serait $(10^n,-(10^n-1))$ et on procèderait de même pour obtenir la solution générale). Mais cela n'est pas abordé ici . Mais, même en adoptant cette vision globale de l'énoncé, les nombres a_n sont complètement écartés. En particulier, la tâche consistant à donner la décomposition en facteurs premiers du nombre 1999×2001 (question 1d) est déconnectée de la suite du problème où la tâche τ est mise en scène ; c'est d'ailleurs cette absence de connexion qui nous a conduite à rattacher ce sujet de baccalauréat au dernier regroupement de notre classification (cf. §IV.1).

Dans l'ensemble des sujets construits à partir de la tâche τ et de compléments, autres que des applications directes, il y a [Polynésie, Juin 2001]. Par l'intermédiaire des nombres en jeu ($A_n=3^{2n}-1$ avec n entier naturel non nul), une question de divisibilité est effectivement posée (cf. § III.1).

Nous abordons pour finir le deuxième cas extrême annoncé. Les sujets concernés sont au nombre de quatre, soit moins d'un tiers des quinze analysés :

- Dans [Centres Etrangers 1, Juin 2001], il s'agit de déterminer deux rencontres successives de deux corps célestes.
- Dans [Amérique du Nord, Juin 2002], il s'agit d'un problème de calendrier (années bissextiles de la forme abba en base 10).
- [France, Juin 2001] et [Guadeloupe – Guyane – Martinique, Juin 2000] constituent tous deux un problème de géométrie plane avec l'étude d'une rotation. Dans le premier, cette étude est menée à l'aide des nombres complexes et, dans le second, avec l'outil vectoriel.

Même avec la fonctionnalité d'outil, la tâche τ peut *a priori* occuper une place plus ou moins importante. On constate ici que, d'une façon ou d'une autre, cette tâche reste un élément essentiel dans la conception des sujets.

Cette analyse illustre à nos yeux un compromis que les auteurs de ce type de sujets cherchent à trouver. **Il semble en effet que les concepteurs de ces sujets de baccalauréat soient partagés entre la volonté d'évaluer l'élève relativement à des tâches routinières, en particulier la tâche τ dans Z, et celle de construire des sujets constituant « un tout », cohérent d'un point de vue mathématique**. Le caractère « décousu » de sujets du deuxième groupement opéré met bien en évidence la difficulté induite pour les auteurs par la recherche de cet équilibre.

II.1.2.3 La tâche τ : une synthèse

Comme cela a été précisé dès la présentation de notre classification des sujets envisagés dans cette analyse institutionnelle, la tâche τ désigne la résolution d'équations diophantiennes du type ax+by=c avec a, b et c entiers. Celle-ci peut être menée dans Z ou, de façon plus restrictive, dans N ou dans un ensemble fini de Z. C'est ainsi que, dans ce qui a précédé, nous avons parfois été amenée à préciser l'ensemble au sein duquel les solutions sont recherchées en écrivant, par exemple, « la tâche τ dans Z ».

Trois idées essentielles synthétisent l'analyse écologique (relative à l'écosystème de l'épreuve du baccalauréat) de la tâche τ : confirmation du caractère emblématique de la tâche τ dans Z, dévolution d'une autonomie quasi-totale à l'élève pour réaliser cette dernière et dépassement de son caractère routinier par l'intermédiaire des tâches τ dans N et un ensemble fini.

Avec l'analyse que nous venons de mener, nous avons **confirmation du caractère emblématique de la tâche τ dans Z** puisque, rappelons-le, celle-ci est prioritairement mise en scène par rapport aux tâches τ dans N ou dans un ensemble fini de Z. Nous choisissons en conséquence de faire un bilan de la vie de la tâche τ dans l'épreuve de spécialité du baccalauréat en nous centrant sur le cas particulier où l'ensemble en jeu est Z.

Conformément à la méthodologie suivie, on se situe dans un premier temps au niveau de la résolution elle-même. **Relativement à la tâche τ dans Z, l'autonomie laissée à l'élève est importante, tant du côté organisateur qu'opératoire**. Cela n'a rien de surprenant puisqu'il s'agit d'une tâche routinière. Précisons malgré tout que dans deux des trois sujets où l'équivalence sous-jacente est explicitée (cf. tableau en II.1.2.1.1), cela renvoie au processus dialectique existant entre les composantes organisatrice et opératoire puisque cette explicitation est la conséquence de la donnée d'un élément de nature opératoire (se reporter aux énoncés des questions correspondantes de [France, Septembre 2001] et [Guadeloupe – Guyane – Martinique, Juin 1999]).

L'étude de la mise en scène de la tâche τ atteste d'une **certaine variabilité entre les différents sujets**. Trois cas ont été rencontrés : celui où c'est la tâche τ dans Z en tant qu'objet qui est essentiellement travaillée et qui est accompagnée d'applications directes (huit sujets), un autre où cette tâche occupe une place centrale et à laquelle se greffent d'autres problèmes, sans que l'on puisse parler d'applications (trois sujets), et celui où elle constitue un outil de résolution pour un problème centré hors du champ de l'arithmétique (quatre sujets). Dans plus des deux-tiers des sujets, une réduction de l'ensemble au sein duquel les solutions sont recherchées (N ou un ensemble fini de Z) induit un dépassement du caractère routinier de la tâche τ dans Z et une ouverture au niveau organisateur. L'autonomie ainsi engendrée est cependant à relativiser compte tenu de l'enseignement reçu par les élèves de terminale S. Hors des tâches routinières, ces derniers ont en effet peu l'habitude de travailler spécifiquement au niveau de la composante organisatrice.

Concernant les quatre sujets où la tâche τ dans Z apparaît comme outil de résolution, il semble raisonnable de penser qu'ils ont été construits de telle façon qu'en particulier la tâche emblématique intervienne[31]. Comme nous l'explicitions, ces sujets sont sans doute le fruit d'un compromis trouvé par les auteurs entre la volonté d'évaluer l'élève relativement à cette tâche emblématique et celle de construire des sujets constituant « un tout », cohérent d'un point de vue mathématique. Néanmoins, notre analyse tend à montrer que la conception des sujets étudiés ici est avant tout gouvernée par la volonté de mettre en scène la tâche τ dans Z et que **le dépassement de son caractère routinier reste faible dans l'ensemble**. Seul le sujet [France, Juin 2002] en propose une extension avec la résolution d'équation du type ax+by+cz=d (a, b, c et d entiers). C'est ce sujet que nous allons étudier plus particulièrement à présent.

II.1.3 Résolution d'équations du type ax+by+cz=d avec c non nul

Le sujet [France, Juin 2002] a été envisagé jusqu'ici en se restreignant aux deux premières questions qui sont isolées et indépendantes de la question 3 à laquelle nous nous intéressons ici. L'énoncé de cette question est le suivant :

3. On considère un point M du plan (P)* dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.
a) Montrer que l'entier y est impair. (0,5 POINT)
b) On pose y = 2p + 1 où p est un entier naturel.
Montrer que le reste dans la division euclidienne de p + z par 3 est égal à 1. (0,75 POINT)
c) On pose p + z = 3q + 1 où q est un entier naturel.
Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation :

[31] Rappelons que dans [Centres Etrangers 1, Juin 2001] cela reste hypothétique du fait de l'implicite relatif à l'ensemble au sein duquel l'équation en jeu doit être résolue.

$$x + p + 4q = 7$$

En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1. (0,75 POINT)

d) En déduire les coordonnées de tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels. (1 POINT)

[France, Juin 2002]

* Extrait question 2 : Soit (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) un repère orthonormal de l'espace.

On considère le plan (P) d'équation: $6x + 7y + 8z = 57$.

L'objet de cette question est la résolution de l'équation $6x+7y+8z = 57$ dans l'ensemble N. Relativement à ce qui a été mis en évidence dans le paragraphe II.1.2.1.2, une caractéristique de la pensée organisatrice sous-jacente à cette question est que l'on ne vise pas à exploiter une résolution (ou des résolutions partielles) dans Z. Développons cette pensée tout en prenant en compte la composante opératoire : les questions (a), (b) et (c) ont pour objectif de réduire la recherche en se ramenant à la résolution d'un système de trois équations $y = 2p+1$, $z+p = 3q+1$ et $x = 7–p–4q$, d'inconnues x, p et q. En « plongeant » l'équation (E) successivement dans les corps $\frac{Z}{2Z}$ et $\frac{Z}{3Z}$, on a immédiatement les résultats annoncés, à savoir que y est impair (introduction de p) et que le reste dans la division euclidienne de p+z par 3 est égal à 1 (introduction de q pour la suite). Sans l'outil des congruences, un travail délicat de nature algébrique est à développer :

$$6x+7(2p+1)+8z = 57$$

$$6x+12p+2p+7+6z+2z = 57$$

$$2p+2z = 50–6(x+2p+z)$$

$$p+z = 24+1–3(x+2p+z)$$

$$p+z = 3(8–x–2p–z)+1.$$

Soulignons que les deux informations en jeu dans les deux premières questions (y est impair et le reste dans la division euclidienne de p + z par 3 est égal à 1) sont traduites par les auteurs pour la suite du travail opératoire ($y=2p+1$ et $p+z=3q+1$) en prenant en compte l'appartenance à N des solutions recherchées (p et q entiers naturels). La question c nécessite simplement un travail opératoire algébrique de substitution et de simplification puis la prise en compte de la spécificité « entiers naturels » des objets en jeu pour affirmer l'appartenance de l'entier q à l'ensemble {0,1}. Au stade de la dernière question (d), on débute la recherche au sens strict qui comportera un test correspondant à effectuer (appartenance au plan (P)). Cette phase de recherche exhaustive repose sur l'étude des deux cas définis par l'appartenance de q à l'ensemble {0,1} :

- le cas q = 0 donne les deux triplets (7; 1; 1) et (6; 3; 0),
- avec q = 1 on obtient les quatre solutions (3; 1 ; 4), (2; 3; 3), (1; 5; 2) et (0; 7; 1).

La résolution n'est pas terminée. Le problème de l'équivalence entre l'équation initiale $6x+7y+8z = 57$ et le système des trois équations $y = 2p+1$, $z+p = 3q+1$ et $x = 7–p–4q$ (d'inconnues x, p et q) subsiste. Il faut en effet s'assurer que les six triplets obtenus sont bien solutions de l'équation diophantienne objet du problème. Cette réciproque est laissée à la charge de l'élève : va-t-il la gérer ? On peut émettre l'hypothèse que ce problème de logique sera occulté, les élèves, pour la plupart, n'en ayant pas conscience.

En prenant en compte le reste du sujet, on constate que des éléments d'une autre organisation de résolution sont donnés. En continuité avec les questions 1 et 2, une nouvelle résolution serait la suivante : la limitation de la recherche est faite à l'aide d'une majoration sur l'une des coordonnées ; on choisit z afin de minimiser le travail. L'équation $6x + 7y + 8z = 57$ conduit à majorer z par $E(\frac{57}{8})$ c'est-à-dire 7 ; ceci fait apparaître huit équations diophantiennes. En faisant le choix de résoudre ces équations dans Z (au moins un certain nombre), on met momentanément de côté la spécificité « entiers naturels » des solutions recherchées pour opérer dans Z. Dans un dernier temps, on sélectionne parmi les solutions trouvées celles qui sont positives en menant un travail sur les inéquations ainsi définies. Cette résolution met en jeu la tâche τ à plusieurs reprises et, de cette façon, apparaît comme moins performante que celle choisie par les auteurs du sujet. L'une des huit équations diophantiennes mentionnées est celle intervenant dans la question 1 ($z = 0$) et dont la résolution apparaît dans le sujet, tel qu'il est proposé, comme une tâche isolée : il est à la charge de l'élève de l'investir dans la question 2 et les seuls indices syntaxiques sont les nombres intervenant dans les deux questions envisagées.

L'explicitation de ces deux organisations de résolution met en évidence la **rupture qui existe dans ce sujet au niveau de la dimension organisatrice** (relative au problème de la question 3). Une question émerge de ce constat : qu'est-ce qui motive cette rupture ? Nous sommes tentée de penser que la rupture mise à jour est induite à la fois par la volonté de mettre en scène la tâche τ dans Z, emblématique de la classe de terminale S, et le fait qu'il est mathématiquement plus pertinent de suivre la pensée organisatrice sous-jacente à la question 3 que celle dont des éléments sont donnés dans les questions 1 et 2 où cette tâche est huit fois en jeu. De plus, cette dernière se présente ici comme une « entrée en matière » du problème de la résolution dans N de l'équation $6x+7y+8z = 57$ (la question 3 aurait pu être posée en premier). On peut considérer que ce sujet est en marge des sujets où la tâche τ dans Z apparaît. Il nous semble en effet qu'un compromis entre la volonté d'évaluer les élèves relativement à cette tâche (dans Z) et celle de dépasser véritablement son caractère routinier a été trouvé par les auteurs (volontairement ou non), au-delà de la possibilité de construire des sujets où cette tâche intervient comme outil de résolution d'un problème hors du champ de l'arithmétique.

Enfin, notons que ce sujet amène à s'interroger sur le point suivant : le programme de la classe de terminale S rend-t-il accessible à un élève de ce niveau d'enseignement la résolution dans Z de l'équation $6x+7y+8z = 57$? La réponse est oui (en faisant jouer le rôle de paramètre à l'une des variables).

II.2 Triplets pythagoriciens et équations du type n^2-Sn+11994 (S entier naturel)

Notre classification fait apparaître [Centres Etrangers 1, Juin 2002] et [Pondichéry, Mai 1999 (Partie B)] comme des sujets exogènes. Mais cette caractéristique disparaît lorsqu'ils sont analysés suivant les dimensions organisatrice et opératoire. Les énoncés sont les suivants :

Soit p un nombre premier donné. On se propose d'étudier l'existence de couples (x; y) d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation:

$$(E) : x^2 + y^2 = p^2.$$

1. On pose p = 2. Montrer que l'équation (E) est sans solution. (0,5 POINT)

On suppose désormais $p \neq 2$ et que le couple (x; y) est solution de l'équation (E).

2. Le but de cette question est de prouver que x et y sont premiers entre eux.

a) Montrer que x et y sont de parités différentes. (0,5 POINT)

b) Montrer que x et y ne sont pas divisibles par p. (0,5 POINT)

c) En déduire que x et y sont premiers entre eux. (0,5 POINT)

3. On suppose maintenant que p est une somme de deux carrés non nuls, c'est-à-dire: $p = u^2+v^2$ où u et v sont deux entiers naturels strictement positifs.

a) Vérifier que, dans ce cas, le couple ($|u^2 – v^2|$; 2uv) est solution de l'équation (E). (0,5 POINT)

b) Donner une solution de l'équation (E) lorsque p = 5 puis lorsque p = 13. (0,5 POINT)

4. On se propose enfin de vérifier, sur deux exemples, que l'équation (E) est impossible lorsque p n'est pas somme de deux carrés.

a) p = 3 et p = 7 sont-ils somme de deux carrés? (0,5 POINT)

b) Démontrer que les équations $x^2 + y^2= 9$ et $x^2 + y^2 = 49$ n'admettent pas de solution en entiers naturels strictement positifs. (1,5 POINT)

[Centres Etrangers 1, Juin 2002]

Partie B

On considère l'équation (E) d'inconnue *n* appartenant à N :

(E) : $n^2– Sn + 11 994 = 0$ où S est un entier naturel.

On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans N.

1. Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E) ? (0,25 POINT)

Si oui, préciser la deuxième solution. (0,25 POINT).

2. Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit solution de (E) ? (0,5 POINT)

3. Montrer que tout entier *n* solution de (E) est un diviseur de 11 994. (0,5 POINT)

En déduire toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.

(0,5 POINT)

[Pondichéry, Mai 1999 (Partie B)]

Du côté de la composante opératoire, il s'agit de manipulations algébriques ou de traitements liés à des questions de divisibilité (cf. III.1), le développement de ceux-ci étant laissé à la charge de l'élève. Quant à la composante organisatrice, on constate que l'élève en est responsable lorsque la pensée la plus pertinente à développer est une recherche exhaustive (par exemple, lorsqu'il s'agit dans [Centres Etrangers 1, Juin 2002] de montrer qu'une équation n'a pas de solution (questions 1 et 4b)) ou lorsqu'il s'agit de l'aspect logique (en particulier l'équivalence en jeu dans la dernière question de [Pondichéry, Mai 1999 (Partie B)]).

Concernant plus spécifiquement [Pondichéry, Mai 1999 (Partie B)], il est à souligner qu'une tâche emblématique de l'enseignement obligatoire est sous-jacente : la résolution d'équations du second degré dans R ; le lien entre coefficients de l'équation et racines est en particulier directement en jeu. Néanmoins, cela n'est aucunement exploité par les auteurs.

III. REGROUPEMENT AUTOUR DE LA NOTION DE DIVISIBILITE

Avec le regroupement construit autour de la notion de divisibilité, 21 sujets sont concernés parmi les 29 étudiés dans cette analyse institutionnelle. Les références correspondantes sont les suivantes (à l'aide du symbole « * » nous indiquons les sujets également associés au groupement précédemment étudié (résolution d'équations diophantiennes)) :

- France : sessions de juin 2001*et 1999*,
- Asie : session de juin 2002,
- Amérique du nord : sessions de juin 2002*, 2001* et 1999,
- Amérique du sud : session de novembre 2001,
- Centres Etrangers 1 : session de juin 2002*,
- Pondichéry : sessions de juin 2002 et 2000, de mai 2001* et 1999*,
- La Réunion : session de juin 2000,
- Guadeloupe – Guyane – Martinique : sessions de juin 2001 et de septembre 2001,
- Polynésie : sessions de juin 2002, 2001*, 2000* et 1999,
- Nouvelle Calédonie : sessions de novembre 2001 et de mars 2001.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons aux questions de divisibilité rencontrées dans ces 21 sujets <u>où n'interviennent pas les notions de PGCD et PPCM</u> ; notre étude précisera en particulier la nature des tâches correspondantes.

Ensuite, nous sélectionnerons plus spécifiquement les sujets de baccalauréat où les notions mathématiques précédemment mentionnées sont mises en scène. A noter que les questions relatives à la notion de nombres premiers entre eux sont retenues au niveau de cette sélection.

III.1 Questions de divisibilité

Relativement à la notion de divisibilité, trois principaux types de tâches sont en jeu dans l'ensemble des sujets étudiés ; pour chacun d'entre eux les références des sujets correspondants seront indiquées. Ces trois types de tâches, notés respectivement T1, T2 et T3 dans la suite, sont les suivants :

- **Montrer qu'un nombre est divisible par un autre nombre** (registres respectifs numérique ou non numérique) : [France, Juin 1999], [Asie, Juin 2002], [Amérique Sud, Novembre 2001], [Centres Etrangers 1, Juin 2002], [Pondichéry, Mai 2001, Juin 2000], [La Réunion, Juin 2000], [Guadeloupe – Guyane – Martinique, Septembre 2001], [Polynésie, Juin 2002, 2001, 1999], [Nouvelle Calédonie, Novembre 2001].

- **Montrer qu'un nombre n'est pas divisible par un autre nombre** (registres respectifs numérique ou non numérique) : [Amérique Nord, Juin 1999], [Nouvelle Calédonie, Novembre 2001] et [Centres Etrangers 1, Juin 2002]. A ce type de tâches nous associons une des questions de [Amérique Nord, Juin 2002] dont l'énoncé est donné ci-après :

> Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme abba où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un chiffre quelconque. Exemples d'éléments de (E) : 2002; 3773; 9119.
> Les partie A et B peuvent être traitées séparément.
> Partie A
> […]
> b) Quel est le nombre d'éléments de (E) qui ne sont divisibles ni par 2 ni par 5 ? (0,5 POINT)
>
> [Amérique Nord, Juin 2002, Partie A, question 2b]

- **Etablir une condition nécessaire et suffisante en termes de divisibilité pour que des nombres** (registre non numérique) **soient divisibles par un autre nombre** (registre numérique) ; les extraits correspondants des sujets associés sont donnés ci-après (on reporte l'étude du dernier sujet cité au §III.2) :

> On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0=1$ et $y_0=8$ et
>
> $$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$
>
> 3. Montrer que :
> a) x_n est divisible par 3 si, et seulement si, y_n est divisible par 3. (0,75 POINT)
>
> [Asie, Juin 2002, question 3a]

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme abba où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un chiffre quelconque. Exemples d'éléments de (E) : 2002; 3773; 9119.

Les partie A et B peuvent être traitées séparément.

Partie A

[…]

3) Soit n un élément de (E) s'écrivant sous la forme abba :

a) Montrer que « n est divisible par 3 » équivaut à « a + b est divisible par 3 ». (0,5 POINT)

b) Montrer que « n est divisible par 7 » équivaut à « b est divisible par 7 ». (0,5 POINT)

[Amérique du Nord, Juin 2002, Partie A, question 3]

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

[…]

2. On pose $\alpha = n + 3$ et $\beta = 2n + 1$, et on note δ le PGCD de α et β .

a) Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ. (0,75 POINT)

b) **Démontrer que α et β sont multiples de 5 si, et seulement si, (n–2) est multiple de 5**.

(0,75 POINT)

[Polynésie, Juin 2002]

Au sein des questions de divisibilité retenues ici, on en identifie deux qui sont en marge vis-à-vis des trois types de tâches cités ci-dessus ; les extraits de sujets correspondants sont les suivants :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) [unité graphique : 6 cm].

On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par

z' = zexp($\frac{5i\pi}{6}$) et on définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :

M_0 a pour affixe z_0 = exp(i $\frac{\pi}{2}$) et, pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On appelle z_n l'affixe de M_n.

[…]

3. Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieur ou égal à p, **montrer que deux points M_n et M_p sont confondus si, et seulement si, (n — p) est multiple de 12**. (1 POINT)

[France, Juin 2001]

2. On considère l'équation:

$$(2)\ 24x + 36y = 60 \text{ (x et y entiers relatifs).}$$

[…]

c) Énumérer tous les couples (x ; y) solutions de (2) et tels que:

$$-10 \leq x \leq 10.$$

Donner parmi eux, ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5. (1 POINT)

[Polynésie, Juin 2000]

Etudions plus précisément chacun des trois types de tâches T1, T2 et T3 tels qu'ils « vivent » au sein des 21 sujets concernés par les questions de divisibilité. Pour finir l'étude des questions de divisibilité (où n'interviennent pas les notions de PGCD et PPCM), nous apprécierons l'importance tant quantitative que qualitative de ces questions par rapport aux autres.

III.1.1 Type de tâche T1

L'ensemble des éléments sous-jacents à la réalisation des tâches relatives à T1 rend compte d'une certaine diversité. On identifie en effet **différents ressorts fondamentaux** au niveau de la composante opératoire :

- Utilisation directe de la définition de la relation divisibilité ; exemple :

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0=1$ et $y_0=8$ et

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{7}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \dfrac{20}{3}x_n + \dfrac{8}{3}y_n + 5 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. a) Montrer, par récurrence, que $x_n = \dfrac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$. (0,75 POINT)

b) En déduire que $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3, pour tout entier naturel n. (0,75 POINT)

[Asie Juin 2002, question 4]

- La structuration autour des nombres premiers ; exemple :

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme abba où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un chiffre quelconque. Exemples d'éléments de (E) : 2002; 3773; 9119. Les partie A et B peuvent être traitées séparément.

Partie A

Nombre d'éléments de (E) ayant 11 comme plus petit facteur premier

1) a) Décomposer 1001 en produit de facteurs premiers. (0,25 POINT)

b) Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11.(0,5 POINT)

[Amérique Nord, Juin 2002, Partie A, question 1]

- Le décodage de l'écriture d'un nombre en base 10 ; exemple :

> Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres
>
> $$a_n = 4\times10^n - 1,\quad b_n = 2\times10^n - 1 \text{ et } c_n = 2\times10^n + 1.$$
>
> 1. a) Calculer a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 et c_3. (0,25 POINT)
>
> b) Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3. (0,5 + 0,5 POINT)
>
> [France, Juin 1999, questions 1a et 1b]

- La conservation de la divisibilité par combinaisons linéaires ; exemple :

> 2. On pose $\alpha = 2n+1$ et $\beta = n + 3$. On note d le PGCD de α et β.
>
> a) Établir une relation entre α et β indépendante de n. (0,5 POINT)
>
> b) Démontrer que d est un diviseur de 5. (0,5 POINT)
>
> c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si, et seulement si, n – 2 est multiple de 5. (0,5 POINT)
>
> [La Réunion, Juin 2000]

- Manipulations algébriques : utilisation d'identités algébriques en particulier ; exemples :

> 1. Soient a et b des entiers naturels non nuls, tels que PGCD $(a + b\ ;\ ab) = p$, où p est un nombre premier.
>
> a) Démontrer que p divise a^2. (On remarquera que $a^2 = a(a + b) - ab$). (1 POINT)
>
> [Guadeloupe – Guyane – Martinique, Septembre 2001, question 1a]

> c) Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$. (0,5 ,POINT)
>
> (On rappelle l'égalité $a^n - 1 = (a - l)(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a^0)$, valable pour tout entier naturel n non nul).
>
> [Pondichéry, Mai 2001, extrait question 2c]

- La structuration à l'aide de réseaux à travers la division euclidienne ; exemple : se reporter à l'exemple traité dans ce qui suit.

Dialectiquement, le dernier ressort mentionné est exploité au sein d'un **raisonnement par disjonction de cas** dans le sujet [Polynésie, Juin 1999] :

> 1. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $2^{3n}-1$ est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence). (0,75 POINT)
>
> En déduire que $2^{3n+1}-2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2}-4$ est un multiple de 7.
>
> (0,5+0,5 POINT)
>
> 2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2. (0,5 POINT)
>
> 3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier
>
> $$A_p=2^p+2^{2p}+2^{3p.}$$
>
> a) Si p=3n, quel est le reste de la division de A_p par 7 ? (0,25 POINT)
>
> b) Démontrer que si p=3n+1 alors A_p est divisible par 7. (0,25 POINT)

> c) Etudier le cas où p=3n+2. (0,5 POINT)
>
> 4. On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire :
>
> a=1001001000   b=1000100010000.
>
> Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p. (0,5 POINT)
>
> Sont-ils divisibles par 7 ? (0,25 POINT)
>
> [Polynésie, Juin 1999]

L'étude des nombres $A_n= 2^n+2^{2n}+2^{3n}$, abordée dans la question 3, est basée sur celle des puissances de 2 menée dans la question 2, où la notion de division euclidienne par 7 apparaît. Une disjonction de cas est sous-jacente à chacune de ces deux études (nombres A_n et puissances de 2). Néanmoins, il y a une différence essentielle : même si des éléments en sont donnés dans la question 1, la mise en œuvre de cette pensée organisatrice est à la charge de l'élève pour les puissances de 2 alors qu'elle ne l'est pas pour les nombres A_n. La question 3 est en effet scindée en trois, chaque sous-question correspondant à l'un des cas définis par la partition primaire associée à la disjonction. De plus, dans la question 1, un raisonnement par récurrence est explicitement proposé pour montrer que les nombres $2^{3n}-1$ (n entier naturel) sont divisibles par 7. On peut envisager de substituer à cette pensée organisatrice l'utilisation de l'identité algébrique $a^n-1 = (a-1)(a^{n-1}+\ldots+a+1)$. L'introduction de cet élément opératoire allègerait l'organisation de résolution et, ainsi, le lien dialectique qui existe entre les ressorts mis en jeu dans le travail opératoire et le niveau organisateur est à nouveau mis à jour. Si l'on revient à l'énoncé, le ressort algébrique est privilégié pour montrer que les nombres $2^{3n+1}-2$ et $2^{3n+2}-4$ sont également multiples de 7. Ainsi, pour l'ensemble de cette question, c'est la définition de la divisibilité en termes d'existence d'un entier tel que le produit de cet entier par 7 soit égal au nombre étudié qui guide le travail opératoire.

Du côté de la composante organisatrice, il est également à souligner qu'un **raisonnement par récurrence** est explicitement attendu pour traiter deux des questions relatives à T1 :

> 2. Montrer que les nombres entiers $A_n = 3^{2n} - 1$, où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8 (une des méthodes possibles est un raisonnement par récurrence.) (1 POINT)
>
> [Polynésie, Juin 2001]

> 1. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $2^{3n}-1$ est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence). (0,75 POINT)
>
> [Polynésie, Juin 1999]

A noter que l'emploi d'un raisonnement par récurrence est explicitement attendu six fois dans 4 des 29 sujets de baccalauréat que nous étudions ([Polynésie, Juin 1999, 2001], [Asie, Juin 2002] et [France, Juin 2001]). Comme l'illustrent les extraits donnés ci-dessus, on constate que la **mise en œuvre du raisonnement est toujours entièrement à la charge de l'élève**.

III.1.2 Types de tâche T2 et T3

Aucun élément n'est donné dans l'énoncé pour réaliser les tâches correspondant à T2. Néanmoins, la façon dont sont construits les « nombres-objets » en jeu dans [Amérique Nord, Juin 2002] (entiers naturels de la forme *abba* en base 10), et [Nouvelle Calédonie, Novembre 2001] (A= n² – 2n + 2 et B= n² + 2n + 2, n un entier naturel supérieur ou égal à 2), privilégie naturellement certains éléments pour le travail opératoire. En effet, avec [Nouvelle Calédonie, Novembre 2001] on rencontre à nouveau le pôle algébrique (cf. § III.1.1) et, dans [Amérique Nord, Juin 2002] , ce sont **les critères de divisibilité** par 2 et par 5 qui sont implicitement à utiliser.

On retrouve ce « phénomène » de **donnée implicite d'éléments de nature opératoire à travers la construction des nombres mis en scène** avec T3 ; avec [Asie, Juin 2002] c'est la conservation de la divisibilité par combinaisons linéaires qui est privilégiée :

> On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0=1$ et $y_0=8$ et
>
> $$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$
>
> 1. Montrer, par récurrence, que les points M_n de coordonnées $(x_n ; y_n)$ sont sur la droite (Δ) dont une équation est $5x - y + 3 = 0$.
>
> En déduire que $x_{n+1} = 4x_n + 2$. (0,75 + 0,25 POINT)
>
> 2. Montrer, par récurrence, que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que tous les y_n sont aussi des entiers naturels. (0,5 + 0,5 POINT)
>
> 3. Montrer que :
>
> a) x_n est divisible par 3 si, et seulement si, y_n est divisible par 3. (0,75 POINT)
>
> [Asie, Juin 2002]

Concernant le type de tâches T3, il est à souligner que l'équivalence en jeu est toujours entièrement à la charge de l'élève en ce qui concerne la composante organisatrice.

III.1.3 Importance quantitative et qualitative des questions de divisibilité

Du point de vue de l'importance tant quantitative que qualitative des questions de divisibilité au sein d'un énoncé donné, chacun des 21 sujets concernés ici peut être associé à l'un des trois cas principaux suivants : le sujet n'est pas exclusivement construit en fonction des questions de divisibilité, les questions de divisibilité sont au cœur du sujet, le sujet est construit autour de la notion de PGCD.

Le premier cas est illustré, de façon extrême, par [France, Juin 1999] où il règne un manque de cohésion au niveau organisateur (cf. § II.1.2.2). Tout comme [France, Juin 2001], l'introduction d'une question de divisibilité en jeu semble être avoir été avant tout dictée par la volonté d'évaluer les élèves sur ce type de questions. Dans ces deux sujets, l'évaluation porte également sur la tâche emblématique τ dans Z (cf. §II.1.2) mais l'habillage du dernier sujet mentionné minimise le manque de cohésion.

On retrouve cette double évaluation avec [Amérique Nord, Juin 2002]. Ce dernier est constitué de deux parties distinctes pouvant être traitées indépendamment l'une de l'autre comme cela est précisé par les auteurs ; celles-ci sont unifiées par les objets sur lesquels porte le travail : les nombres de la forme *abba* en base 10.

Dans le sujet [Polynésie, Juin 2001], la question de divisibilité (question 2) est au service de la tâche emblématique. Toutefois, l'équation diophantienne à résoudre ne concerne qu'un couple particulier par rapport au caractère général du résultat apporté par cette question. De cette façon, l'élève peut résoudre l'équation en jeu sans faire appel à ce dernier, d'autant plus qu'aucune connexion n'est établie par les auteurs.

Illustrant le deuxième cas, nous avons les sujets [Asie, Juin 2002] et [Pondichéry, Juin 2000] qui font intervenir la notion de suite : dans le premier on trouve un système de deux suites et dans le second le cas particulier d'une suite géométrique. Ces objets sont le support des questions de divisibilité qui sont au cœur des problèmes posés.

La divisibilité est également au fondement de l'ensemble des questions posées dans les deux sujets [Polynésie, Juin 1999] et [Amérique Nord, Juin 2002]. Précisons que ceux-ci s'intéressent à des ensembles de nombres caractéristiques du point de vue de leur écriture dans une base donnée : la base 2 pour [Polynésie, Juin 1999] et la base 10 pour [Amérique Nord, Juin 2002]. Dans le premier sujet cité, 2 étant un élément d'ordre 3 dans le groupe $((\frac{Z}{7Z})^*,\times)$, la partition primaire des disjonctions de cas sous-jacentes aux questions 2 et 3 est $Z= 3Z\cup(3Z+1)\cup(3Z+2)$. Dans le second, l'utilisation des critères classiques de divisibilité est privilégié.

Pour finir, nous avons [Amérique Nord, Juin 1999] construit en partie autour du thème du théorème de Wilson :

Les trois parties I, II et III peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

[…]

Partie II

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

a) L'entier (n - 1) ! + 1 est-il pair? (0,5 POINT)

b) L'entier (n - 1) ! + 1 est-il divisible par un entier naturel pair ? (0,5 POINT) .

2. Prouver que l'entier (15 - 1) ! + 1 n'est pas divisible par 15. (0,25 POINT)

3. L'entier (11 - 1) ! + 1 est-il divisible par 11 ? (0,25 POINT)

Partie III

Soit p un entier naturel non premier (p ≥ 2).

1. Prouver que p admet un diviseur q (l < q < p) qui divise (p - 1). (1 POINT)

2. L'entier q divise-t-il l'entier (p - 1) ! + 1 ? (1 POINT)

3. L'entier p divise-t-il l'entier (p - 1) ! + 1 ? (0,5 POINT)

[Amérique Nord, Juin 1999, Parties II et III]

Le troisième et dernier cas du classement envisagé ici regroupe les sujets restants qui sont construits autour de la notion de PGCD ; nous en abordons l'étude à présent.

III.2 PGCD

Comme annoncé lors de la présentation de notre classification des sujets envisagés dans cette analyse institutionnelle, nous portons notre attention sur deux types de sujets relativement à la notion de PGCD :

- les sujets dont le ou l'un des problèmes mathématiques sous-jacents associés est construit autour de la notion de PGCD : [Amérique Sud, Novembre 2001], [Pondichéry, Juin 2002, Mai 2001, 1999], [La Réunion, Juin 2000], [Polynésie, Juin 2002], [Nouvelle Calédonie, Novembre 2001],
- les sujets comportant une question relative à la notion de *nombres premiers entre eux* même si celle-ci correspond à une tâche non isolée et que rien d'autre ne le relie au groupement défini par la notion de PGCD :
    - Parmi les sujets cités précédemment : [Pondichéry, Juin 2002], [La Réunion, Juin 2000], [Polynésie, Juin 2002] et [Nouvelle Calédonie, Novembre 2001],
    - [France, Juin 1999], [Asie, Juin 2002], [Amérique Nord, Juin 2001], [Centres Etrangers, Juin 2002], [Pondichéry, Juin 2000] et [Nouvelle Calédonie, Mars 2001] (ce dernier sujet appartient également au groupement défini par les notions de PGCD et PPCM (cf. §III.3)).

Comme cela apparaît ci-dessus, cette sous-classification implique qu'un même sujet puisse être rattaché à chacun des deux types de sujets la définissant. De plus, nous ne retenons pas les sujets [France, Septembre 2001] et [Asie, Juin 2000] où seule une détermination de PDCD dans le registre numérique intervient au service de la tâche emblématique τ dans Z (cf. §II.1.2).

Nous traitons dans un premier temps le cas des 10 sujets rattachés au deuxième type de sujets retenu ici pour nous intéresser ensuite aux 7 du deuxième type (l'intersection des deux ensembles en jeu contient 3 sujets comme nous l'avons indiqué).

III.2.1 Un cas particulier : nombres premiers entre eux

Dans les 10 sujets que nous envisageons ici, l'unique tâche en jeu est de montrer que deux entiers sont premiers entre eux (dans [Nouvelle Calédonie, Mars 2001] et [Pondichéry, Juin 2002] cela n'est pas explicite) ; les couples d'entiers sont les suivants :

- (n, n+1) (n entier naturel non nul),
- (n, 2n+1) (n entier naturel supérieur ou égal à 2) : dans deux sujets distincts,
- (14n+3, 5n+1) (n entier relatif)
- u_n et u_{n+1} avec (u_n) suite numérique définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - u_n$.
- Sous l'hypothèse qu'ils ne soient pas divisibles par 3, x_n et y_n définis par les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0=1$ et $y_0=8$ et :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

- $(b_n = 2\times10^n - 1,\ c_n = 2\times10^n + 1)$ (n entier naturel non nul),
- $(3^n, 7)$ (n entier naturel),
- $(n^2-2n+2,\ n^2+2n+2)$ (n entier naturel supérieur ou égal à 2),
- x et y entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation (E) : $x^2 + y^2 = p^2$, avec p nombre premier distinct de 2.

Pour les quatre premiers couples mentionnés, aucun élément n'est donné. Cela n'est pas surprenant car, par construction des nombres, l'élément opératoire privilégié est un théorème-clef de l'enseignement de l'arithmétique en TS : **le théorème de Bézout**. Il est intéressant de renvoyer à notre expérimentation menée dans une classe de TS (cf. chapitre 8). Celle-ci a en effet mis en évidence l'association automatique qui est faite par certains élèves entre l'énoncé « premiers entre eux » et ce théorème. Notons que dans [Pondichéry, Juin 2002] le domaine de validité de l'emploi de ce théorème est explicité puisqu'il est préalablement demandé de démontrer que les nombres en jeu sont des entiers naturels.

Pour les couples restants, l'élève est plus ou moins guidé. Pour le cinquième couple donné dans la liste précédente, l'égalité $5x_n - y_n + 3 = 0$ établie dans une question précédente peut mettre sur la voie de l'utilisation de la conservation de la divisibilité par combinaisons linéaires. Pour le couple ($b_n = 2\times10^n - 1$, $c_n = 2\times10^n + 1$) (n entier naturel non nul), c'est un **raisonnement ensembliste** qui est proposé en établissant l'égalité des PGCD des couples (b_n, c_n) et (c_n, 2) . Pour (3^n, 7) (n entier naturel), l'outil mis en scène par les auteurs est la **structuration à l'aide de réseaux à travers la division euclidienne** ; le développement de l'étude n'est pas à la charge de l'élève en ce qui concerne la composante organisatrice. Pour les deux derniers couples, le fait que les nombres soient de parités différentes est exploité ; voici les deux extraits correspondants :

> Soit p un nombre premier donné. On se propose d'étudier l'existence de couples (x; y) d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation:
>
> $$(E) : x^2 + y^2 = p^2.$$
>
> […]
>
> 2. Le but de cette question est de prouver que x et y sont premiers entre eux.
>
> a) Montrer que x et y sont de parités différentes. (0,5 POINT)
>
> b) Montrer que x et y ne sont pas divisibles par p. (0,5 POINT)
>
> c) En déduire que x et y sont premiers entre eux. (0,5 POINT)
>
> [Centres Etrangers 1, Juin 2002]

> Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
>
> On considère les entiers $A= n^2 - 2n + 2$ et $B= n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD.
>
> […]
>
> 4. Dans cette question, on suppose que n est impair.
>
> a) Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair. (0,5 POINT)
>
> b) Montrer que d divise n. (0,5 POINT)
>
> c) En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux. (0,5 POINT)
>
> [Nouvelle Calédonie, Novembre 2001]

Nous envisageons à présent le cas des 7 sujets dont le ou l'un des problèmes mathématiques sous-jacents associés est construit autour de la notion de PGCD.

III.2.2 Autres cas rencontrés

La notion de nombres premiers entre eux abordée précédemment est en particulier à rattacher à la traduction du PGCD de deux entiers x et y en termes d'existence de deux autres entiers x' et y', premiers entre eux, tels que x=x'PGCD(x,y) et y=y'PGCD(x,y). Celle-ci constitue un des éléments privilégiés dans le travail opératoire des problèmes rencontrés au sein des sept sujets envisagés ici. Dans la partie A de [Pondichéry, mai 1999], par exemple, il s'agit de trouver deux entiers connaissant leur somme et leur PGCD. La traduction mentionnée permet de limiter la recherche aux couples d'entiers premiers entre eux dont la somme vaut 6, ce nouveau problème pouvant être résolu en menant une recherche exhaustive au sens strict. Soulignons que la donnée de la somme rend la structuration autour des nombres premiers non pertinente (cf. chapitre 3). Nous avons un autre exemple avec [Amérique Sud, Novembre 2001] : le problème est la détermination du PGCD de $a=2n^3+5n^2+4n+1$ et $b=2n^2+n$. Cet énoncé est marginal de part le caractère ouvert du problème posé (« Un élève affirme que le PGCD de a et b est 2n+1. Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? »). Le seul élément apporté à l'élève est le fait que a et b sont tous deux divisibles par 2n+1. A partir de là, **le théorème de Bézout** peut être le deuxième élément essentiel du travail opératoire. Cependant, dans ces deux sujets, il est à la charge de l'élève d'identifier ces deux éléments pertinents pour développer l'opératoire.

De même que dans le dernier sujet cité, le problème principal de chacun des sujets restants est la détermination du PGCD de deux entiers qui sont définis soit en fonction d'un entier naturel n, soit éléments du registre numérique ; les couples d'entiers concernés sont : $n^3+2n-3n$ et $2n^2-n-1$ ([Polynésie, Juin 2002], n^3-n^2-12n et $2n^2-7n-4$ ([La Réunion, Juin 2000]), n^2-2n+2 et n^2+2n+2 ([Nouvelle Calédonie, Novembre 2001]), $4^{n+1}-1$ et 4^n-1 ([Pondichéry, Juin 2002]) et $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$ ([Pondichéry, mai 2001]). Par construction de ces nombres, l'outil algébrique joue un rôle important et, d'une manière générale, l'élève est bien guidé à ce niveau. Le théorème de Gauss et tout particulièrement le théorème de Bézout sont des éléments privilégiés sans que cela ne soit jamais explicité.

Du côté de la composante opératoire, il est à souligner la disjonction de cas, de partition primaire $Z=2Z\cup(2Z+1)$, mise en œuvre dans [Nouvelle Calédonie, Novembre 2001] par les auteurs. Celle-ci n'est absolument pas à la charge de l'élève ; en particulier aucune question ayant le rôle de synthèse n'est posée.

Remarquons que les sujets [La Réunion, juin 2000] et [Polynésie, juin 2002] sont jumeaux ; le deuxième a sans doute été écrit à partir du premier. Cette circonstance nous est favorable relativement à l'analyse des variations dans l'autonomie laissée à l'élève. Les deux énoncés sont les suivants :

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres :

$$a = n^3 - n^2 - 12n \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 - 7n - 4.$$

1. Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par n – 4. (0,5 POINT)

2. On pose $\alpha = 2n+1$ et $\beta = n + 3$. On note d le PGCD de α et β.

a) Établir une relation entre α et β indépendante de n. (0,5 POINT)

b) Démontrer que d est un diviseur de 5. (0,5 POINT)

c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si, et seulement si, n – 2 est multiple de 5. (0,5 POINT)

3. Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux. (1 POINT)

4. a) Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD de a et b. (1 POINT)

b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$. (1 POINT) .

[La Réunion, juin 2000]

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux. (0,5 POINT)

2. On pose $\alpha = n + 3$ et $\beta = 2n + 1$, et on note δ le PGCD de α et β .

a) Calculer $2\alpha-\beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ. (0,75 POINT)

b) Démontrer que α et β sont multiples de 5 si, et seulement si, $(n-2)$ est multiple de 5. (0,75 POINT)

3. On considère les nombres a et b définis par:

$$a = n^3+2n-3n$$

$$b = n^2-n-1.$$

Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n-1)$. (0,5 POINT)

4. a) On note d le PGCD de $n(n + 3)$ et de $(2n + 1)$. Montrer que δ divise d, puis que $\delta = d$. (0,5 + 0,5 POINT)

b) En déduire le PGCD, Δ , de a et b en fonction de n. (1 POINT)

c) *Application* : Déterminer Δ pour $n = 2001$. (0,5 POINT)

Déterminer Δ pour $n = 2002$. (0,5 POINT)

[Polynésie, juin 2002]

[Polynésie, Juin 2002] s'organise autour de la détermination du PGCD des entiers $n^3+2n-3n$ et $2n^2-n-1$ en fonction de n (question 4b), entier naturel supérieur ou égal à 2 : n et n+1 étant premiers entre eux (question1), cette étude se ramène (question 4a) à celle du PGCD de n+3 et 2n+1 en fonction de n (question 2), en ayant remarqué que les entiers initiaux sont tous deux divisibles par n-1 (question3). Remarquons que le pôle « articulation de $(Z,+,\times)$ et $(Z,\leq)$ » apparaît dans la question 4a. Dans la détermination du PGCD de n+3 et 2n+1, on constate qu'il existe un degré de liberté relativement important au niveau opératoire. L'énoncé tel qu'il est posé n'induit pas en particulier l'utilisation du théorème de Gauss. De plus, en ce qui concerne la question 2b, l'explicitation des relations algébriques qui sont les clefs du travail opératoire est laissée à la charge de l'élève. En approfondissant l'analyse, on comprend que cette autonomie est dialectiquement liée, pour une part, à la gestion de l'opératoire au sein de l'établissement de l'équivalence en jeu dans cette question. Développons cette affirmation : on peut raisonner, pour l'une des implications, à partir de la relation $-\alpha+\beta = n-2$ et ensuite, pour la deuxième implication, à partir des relations $\alpha = (n-2)+5$ et $\beta = 2(n-2)+5$. De cette façon, on n'a pas besoin du théorème de Gauss, en ce qui concerne β, dans l'établissement de la deuxième implication. Par contre, en travaillant uniquement à partir des deux dernières relations mentionnées précédemment, d'une part on peut raisonner par équivalence pour α et, d'autre part, pour β il faut toujours procéder par double implication mais on est contraint d'utiliser le théorème de Gauss. Comparativement, l'autonomie dévolue à l'élève dans [La Réunion, juin 2000] est la même dans l'ensemble. Ce qui varie nettement, en particulier à travers un changement de l'ordre des questions, c'est la façon dont l'organisation de résolution sous-jacente apparaît. Le sujet de La Réunion donne dès le départ les entiers objets du problème principal à résoudre alors que dans celui de la Polynésie ce n'est que dans la troisième question. De plus, dans ce dernier, il n'est pas précisé que le PGCD cherché en fonction de n n'est pas le même suivant les valeurs de n et ce qui fait objet d'une application dans un sujet a le statut de vérification sur exemples dans l'autre. A noter que la question supplémentaire lue dans le sujet de la Polynésie renvoie simplement au fait que les nombres en jeu ont un facteur commun de plus que ceux intervenant dans l'autre sujet.

Tous les sujets étudiés ici restent dans le champ de l'arithmétique mais [Pondichéry, Juin 2002] fait vivre un jeu de cadres en faisant intervenir les suites comme outil. L'utilisation est relativement complexe de par l' « emboîtement » de deux suites : l'une géométrique est définie à partir d'une autre auxiliaire du travail opératoire.

III.3 PGCD et PPCM

Les trois sujets qui mettent en scène les notions à la fois de PGCD et PPCM sont :

- Guadeloupe – Guyane – Martinique : sessions de juin 2001 et de septembre 2001,
- Nouvelle Calédonie : session de mars 2001.

On regroupe [Guadeloupe – Guyane – Martinique, Sep.2001] et [Nouvelle Calédonie, Mars 2001] en isolant [Guadeloupe – Guyane – Martinique, Juin 2001]. Cette scission permet de pointer les différences qui existent entre ces deux sous-ensembles : d'une part au niveau du domaine mathématique concerné et, d'autre part, au niveau de l'explicitation des notions de PGCD et PPCM.

[Guadeloupe – Guyane – Martinique, Juin 2001] est un problème de géométrie de l'espace, plus précisément de <u>pavage d'objets de l'espace</u> (parallélépipèdes à base carrée dont un cube) dans le <u>registre numérique</u>. Il est complètement à la charge de l'élève d'identifier les notions de PGCD et PPCM qui lui sont sous-jacentes. Ces deux notions interviennent de façon isolée : chacune est la « notion-outil » pour résoudre un des deux types de problèmes en jeu (pavage d'un parallélépipède à base carré, dont les dimensions sont données, à l'aide de cubes d'arête de longueur maximale (PGCD) et pavage d'un cube d'arête minimale avec des parallélépipèdes à base carrée dont les dimensions sont fixées (PPCM)). Néanmoins, dans deux questions dont l'une est relative au PGCD et l'autre au PPCM, les nombres en jeu étant les mêmes (882 et 945), on peut utiliser la relation liant ces deux notions pour trouver l'une des valeurs à partir de l'autre. A partir de là, tout le travail opératoire renvoie à la structuration autour des nombres premiers.

[Guadeloupe – Guyane – Martinique, Sep.2001] et [Nouvelle Calédonie, Mars 2001] quant à eux sont construits de la même façon dans le champ de l'arithmétique. L'objet du problème principal en jeu est un système de deux équations, l'une définie à partir de la notion de PGCD et l'autre à partir de celle de PPCM, à deux inconnues. L'organisation de résolution sous-jacente aux énoncés est la suivante : dans un premier temps c'est le traitement de la contrainte définie par la notion de PGCD qui est proposé, et cela indépendamment de la deuxième contrainte qui est ensuite introduite et traitée à partir du travail développé sur la première par l'intermédiaire de l'égalité xy=PGCD(x,y)PPCM(x,y).

Concernant la première étape :

- Dans [Guadeloupe – Guyane – Martinique, Sep.2001], **la contrainte est traduite en termes d'égalité de deux PGCD.** L'élève doit montrer tout d'abord que l'un des PGCD est un diviseur commun des deux nombres qui ont pour PGCD le deuxième en jeu. Le travail opératoire est basé en partie sur l'utilisation d'une égalité algébrique donnée. Le reste de l'opératoire renvoie implicitement au lemme d'Euclide : aucune indication n'est donnée. Reste alors à montrer le caractère maximal : aucun élément n'est apporté par l'énoncé : tout l'opératoire est à la charge de l'élève.
- Alors que dans [Nouvelle Calédonie, Mars 2001], c'est la **traduction en termes d'existence d'entiers premiers entre eux x' et y' tels que x=x'PGCD(x,y) et y=y'PGCD(x,y)** qui est exploitée explicitement (cf. énoncé question 3a). Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un couple vérifie la contrainte en jeu est ainsi établie, contrairement à [Guadeloupe – Guyane – Martinique, Sep.2001] où on n'a qu'une condition nécessaire.

A propos de l'association des contraintes du système à résoudre, l'équivalence logique en jeu constitue un point délicat qui dans un sujet, comme dans l'autre, est laissé à la charge de l'élève. Plus précisément :

- Dans [Guadeloupe – Guyane – Martinique, Sep.2001], la traduction de la première contrainte conduit à un nouveau système : il s'agit de trouver les nombres dont le PPCM et le PGCD sont donnés. Cette tâche est prescrite sans qu'aucun élément ne soit fourni. L'opératoire à développer correspond, par exemple, à une utilisation de la relation liant PGCD, PPCM et produit des deux nombres à trouver, et ensuite, à un travail exploitant la structuration autour des nombres premiers. Sur le plan logique, il n'y a pas égalité de l'ensemble des solutions du nouveau système et de celui du système à résoudre. On peut penser que le nombre très limité de solutions du système intermédiaire (deux) atténue la difficulté éventuelle relative à ce point logique : l'élève peut tester ces deux solutions et en extraire la solution finale sans avoir conscience de la subtilité logique pointée ici…
- … Alors que dans [Nouvelle Calédonie, Mars 2001], il ne faut pas oublier de vérifier à la fin du raisonnement que les couples obtenus, solutions potentielles sont réciproquement solutions. La traduction de la contrainte définie à partir de la notion de PPCM (question 3b) n'est en effet que nécessaire *a priori*. Cette difficulté de nature logique est à la charge de l'élève.

Nous terminons notre analyse écologique des sujets de baccalauréat en traitant les deux derniers groupements définis par la classification présentée au début de ce chapitre.

IV. REGROUPEMENTS AUTOUR DES NOTIONS DE DIVISION EUCLIDIENNE ET PRIMALITE

L'un des deux derniers regroupements de notre classification des sujets de baccalauréat est construit autour de la notion de division euclidienne et l'autre autour de celle de primalité. Un sujet est rattaché à l'un d'eux si et seulement si la notion mathématique correspondante y est en jeu au sein d'une tâche isolée. De cette façon, seuls trois sujets, [Pondichéry Mai 1999] et [France, Juin 1999] (primalité) et [Amérique Nord, Juin 1999] (division euclidienne), sont concernés ici.

IV.1 Primalité

Pour [Pondichéry Mai 1999], l'énoncé de la question envisagée ici est le suivant :

> Partie C
>
> Comment montrerait-on que 1999 est un nombre premier ? Préciser le raisonnement employé. (1 Point)
>
> La liste de tous les entiers premiers inférieurs à 100 est précisée ci-dessous
>
> [Pondichéry Mai 1999]

Cette question renvoie au résultat admis dans la première partie du sujet dans laquelle il s'agit de déterminer l'ensemble des couples (a ; b) d'entiers naturels admettant pour somme 11994 et pour PGCD 1999 (cf. § III.2) ; l'étude du caractère premier du nombre 1999 est à rattacher au pôle « structuration des entiers autour des nombres premiers » (cf. chapitre 7) de la composante opératoire.

Ce qui est demandé à l'élève correspond à une des tâches courantes de la classe de terminale S. Et c'est sans doute pour cette raison que, mis à part la présence d'un indice (liste des nombres premiers inférieurs à 100), rien n'est indiqué quant à la pensée organisatrice à développer pour montrer que 1999 est premier. Explicitons la réponse attendue en citant les auteurs d'un manuel de terminale S :

> Le TP1 est obligatoire.
>
> TP1 – Reconnaître un nombre premier – Crible d'Eratosthène
>
> Divisions par les nombres premiers successifs
>
> Si un nombre donné N n'est pas premier alors il admet un diviseur premier. L'idée est donc de le diviser par chacun des nombres premiers qui le précèdent. Si les divisions « ne tombent pas juste », N n'a pas de diviseurs premiers, donc il est premier. Dans le cas contraire, il est non premier. Dans ce procédé, il faut connaître la liste des nombres premiers inférieurs à N, et ensuite effectuer « beaucoup » de divisions. Ce nombre de divisions peut être réduit grâce au résultat suivant.

Si N est un nombre non premier, alors N admet un diviseur différent de 1, dont le carré est inférieur ou égal à N.

[*Math, Term S, spécialité*, collection Transmath, Editions Nathan (1998)]

On précise que la démonstration du résultat mentionné est proposée sous forme d'exercice et qu'ensuite il est demandé d'écrire un « petit algorithme si le nombre N est premier ou non ».

Cette même tâche apparaît, de façon véritablement non isolée, dans [France, Juin 1999 (question 1c)] où l'on retrouve la donnée de la liste des nombres inférieurs à 100 :

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres $a_n = 4\times10^n - 1$, $b_n = 2\times10^n - 1$ et $c_n = 2\times10^n + 1$.

[…]

Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que b_3 est premier.

(0,5 POINT)

[France, Juin 1999 (question 1c)]

Ce sujet est néanmoins rattaché au groupement envisagé ici en raison de la question 1d où il s'agit de donner la décomposition en produit de nombres premiers de a_6. La tâche en jeu est déconnectée du reste du sujet, en particulier de la tâche emblématique qui entre en scène dans la question 2 (cf. §II.1.2.2). Il est à souligner que l'élève est bien guidé pour répondre à la question 1d pour laquelle le caractère premier de b_3 est à utiliser (question 1c).

Remarquons pour finir que la tâche consistant à **démontrer qu'un nombre n'est pas premier** apparaît dans [Nouvelle Calédonie, Novembre 2001]. Ce sujet est constitué de deux parties dont la première a pour objet de donner à l'élève les éléments pour démontrer que le nombre n^4+4 (n entier naturel supérieur ou égal à 2) n'est pas premier ; l'outil algébrique est tout naturellement privilégié :

Partie I

Soit x un nombre réel.

1. Montrer que $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$. (0,25 POINT)

2. En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients entiers.

(0,5 POINT)

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère les entiers $A= n^2 - 2n + 2$ et $B= n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD.

1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier. (0,25 POINT)

[…]

[Nouvelle Calédonie, Novembre 2001]

IV.2 Division euclidienne

L'énoncé auquel on s'intéresse en dernier lieu est donné ci-après :

> Les trois parties I, II, III peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.
>
> Partie I
>
> Soit E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ;10}.
>
> Déterminer les paires {a ; b} d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de ab par 11 soit 1. (1 Point)
>
> [Amérique Nord, Juin 1999]

Aucune indication n'est fournie à l'élève pour résoudre ce problème ; tout est à sa charge. Au niveau d'enseignement de la classe de terminale S, la taille de l'ensemble fini en jeu implique qu'une pensée organisatrice basée sur une recherche exhaustive de type strict soit privilégiée. Plusieurs façons de procéder sont possibles :

- On peut effectuer tous les produits possibles puis sélectionner les paires correspondant à un entier dont le reste dans la division euclidienne par 11 soit 1.
- A partir des entiers dont le reste de la division euclidienne par 11 est 1 qui sont inférieurs à 90 (plus grand entier possible ici), on sélectionne les paires recherchées en étudiant la décomposition de chacun d'eux en produit de deux entiers éléments de l'ensemble donné.

Seule la définition de la division euclidienne est utile pour résoudre ce problème.

On peut mentionner le sujet [Asie, Juin 1999] où la division euclidienne est la « notion-objet » d'une des tâches à réaliser, application de la tâche τ dans Z (cf. § II.1.2.2).

V. CONCLUSION

L'analyse institutionnelle débutée au cours de ce chapitre, et complétée par le suivant, a pour fonction de nous aider à prendre la mesure du champ réellement exploité par l'institution scolaire par rapport aux potentialités identifiées *a priori* lors de notre travail épistémologique.

Dans ce chapitre, nous nous sommes centrée sur l'épreuve de spécialité de l'enseignement de mathématiques au baccalauréat, à partir de la mise en application des programmes de 1998 (avec lesquels l'arithmétique réapparaît). Contrairement aux brochures destinées aux enseignants, dont certaines seront étudiées dans le prochain chapitre, il s'agit ici d'objets assujettis à de fortes contraintes institutionnelles. Dans un tel contexte, nous avions émis des hypothèses quant à l'exploitation des potentialités identifiées *a priori* faite par les concepteurs des sujets de baccalauréat : une centration autour de quelques tâches emblématiques du niveau d'enseignement étudié, une certaine réduction dans les sujets proposés de la richesse potentielle offerte par cet enseignement et, d'autre part, une autonomie limitée laissée à l'élève et située essentiellement, voire exclusivement, au niveau opératoire, la composante organisatrice étant « figée ». Que nous apprend l'analyse que nous avons menée ?

Notre classification suivant les problèmes mathématiques en jeu dans les 29 sujets de baccalauréat envisagés met en évidence une diversité certaine à travers l'existence de trois pôles : un pôle défini par la résolution d'équations diophantiennes (17 sujets), un autre par la notion de divisibilité (21 sujets) et un troisième qui regroupe des questions que l'on peut caractériser d'exogènes par rapport à celles rattachées aux deux premiers pôles (3 sujets). Cependant, en affinant l'analyse, nous observons que les sujets envisagés sont construits à partir d'un nombre relativement restreint de types de tâches. Il s'agit principalement, pour le premier, de la tâche emblématique et routinière de résolution d'équations diophantiennes du type ax+by=c (avec a et b entiers et c entier multiple du PGCD de a et b), que nous avons appelée dans ce chapitre *tâche τ dans Z*, et pour le second, de montrer qu'un nombre est divisible par un autre et de déterminer le PGCD de deux entiers (les registres relatifs à ces deux derniers types de tâches pouvant être numériques ou non numériques).

Nous allons ci-après faire un bilan pour chacun des deux premiers pôles, suivant la richesse observée au sein des sujets et la gestion de l'autonomie laissée à l'élève. Avant de conclure, nous porterons ensuite notre attention sur l'aspect « patchwork » de certains sujets d'arithmétique, ce qui nous permettra en particulier de revenir sur les sujets du troisième pôle défini par notre classification (ces sujets sont également associés à au moins un des deux autres pôles).

L'analyse des sujets rattachés au premier pôle défini par notre classification confirme le caractère emblématique de la tâche τ dans Z : on la rencontre dans 15 des 29 sujets étudiés ; trois cas ont été rencontrés en ce qui concerne sa mise en œuvre : celui où c'est la tâche τ dans Z en tant qu'objet qui est essentiellement travaillée et qui est accompagnée d'applications directes (huit sujets), un autre où cette tâche occupe une place centrale, d'autres problèmes s'y greffant sans que l'on puisse parler d'applications (trois sujets), et celui où elle constitue un outil de résolution essentiel pour un problème centré hors du champ de l'arithmétique (quatre sujets). Malgré la place importante qu'elle occupe, tant qualitativement que quantitativement, cette tâche n'est pas complètement standardisée : nous avons mis en évidence des leviers choisis par les concepteurs des sujets du baccalauréat pour aller au-delà de son caractère routinier. Généralement, un tel dépassement est réalisé en réduisant le domaine de résolution à N ou à un sous-ensemble fini de Z (plus de deux tiers des quinze sujets en jeu) et c'est bien souvent l'habillage du problème en jeu qui amène naturellement à cette réduction (géométrie (huit sujets), astronomie (deux sujets), contexte de la « vie courante » (un sujet)). On note une exception avec [France, Juin 2002] où le caractère routinier de la tâche τ dans Z est dépassé par une extension de celle-ci à travers la mise en scène d'un type de problèmes original par rapport à ce qui vit dans l’enseignement de l’arithmétique en classe de terminale S : la résolution d’équations du type ax+by+cz=d (a, b, c entiers premiers dans leur ensemble et d entier) dans N.

L’autonomie dévolue à l’élève pour la tâche emblématique est quasi totale, tant du côté organisateur qu’opératoire, cela étant sans aucun doute lié à son caractère routinier. Le balisage habituel qui renvoie à la technique enseignée en TS est la donnée de deux questions, l’une relative à la recherche d’une solution particulière et l’autre à celle de la solution générale. Pour ce qui est de la recherche d’une solution particulière, nous avons identifié quatre types de sujets : quatre sujets où il est simplement demandé de vérifier qu’un couple donné est solution, un sujet où une « solution évidente » est demandée, cinq sujets où l’emploi de l’algorithme d’Euclide est recommandé, plus ou moins directement, et enfin cinq sujets où l’emploi de l’algorithme d’Euclide est recommandé plus ou moins directement. A noter qu’une justification relative à l’existence d’une telle solution est en jeu dans un tiers des sujets, le théorème de Bézout étant attendu. Pour ce qui est de la recherche de la solution générale, précisons que dans deux sujets un élément de nature opératoire est donné et que cela a pour conséquence l’explicitation de l’équivalence sous-jacente du fait du processus dialectique existant entre les composantes organisatrice et opératoire. Dans le cadre du dépassement le plus fréquent du caractère routinier de la tâche emblématique envisagée (réduction de l’ensemble de résolution à N ou à un sous-ensemble fini de Z), la pensée organisatrice privilégiée par les auteurs est celle dont la visée est d’utiliser la résolution dans Z. Cette pensée est explicitée dans cinq sujets par l’intermédiaire de l’expression « en déduire » ; ces sujets regroupent en particulier tous ceux où l’ensemble solution correspondant est infini. On constate que dans le cas où l’ensemble associé à la résolution dans N est fini, rien n’est précisé et on identifie une ouverture au niveau organisateur en termes d’autonomie potentielle dévolue à l’élève. Pour ce qui de l’exception mentionnée quant à la façon d’aller au-delà de la tâche emblématique ([France, Juin 2002]), une caractéristique de l’organisation proposée est que l’on ne vise pas à utiliser de résolution dans Z. Il s’agit de mener une recherche exhaustive au sens large ; l’élève est très guidé tout au long de la phase de limitation. La recherche exhaustive au sens strict est à sa charge ainsi que la vérification relative à l’équivalence entre l’équation initiale et le système obtenu après limitation de la recherche.

Au sein du deuxième groupement de sujets qui a été défini autour de la notion de divisibilité, nous avons observé dans l’ensemble une richesse plus grande que celle rencontrée dans les sujets du premier groupement. Nous avons en effet identifié la présence de tous les pôles principaux de l’opératoire en arithmétique retenus dans le cadre de l’analyse épistémologique : utilisation de théorèmes-clefs, manipulations algébriques, différentes formes de représentation des entiers et articulation de $(Z,+,\times)$ et $(Z,\leq)$. En ce qui concerne la composante organisatrice, on identifie à plusieurs reprises un raisonnement par disjonction de cas. La démarche algorithmique de recherche exhaustive au sens strict est l’organisation la plus pertinente pour résoudre de nombreuses questions de divisibilité. L’emploi d’un raisonnement par récurrence est explicitement attendu cinq fois dans 3 des sujets du groupement étudié (ce mode de raisonnement est également explicite dans l'un des sujets du premier groupement mais dans le cadre d'une question de géométrie).

L'autonomie dévolue à l'élève au niveau de l'opératoire est très variable, contrairement à la tâche τ pour laquelle elle est quasi-totale. Cette variabilité est fonction de la complexité des traitements opératoires à développer. Par exemple, nous trouvons le cas extrême où rien n'est fourni à l'élève lorsque ce dernier a la possibilité d'utiliser le théorème de Bézout pour montrer que deux nombres sont premiers entre eux et, à l'opposé, il y a l'exemple de deux sujets où une identité algébrique, clef du travail opératoire attendu, est donnée à l'élève pour montrer qu'un entier divise un autre (registre non numérique). Pour les organisations à développer : pour le raisonnement par disjonction de cas, les deux positions extrêmes (autonomie vide ou non) ont été identifiées, quant à la recherche exhaustive au sens strict et la mise en œuvre du raisonnement par récurrence, elles sont à la charge de l'élève. On peut se demander si l'existence d'une autonomie importante laissée à l'élève témoigne d'un rapport institutionnel non problématique aux organisations en jeu, comme cela est le cas pour l'équivalence logique.

La richesse que nous avons pointée ne fait que difficilement obstacle nous semble-t-il à la conception de telles évaluations qui est fortement gouvernée par la volonté d'évaluer les élèves par rapport à des tâches emblématiques de l'enseignement concerné. De plus, nous pensons que les auteurs recherchent un compromis entre la volonté d'évaluer l'élève sur des choses différentes afin de « couvrir » au maximum le programme et celle de construire des sujets constituant « un tout », cohérent d'un point de vue mathématique ; l'une des recommandations destinées aux concepteurs de l'épreuve de mathématiques de TS explicite le premier élément du compromis mentionné :

Recommandations destinées aux concepteurs de sujets […] Le sujet doit aborder une grande partie des connaissances envisagées dans le programme. [Note de service N°2003-070 du 29-4-2003]

L'aspect « patchwork » de certains sujets rend compte selon nous de cette contrainte institutionnelle. Nous avons en particulier l'exemple des trois sujets rattachés aux deux derniers pôles de notre classification. [Amérique Nord, Juin 1999] et [Pondichéry, Mai 1999] qui sont constitués de parties indépendantes et étrangères du point de vue du problème mathématique en jeu. Quant à [France, Juin 1999], il nous est apparu impossible de définir une problématique unifiant les différentes questions entre elles ; il y a en particulier la tâche consistant à donner la décomposition en facteurs premiers du nombre 1999×2001 qui est déconnectée de la suite du problème où la tâche τ est mise en scène.

Par rapport aux prévisions que nous avons faites au début de l'étude institutionnelle présentée dans ce chapitre, nous constatons suite à celle-ci que l'évaluation d'arithmétique de l'enseignement de spécialité ne s'est pas, en quelques années, réduite autour de quelques exercices types. Même s'il y a une nette tendance à conduire à certaines tâches emblématiques telles la tâche τ mentionnée précédemment, notre analyse met en évidence une certaine diversité, tant du côté de la dimension organisatrice qu'opératoire. Néanmoins, comme nous l'avons expliqué auparavant, il apparaît clairement qu'avec le corpus étudié dans ce chapitre nous sommes dans un espace très contraint d'un point de vue institutionnel.

En nous intéressant dans le prochain chapitre à des objets beaucoup moins contraints institutionnellement que ceux envisagés jusqu'ici, nous allons compléter cette prise de la mesure du champ exploité par l'institution scolaire.

<u>CHAPITRE 6</u> :

RESSOURCES DESTINEES AUX ENSEIGNANTS

<u>CHAPITRE 6</u> : 143

RESSOURCES DESTINEES AUX ENSEIGNANTS.......... 143

INTRODUCTION.......... 144

I. RESOLUTION D'EQUATIONS DIOPHANTIENNES LINEAIRES : LA TACHE EMBLEMATIQUE. 146

I.1 DOCUMENT DU GEPS 146
I.2 BROCHURES DE L'IREM DE MONTPELLIER.......... 148

II. RESOLUTION D'EQUATIONS DIOPHANTIENNES DE DEGRE SUPERIEUR OU EGAL A 2.......... 150

II.1 TRIPLETS PYTHAGORICIENS.......... 150
II.2 REPRESENTATION DES ENTIERS COMME SOMME DE DEUX CARRES 152
II.2.1 Brochure de l'APMEP 152
II.2.2 Brochure de l'IREM de Montpellier.......... 157
II.3 AUTRES EQUATIONS DIOPHANTIENNES.......... 157
II.3.1 Document du GEPS.......... 158
II.3.2 Brochures de l'IREM de Montpellier 158

III. CONCLUSION.......... 160

INTRODUCTION

Comme annoncé en introduction, nous complétons dans ce chapitre l'analyse institutionnelle en considérant un type de corpus autre que les sujets du baccalauréat : les brochures destinées aux enseignants de terminale scientifique, telles celles éditées par les IREM et l'APMEP.

Il ne s'agit pas ici de mener une étude exhaustive : nous avons choisi un petit nombre de brochures et notre analyse elle-même de ces dernières sera centrée sur un thème. Mais, à travers cette analyse, même limitée, il s'agit pour nous d'étudier, en contrepoint au chapitre précédent, comment les potentialités de l'arithmétique pour le raisonnement mathématique sont exploitées lorsque l'espace dans lequel on se situe est relativement peu contraint si on le compare à celui des sujets de baccalauréat, et aussi comment ces potentialités sont présentées aux enseignants qui sont les destinataires de ces brochures.

Nous envisageons dans cette étude les quatre documents suivants :

- *Arithmétique – Des résultats classiques par des moyens élémentaires,* brochure de l'APMEP (Savin, 2000),
- *Arithmétique, le retour…* (Bernard, Faure, Fontana, Nogues, Nouaze & Trouche, 1995) et *Fragments d'arithmétique* (Bernard, Briant, Faure, Fontana, Nogues & Trouche, 1999), brochures de l'IREM de Montpellier,
- *Programme de spécialité – Arithmétique,* extrait de *Mathématiques – Classe terminale, série scientifique, série économique et sociale,* document réalisé par le GEPS de Mathématiques chargé par le CNP de la rédaction des nouveaux programmes du lycée, en accompagnement à ces programmes, et publié par le CNDP[32] en juillet 2002.

Ces documents renvoient à trois institutions : les IREM, l'APMEP et le GEPS qui, à des titres différents, sont engagées dans la production de ressources pour les enseignants. Il est clair qu'il s'agit là d'institutions de nature différente. Les IREM sont des structures universitaires qui ont, de par leurs statuts, des missions de formation des enseignants et de production de ressources, à la fois pour l'enseignement et la formation, liées à la recherche développée en leur sein. L'APMEP est une association de professeurs et publie, à ce titre, des ouvrages destinés à aider professionnellement les enseignants de mathématiques. Le GEPS enfin a eu la charge de l'écriture des programmes et les documents qu'il a produits sont des documents destinés à faciliter une mise en place de ces nouveaux programmes conforme au projet élaboré par leurs concepteurs. Les ressources que ces institutions produisent ont donc nécessairement un statut différent et elles ont aussi une diffusion différente. Le document du GEPS présente un caractère officiel que les autres brochures choisies ne sauraient avoir et il a été très largement diffusé auprès des enseignants de terminale. Les brochures de l'APMEP ont

[32] Centre National de Documentation Pédagogique.

un caractère national, les productions des IREM, en dépit de la structure en réseau de l'ensemble des IREM, ont souvent une diffusion plus locale. Le corpus considéré est donc à la fois limité et hétérogène. En revanche, nous faisons l'hypothèse que nous avons là un échantillon de ressources de qualité, réalisées en prenant en compte les enseignants et leurs besoins, et un corpus de ce fait adapté à notre projet d'étude.

En ce qui concerne les IREM, nous avons privilégié l'IREM de Montpellier qui n'est bien sûr pas le seul à avoir produit des ressources pour l'enseignement de l'arithmétique en TS. Nous avons fait ce choix car dans cet IREM deux brochures différentes ont été produites, la première ayant été éditée en 1995, avant donc que l'arithmétique ne réapparaisse dans les programmes et que l'on ne dispose de documents officiels. Notre propos ici n'est cependant pas de mener une étude comparative des deux brochures éditées par cet IREM mais plutôt d'explorer l'ampleur de l'éventail défini par une même institution. Précisons que s'il avait existé un document analogue au document du GEPS ayant accompagné la réintroduction de l'arithmétique en 1998, nous l'aurions bien sûr inclus dans notre corpus mais que ce n'était pas le cas.

Nous avons choisi de centrer l'analyse de ces documents sur un thème, comme précisé plus haut, pour éviter l'éparpillement. En continuité avec les problèmes mathématiques abordés dans l'analyse épistémologique, et compte-tenu du rôle important qu'il joue dans l'enseignement, le thème des équations diophantiennes s'est en quelque sorte imposé à nous. Unifiés autour de ce thème, nous allons successivement envisager la résolution des équations diophantiennes linéaires, le problème des triplets pythagoriciens, celui de la caractérisation des entiers s'écrivant comme somme de deux carrés, et d'autres équations diophantiennes telles les équations dites de Pell-Fermat et de Mordell. Soulignons que le premier sous-thème mentionné correspond à la tâche emblématique rencontrée dans le chapitre précédent. Nous nous posons naturellement les questions suivantes : rencontre-t-on ce type de tâches dans les documents retenus ? Le cas échéant, que ce soit au niveau de la résolution ou du contexte dans lequel interviennent les équations correspondantes, y est-il proposé des éléments autres que ceux identifiés dans les sujets du baccalauréat ?

Dans le corps principal de ce chapitre, nous allons donc rendre compte de la façon dont le thème des équations diophantiennes vit dans les documents retenus, et essayer de préciser la vision des potentialités de l'arithmétique pour l'enseignement en terminale S que ces documents véhiculent à la fois implicitement et explicitement, par le choix des problèmes ou activités envisagés, par la façon dont ils sont traités et par les commentaires qui accompagnent éventuellement ces traitements à un niveau plus méta-mathématique. Dans le cadre de la conclusion, nous mettrons cette analyse en regard avec une vision plus générale sur chacun des documents.

I. RESOLUTION D'EQUATIONS DIOPHANTIENNES LINEAIRES : LA TACHE EMBLEMATIQUE.

Deux institutions sont concernées quant à la présence du problème de la résolution des équations diophantiennes linéaires dans les documents qu'elles ont publiés : le GEPS et l'IREM de Montpellier ; nous débutons avec le document du GEPS.

I.1 Document du GEPS

L'étude des équations diophantiennes linéaires est initialement « plongée » dans le cadre géométrique, les coefficients en jeu n'étant pas considérés exclusivement dans le champ des entiers :

> On pourra motiver l'étude de cette équation par la recherche des points à coordonnées entières situés sur une droite dont la pente et l'ordonnée à l'origine sont des nombres rationnels.
>
> [Document accompagnement programmes, 2002]

La résolution des équations linéaires est présentée en trois temps par le groupe d'experts auteur du document étudié : avec un premier exemple, $8x+5y=1$, le cas où une solution particulière évidente existe est envisagé, avec un second exemple, $47x+35y=1$, deux méthodes sont exposées pour trouver une solution particulière (l'obtention de la solution générale n'est pas abordée) et, dans un dernier temps, une étude du cas général est menée.

Nous reproduisons ci-après le texte correspondant au premier temps :

> a) Un exemple :
>
> Si on connaît une solution, on sait trouver les autres, selon la méthode illustrée ci-dessous.
>
> L'équation $8x+5y=1$ a au moins une solution dans Z^2 : $x_0=2$, $y_0= – 3$ (point M_0 sur le dessin ci-contre). Par suite (x,y) est solution de l'équation si : $8(x – x_0)+5(y – y_0)=0$. D'où une relation de proportionnalité entre $x – x_0$ d'une part et $y – y_0$ d'autre part. Ce qui conduit à :
>
> $x=2+5k$ et $y= – 3 – 8k$, $k\in Z$.
>
> A, B, C représentés ci-contre correspondent respectivement à $k=1, -1, -2$.
>
> [Document accompagnement programmes, 2002]

On retrouve la méthode enseignée en terminale S pour obtenir les solutions à partir d'une solution particulière. Mais deux choses sont frappantes :

- Le passage crucial entre l'égalité $8(x – x_0)+5(y – y_0)=0$ et l'obtention des expressions de x et y en fonction de l'entier k est relativement flou avec une part d'implicite très importante. En particulier, le théorème de Gauss, élément opératoire essentiel, n'est pas cité. A la place, c'est la notion de relation de proportionnalité qui est mentionnée, sans doute sous l'influence du cadre géométrique privilégié ici (remarquons que le dessin accompagnant le texte fait apparaître une droite passant par l'origine « au premier coup d'œil »[33]).

- Le problème de la réciproque n'est pas explicitement traité.

Le fait que l'on s'adresse à des enseignants et non à des élèves explique peut-être ces phénomènes et il sera intéressant d'étudier si l'on retrouve de telles caractéristiques dans la suite de ce document ou dans les autres documents étudiés.

Dans un second temps, deux méthodes sont mentionnées pour déterminer une solution particulière de l'équation 47x+35y=1. La première, dite « par balayage », est la suivante :

> Par balayage. Prenons l'exemple numérique suivant :
> 47x+35y=1.
> On peut écrire y = – 47/35x + 1/35, essayer toutes les valeurs de x de 0 à 34 jusqu'à trouver une valeur entière de y. On peut démontrer que si l'on n'en trouve pas entre 0 et 34, alors l'équation n'a pas de solution. Cela conduit à un algorithme simple à mettre en place mais peu performant car induisant des temps de calcul importants lorsque l'entier b est grand.
>
> [Document accompagnement programmes, 2002]

On retrouve le changement d'écriture algébrique faisant intervenir non plus des entiers seulement mais aussi des rationnels, comme cela était le cas dans le premier temps avec l'explicitation de la pente et de l'ordonnée à l'origine de l'objet droite associé à l'équation que l'on cherche à résoudre. Il s'agit ici de mener une recherche exhaustive au sens large ; la justification de la limitation de la recherche à l'intervalle [0, 34] est laissée à la charge du lecteur. Le texte s'arrête sans que cette méthode ne soit mise en œuvre, la justification étant son faible intérêt d'un point de vue algorithmique.

La deuxième méthode est celle utilisant l'algorithme d'Euclide. Celle-ci est exposée sur l'exemple mentionné précédemment, puis les algorithmes associés (d'Euclide et « avec remontée ») sont donnés de façon décontextualisée, prêts à être implémentés en machine (sans traduction dans un langage précis). A noter que le lien est fait avec la détermination des coefficients de l'identité de Bézout. On perçoit là le souci des auteurs de mettre en jeu la dimension algorithmique de l'arithmétique, conformément à l'esprit des nouveaux programmes, et de présenter de façon détaillée deux algorithmes-clefs pour ce programme.

Dans une dernière partie, le cas général est traité. Les implicites que nous avons pointés précédemment ne se retrouvent pas ici : le théorème de Gauss est cité dans le développement opératoire et la réciproque est mentionnée (« (Réciproque évidente) »). Néanmoins, l'étape opératoire

[33] L'ordonnée à l'origine est ici égal à $\frac{1}{5}$ et l'échelle choisie est 3mm pour 1 unité.

consistant à obtenir l'expression de y n'apparaît pas ; dans le texte, le théorème de Gauss n'est explicitement utilisé qu'une seule fois : on peut penser que les auteurs privilégient donc la méthode où l'on utilise l'expression de x pour obtenir celle de y (ce qui a l'avantage de ne faire intervenir qu'un entier (k) au lieu de deux comme c'est le cas avec deux utilisations du théorème de Gauss).

Soulignons le contrat institutionnel relatif à cette généralisation, bien précisé dans ce document, montrant clairement son statut :

> L'étude systématique suivante pourra être envisagée mais aucun résultat n'est exigible.
>
> [Document accompagnement programmes, 2002]

I.2 Brochures de l'IREM de Montpellier

Nous constatons tout d'abord que cette tâche de résolution d'équations diophantiennes linéaires n'apparaît pas dans la brochure de l'IREM de Montpellier publiée avant que l'arithmétique ne soit réintroduite. Dans la deuxième, les auteurs soulignent sa forte présence dans les manuels :

> Tous les manuels traitent cette équation de façon systématique, mais tous ne donnent pas l'interprétation en termes de points à coordonnées entières d'une droite qui cependant est une des méthodes utilisées pour résoudre des équations de degré supérieur.
>
> [Bernard, Briant, Faure, Fontana, Nogues & Trouche, 1999]

Et c'est sans doute parce que les manuels en font déjà une étude systématique que ce type d'équations diophantiennes n'est pas non plus envisagé, en tant que tel, dans la nouvelle brochure, les auteurs préférant ouvrir le champ d'étude à d'autres équations diophantiennes.

La tâche emblématique est cependant présente dans la brochure, à travers la donnée de sujets d'épreuves d'entraînement au baccalauréat session 1999 ainsi que celui du baccalauréat 1999 ([France, Juin 1999] où cette tâche intervient ; cf. *chapitre 5*), ce qui ne peut nous étonner. La particularité des 5 sujets d'entraînement fournis est que leur conception n'a pu être influencée par les épreuves nationales des années précédentes puisque le programme d'arithmétique n'était pas en vigueur à l'épreuve du baccalauréat 1998.

Parmi les cinq sujets d'entraînement, deux mettent en scène la tâche emblématique ; voici les énoncés correspondants :

> 1.a. Montrer qu'il existe au moins un entier relatif x et un entier relatif y tels que : $661x - 991y = 1$.
> Déterminer une valeur de x et une valeur de y.
>
> b. Résoudre dans $Z \times Z$ l'équation $661x - 991y = 1$.
>
> c. Résoudre dans $Z \times Z$ l'équation $3305x - 4955y = 10$.
>
> 2. On considère deux suites arithmétiques (u_n) et (v_n) définies par : $u_0=3$, $v_0=2$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n+991$ et $v_{n+1} = v_n+661$.

Déterminer tous les couples (p,q) de N×N tels que $p \leq 2000$, $q \leq 2000$ et $u_p = v_q$.

[Bernard, Briant, Faure, Fontana, Nogues & Trouche, 1999]

On considère les équations (E) et (E') suivantes où x et y sont deux entiers relatifs.

(E) : $138x - 55y = 5$ (E') : $138x - 55y = 1$

1. Calculer le PGCD de 138 et 55.

2. Démontrer que si un couple (x,y) est solution de (E) alors 5 divise x.

3. a) Par l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution (x_0, y_0) de l'équation (E'). En déduire une solution (x_1, y_1) de l'équation (E).

b) Démontrer que si un couple (x,y) est solution de (E) alors $138(x_1 - x) - 55(y - y_1) = 0$.

Déterminer alors toutes les autres solutions de (E).

4. Soit d le PGCD de deux nombres x et y formant un couple (x,y) solution de (E). Quelles sont les valeurs possibles de d ? Quelles sont les solutions de (E) telles que x et y soient premiers entre eux ?

[Bernard, Briant, Faure, Fontana, Nogues & Trouche, 1999]

Analysons ces sujets en développant la méthodologie suivie pour les sujets du baccalauréat dans le chapitre précédent ; on se place initialement au niveau de la résolution des équations en jeu pour ensuite analyser ces sujets du point de vue de la mise en scène de la tâche emblématique.

Dans les deux sujets, deux couples d'équations sont en jeu mais la situation n'est pas exactement la même. Dans le premier, la résolution de la deuxième équation se ramène, par division par 5, à celle de l'équation ayant même premier membre que la première et un second membre est égal à 2 au lieu de 1 ; l'utilisation de la résolution de la première équation pour résoudre la seconde est entièrement à la charge de l'élève. De plus, dans la suite de l'énoncé, la deuxième équation n'intervient plus. Dans le second, (E') apparaît clairement comme outil de résolution de (E) (obtention d'une solution particulière).

Pour la recherche d'une solution particulière de l'équation dont le second membre est égal à 1, rien n'est indiqué dans le premier sujet tandis que, dans le second, il est indiqué d'utiliser l'algorithme d'Euclide. Soulignons que, comme dans 5 sujets parmi les 29 étudiés dans le chapitre précédent, le théorème de Bézout est attendu pour justifier préalablement l'existence d'une telle solution dans le premier sujet. On retrouve le balisage habituel avec les deux étapes suivantes : obtention d'une solution particulière puis obtention de toutes les solutions à partir de celle-ci. Dans le premier sujet, aucune connexion n'est faite. Dans le second, un élément de nature opératoire est donné. Dans les deux cas, la réciproque reste à la charge de l'élève.

Concernant la mise en scène de la tâche emblématique, le premier sujet correspond au cas où c'est elle qui, en tant qu'objet, est essentiellement travaillée et où elle est accompagnée d'une application directe (pour l'équation 661x – 991y =1 uniquement). Il s'agit ici de la détermination des rangs pour lesquels les membres de deux suites arithmétiques sont égaux avec une réduction de l'ensemble des solutions recherchées à un ensemble fini, comme cela a été identifié dans plusieurs sujets du baccalauréat. Finalement, cet énoncé est caractéristique des sujets du baccalauréat (tant au niveau de la résolution que de la mise en scène).

Dans le second sujet, la tâche emblématique peut être vue comme faisant partie de la résolution proposée par les concepteurs du système défini par l'équation (E) et l'égalité PGCD(x,y)=1. Cet énoncé est quelque peu en marge par rapport aux sujets du baccalauréat du point de vue de la mise en scène de la tâche emblématique parce que l'organisation relative à l'investissement de la résolution de (E) est en grande partie sous la responsabilité de l'élève. En effet, c'est à lui de découvrir et justifier, à partir des quelques indices donnés (question 2, isolée dans l'énoncé, et question 4), la condition nécessaire et suffisante pour que (x,y) soit solution de (E) avec x et y premiers entre eux (entier k intervenant dans les expressions de x et y dans la résolution de (E) non multiple de 5). D'ailleurs, on peut associer ce problème à l'épreuve d'entraînement analysée dans le chapitre suivant où le problème général en jeu est la résolution du système $\begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ PGCD(x,y) = 5 \end{cases}$.

Précisons le contenu des trois autres sujets d'entraînement. Deux d'entre eux sont à rattacher au regroupement que nous avions fait autour de la notion de divisibilité lors de l'analyse des sujets du baccalauréat (cf. *chapitre 5*) ; tous deux font intervenir simultanément les notions de PGCD et PPCM. Le troisième sujet, quant à lui, renvoie à la représentation des entiers dans des bases autres que la base 10.

II. RESOLUTION D'EQUATIONS DIOPHANTIENNES DE DEGRE SUPERIEUR OU EGAL A 2

Dans cette seconde partie, les équations diophantiennes en jeu sont de degré égal ou supérieur à 2. Plus précisément, nous allons aborder l'un après l'autre les thèmes suivants : triplets pythagoriciens, représentation des entiers comme somme de deux carrés, exemples d'équations de degré 2 et 3 se résolvant par recherche exhaustive ou la « méthode des perspectives », exemples d'équations de Pell-Fermat et de Mordell.

II.1 Triplets pythagoriciens

Le problème des triplets pythagoriciens est abordé dans chacun des quatre documents envisagés.

Dans le document d'accompagnement des programmes c'est une méthode géométrique qui est privilégiée en ramenant le problème à la recherche des points du cercle unité à coordonnées rationnelles positives. La résolution arithmétique que nous avons proposée dans l'analyse épistémologique (cf. *chapitre 1*) est mentionnée brièvement :

> […] il est également possible d'éviter le passage par les solutions rationnelles en partant de la relation $y^2=(z-x)(z+x)$.
>
> [Document d'accompagnement des programmes, 2002]

Deux généralisations sont mentionnées. La première concerne l'équation $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=z^2$; de même que pour les triplets pythagoriciens, l'équation est ramenée à $u_1^2+u_2^2+...+u_n^2=1$. La seconde généralisation correspond au grand théorème de Fermat, qui bien évidemment n'est pas traité !

Dans la brochure de l'APMEP, trois résolutions sont exposées après que l'étude ait été ramenée aux cas d'entiers naturels premiers entre eux dans leur ensemble et qu'il ait été démontré que l'un parmi x et y est pair ($z^2=x^2+y^2$). La première, caractérisée par l'auteur de « méthode arithmétique », correspond à celle présentée dans l'analyse épistémologique mais l'utilisation du théorème fondamental reste implicite et les congruences sont utilisées pour démontrer des résultats en termes de parité (par exemple, pour démontrer que l'équivalent de « notre entier q » est pair le fait que –1 n'est pas un carré dans $\frac{Z}{4Z}$ est utilisé). Les autres méthodes, dites « méthode algébrique » et « méthode analytique », consistent à trouver des solutions rationnelles de $x^2+y^2=1$ et à en déduire les solutions du problème initial. Pour finir, l'auteur présente la méthode géométrique des Babyloniens pour trouver des triplets solutions.

Ce thème des triplets pythagoriciens est inclus dans une partie de la brochure intitulée « Problème de Waring » dont voici l'énoncé : « Soit $k\geq 2$ un entier k, peut-on représenter tous les entiers naturels comme somme d'un nombre fixe de puissances k-ièmes ? Si oui, combien faut-il de puissances ? ». Le résultat visé est le théorème de Lagrange énonçant que tout nombre est somme d'au plus quatre carrés et la présentation de cette partie peut laisser penser que le résultat relatif aux triplets pythagoriciens en particulier est utilisé pour démontrer ce théorème :

> Le but de toute cette partie est de démontrer le théorème de Lagrange, en passant par la résolution de l'équation de Pythagore, en caractérisant au passage les entiers somme de deux carrés, tout ceci en utilisant diverses méthodes pour chacune des étapes.
>
> [Savin, 2000]

Mais lorsque l'on regarde la preuve du théorème de Lagrange, on constate qu'il n'en est rien. Par contre, la connaissance des triplets pythagoriciens intervient dans le cadre d'un prolongement proposé après que le théorème de Lagrange ait été démontré. Il s'agit du résultat à partir duquel nous avons introduit la distinction entre dimensions organisatrice et opératoire (cf. *chapitre 1*) formulé ici à l'aide de l'équation $x^4+y^4=z^2$: « Il n'y a pas de solutions entières non triviales de l'équation $x^4+y^4=z^2$, c'est-à-dire des solutions où $xy\neq 0$.». La preuve donnée correspond à celle présentée dans l'analyse épistémologique mais, de même que pour les triplets pythagoriciens, le théorème fondamental est implicitement utilisé.

Dans la brochure de l'IREM de Montpellier parue en 1995, la résolution de nature arithmétique est écartée pour privilégier une résolution de nature géométrique avec un passage par les nombres rationnels :

> Des considérations de parité et divisibilité permettent d'établir la forme de toute solution « primitive » de cette équation. Mais… $x^2+y^2=z^2$ (*) équivaut, si $z\neq 0$, à $\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2=1$ (**) et les solutions entières de (*) correspondent géométriquement aux points à coordonnées rationnelles du cercle unité.
>
> [Bernard, Faure, Fontana, Nogues, Nouaze & Trouche, 1995]

Ceci est proposé à nouveau dans la deuxième brochure mais, dans cette dernière, la résolution arithmétique est exposée. De même que dans la brochure de l'APMEP, l'utilisation du théorème fondamental reste implicite. Soulignons que la réciproque n'est pas formulée.

II.2 Représentation des entiers comme somme de deux carrés

Le problème de la caractérisation des entiers pouvant s'écrire comme somme de deux carrés est entièrement résolu par Savin dans la brochure de l'APMEP (Savin, 2000). Dans la brochure de l'IREM de Montpellier éditée en 1995, des éléments de résolution sont donnés. Nous étudions successivement le traitement de ce problème dans chacune de ces brochures.

II.2.1 Brochure de l'APMEP

Rappelons le résultat en jeu tel qu'il est formulé par Savin qui n'utilise pas la notation propre à la valuation p-adique (il en est de même dans sa preuve) :

> **54 Théorème.** Soit n un nombre entier. Alors n est somme de deux carrés si et seulement si tout nombre premier de la forme 4l+3 apparaît dans la décomposition de n avec une puissance paire.
>
> [Savin, 2000]

La preuve proposée par cet auteur est la suivante :

> **a. Condition suffisante**
>
> Tout d'abord, remarquons que la propriété « être somme de deux carrés » est une propriété multiplicative : en effet, si n et m sont somme de deux carrés, nm est aussi une somme de deux carrés, en vertu de l'identité :

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac - bd)^2+(ad+bc)^2$$

(penser aux nombres complexes). Il suffit pour montrer que les conditions du théorème 54 sont suffisantes, de montrer que les nombres 2, $p = 4l+1$, et $p^2= (4l+3)^2$ sont somme de deux carrés.

* $2 = 1^2+1^2$.
* Un nombre premier de la forme $4l+1$ est somme de deux carrés, c'est le théorème 49.
* Un nombre de la forme $(4l+3)^2$, où $4l+3$ est un nombre premier, est somme de deux carrés, car :

$$(4l+3)^2 = (4l+3)^2 +0^2.$$

On en déduit que tout produit de facteur de cette forme-là est somme de deux carrés, et donc que les conditions du théorème 54 sont suffisantes.

a. Condition nécessaire

Il est à peine plus difficile de prouver que ce sont des conditions nécessaires. On a besoin toutefois d'introduire la notion de représentation primitive.

Définition : Si $n = a^2+b^2$ avec pgcd(a,b)=1, on dit que a^2+b^2 est une représentation primitive de n.

55 Proposition. Soit n un entier divisible par un nombre premier de la forme $4l+3$. Alors n n'admet pas de représentation primitive.

Preuve : Si n admettait une représentation primitive, alors le nombre premier $p=4l+3$ vérifierait :

$$p \text{ divise } a^2+b^2, \text{ et } \operatorname{pgcd}(a,b)=1,$$

et donc p ne divise ni a, ni b. On en déduit qu'il existe un entier u tel que $b\equiv ua \bmod p$, et donc

$$a^2+b^2 \equiv a^2 (1+u^2) \equiv 0 \pmod p,$$

et donc

$$1+u^2 \equiv 0 \pmod p.$$

Ainsi (-1) est un carré mod p, mais ceci n'est possible que si p est de la forme $4l+1$: contradiction.

56 Proposition. Si p est un nombre premier de la forme $4l+3$, si c est la puissance de p dans la décomposition de n en facteurs premiers et si c est impair, alors n n'est pas somme de deux carrés.

Preuve : Supposons que $n=x^2+y^2$, et soit d=pgcd(x,y). Alors on peut écrire

$$x=da, \quad y=db, \quad \operatorname{pgcd}(a,b)=1,$$

Et donc

$$n=d^2 (a^2+b^2) = d^2N.$$

Si γ est la puissance de p dans d, alors la puissance de p dans N est $c - 2\gamma > 0$ car c est impair. On en déduit que N est un entier admettant une représentation primitive, divisible par $p = 4l+3$: contradiction.

Ainsi, le théorème 54 est entièrement démontré, et la caractérisation des entiers qui sont somme de deux carrés est complète.

[Savin, 2000]

Avant de donner celui associé à la preuve de Savin, nous reproduisons ci-après l'organigramme que nous avions donné dans le chapitre 4 relativement à la démonstration que nous avions proposée lors de l'analyse épistémologique. Il s'agit ici d'un niveau de description où le lemme 1 (*Soit $p \geq 3$ un nombre premier, -1 est un carré dans* $\frac{Z}{pZ}$ *si et seulement si* $p \equiv 1[4]$.) et le lemme 2 (*Soit* $N=a^2+b^2$ *et l deux éléments de* Σ *tels que* $l=x^2+y^2$ *soit un diviseur premier de N. Alors* $\frac{N}{l}$ *est aussi un élément de* Σ.) fonctionnent comme opératoire encapsulé (c'est-à-dire que leurs démonstrations restent totalement implicites) :

$\Leftrightarrow$

Congruences

$\Rightarrow$

Récurrence Forte

Structuration autour nbs premiers & Conservation relation divisibilité par combinaisons linéaires

Raisonnement par l'absurde

$\frac{Z}{pZ}$ *est un corps*

Lemme 1

$\Leftarrow$

Méthode spécifique aux anneaux factoriels

*Identité de Lagrange**

Disjonction de cas

(Partition primaire** :

$Z = 4Z \cup (4Z+1) \cup (4Z+2) \cup (4Z+3)$)

<u>Deux premiers cas :</u> *Simples manipulations algébriques (décomposition en somme de 2 carrés)*

<u>Troisième cas</u> :

Descente infinie

*Lemme 1***

Raisonnement par l'absurde

Lemme 2*

$\Leftrightarrow$

Congruences

$\Rightarrow$

Contraposée

(Proposition 56)

Raisonnement absurde

Notion de représentation primitive
Structuration autour nbs premiers
Ordre naturel (en lien avec cette structuration)

Raisonnement absurde

(Proposition 55)

Notion de représentation primitive

$\frac{Z}{pZ}$ *est un corps*

Théorème43(Lemme 1)

$\Leftarrow$

Méthode spécifique aux anneaux factoriels

*Identité de Lagrange**

Disjonction de cas

(Partition primaire** :

$Z = 4Z \cup (4Z+1) \cup (4Z+2) \cup (4Z+3)$)

Deux premiers cas : *Simples manipulations algébriques (décomposition en somme de 2 carrés)*

Troisième cas : *Théorème 49*

Par simple comparaison de ces deux organigrammes, une première distinction entre les deux preuves, se situant dans l'établissement du caractère nécessaire de la condition en jeu, apparaît : nous avions suivi un raisonnement par récurrence alors que dans la preuve envisagée ici, il s'agit d'un raisonnement par contraposée. Nous retrouvons par contre la méthode propre aux anneaux factoriels pour le caractère suffisant ainsi que la disjonction de cas qui lui est associée (une différence existe néanmoins car Savin considère pour le troisième cas $(4l+3)^2$, où $4l+3$ est un nombre premier, au lieu de ce dernier). Un deuxième point est à souligner, nous semble-t-il : la complexité organisatrice qui naît dans le jeu opératoire « bascule » en quelque sorte d'une preuve à l'autre. D'une part, en effet, le troisième cas de la disjonction correspond, avec un phénomène d' « encapsulation », dans la nouvelle preuve à un théorème (théorème 49) ; la descente infinie et le raisonnement par l'absurde disparaissent. D'autre part, du côté de la condition nécessaire, un deuxième raisonnement par l'absurde apparaît. Soulignons enfin que tout l'opératoire associé à l'établissement de ce caractère nécessaire est contenu dans une proposition (proposition 56) : on retrouve les ressorts opératoires fondamentaux rencontrés dans la preuve que nous avons proposée dont en particulier le lemme 1 (théorème 43) ; un nouveau ressort est la notion de représentation primitive.

Ceci correspond à un premier niveau de description, qui schématise l'articulation organisateur/opératoire dans la démonstration rencontrée dans la brochure de l'APMEP, les théorèmes 49 et 43 (« notre » lemme 1) étant considérés comme des énoncés pré-établis disponibles. Nous zoomons à présent sur ces résultats afin de faire apparaître un second niveau de description.

Fidèle à l'esprit de conception de la brochure, l'auteur propose plusieurs démonstrations des théorèmes 49 et 43 : respectivement 5 et 3. Nous considérons tout d'abord le théorème 49.

Savin propose une première preuve utilisant les entiers de Gauss, une seconde utilisant un théorème d'approximation rationnelle[34], une troisième reposant sur le principe des tiroirs (cf. *chapitre 3, §I.2.4*) associée à la précédente où le théorème de Thue[35] remplace celui d'approximation rationnelle, une quatrième par l'absurde et minimalité et une cinquième utilisant les réseaux dans le plan. Nous centrons notre attention sur la quatrième preuve afin de faire le parallèle avec celle que nous avons proposée (et qui apparaît dans la preuve principale elle-même). Notons tout d'abord que l'auteur parle de « méthode par descente » pour désigner un raisonnement par l'absurde et minimalité. Du côté opératoire, on retrouve « notre » lemme 1, par contre ce qui correspond à « notre » lemme 2 n'est pas encapsulé et ainsi, en particulier, l'identité de Lagrange, ressort opératoire essentiel de ce lemme, apparaît.

Pour le théorème 43, qui n'est autre que ce que nous avions appelé lemme 1, trois preuves sont données dans la brochure étudiée : la première met en scène la théorie des groupes, la seconde le théorème de Wilson et la troisième le petit théorème de Fermat en travaillant sur les zéros de polynômes. La preuve que nous avions donnée correspond à un mélange des deux premières mentionnées. En effet, pour la condition nécessaire (*Soit $p\geq 3$ un nombre premier, -1 est un carré dans* $\frac{Z}{pZ}$ *si $p\equiv 1[4]$*.) nous avons utilisé le théorème de Lagrange et, pour la condition suffisante, le théorème de Wilson.

De même que le problème des triplets pythagoriciens (cf. §II.1), la question de représentation des entiers comme somme de deux carrés est abordée par l'auteur dans le cadre d'un problème plus

[34] Si $\xi\in R$, et si $n>0$ est un entier, il existe une fraction irréductible $\frac{h}{k}$ telle que : $0<k\leq n$ et $\left|\xi-\frac{h}{k}\right|\leq\frac{1}{k(n+1)}$.

[35] Soit $n\geq 2$ un nombre entier, et a un entier premier avec n. Il existe deux entiers x et y, tels que $0< x\leq\sqrt{n}$ et $0< y\leq\sqrt{n}$, et qui vérifient : $ax\equiv y \pmod n$ ou $ax\equiv -y \pmod n$.

général : le *problème de Waring.* Comme nous l'expliquions au sujet du résultat relatif aux triplets pythagoriciens, le résultat-clef du chapitre « Problème de Waring » est le théorème de Lagrange qui énonce que tout nombre entier est somme d'au plus quatre carrés. La même critique est à faire : la présentation peut laisser penser que pour démontrer le théorème de Lagrange l'auteur va utiliser le résultat relatif aux sommes de deux carrés, ce qui n'a pas lieu. Par contre, la preuve qu'il développe entièrement fait apparaître un raisonnement par l'absurde et minimalité avec pour pensée organisatrice générale un jeu d'extension-réduction (méthode propre aux anneaux factoriels) et en cela elle est associée par l'auteur (« ressemble très fortement ») à celle dite « par descente » du théorème 49.

II.2.2 Brochure de l'IREM de Montpellier

Des éléments relatifs au problème de la caractérisation des entiers s'écrivant comme somme de deux carrés sont donnés à deux reprises dans le document envisagé à présent.

La première fois, ces éléments apparaissent dans le cadre de l'étude du problème de trouver les entiers exprimables comme la somme de deux cubes de deux façons différentes. Seule la question de trouver <u>le plus petit</u> tel entier autre que 1729 est traitée. Cela permet aux auteurs de proposer une résolution de nature algorithmique avec implémentation de l'algorithme en machine. C'est dans le cadre d'une remarque que le problème des sommes de deux carrés est mentionné. Les auteurs indiquent en effet que l'algorithme peut être facilement transposé (mais il s'agit alors de trouver des solutions sans pouvoir se diriger vers une résolution du problème général auquel nous nous intéressons ici).

La deuxième fois, le problème que nous étudions apparaît véritablement. Le problème de caractériser les entiers somme de deux carrés entre en scène lors de l'étude d'une équation de Mordell (cf. §II.3.2.2). Les auteurs renvoient alors à l'un des livres d'arithmétique de M.Guinot (Guinot, 1993) :

> Il est difficile d'exposer la réponse à ce problème complexe dont M.Guinot traite longuement dans son livre déjà cité.
>
> [Bernard, Faure, Fontana, Nogues, Nouaze & Trouche, 1995]

Seul le résultat ainsi que l'identité dite de Fibonacci, que nous avons appelée identité de Lagrange, sont donnés.

II.3 Autres équations diophantiennes

Relativement au thème de la résolution d'équations diophantiennes autres que celle envisagées jusqu'à présent, nous étudions successivement le document d'accompagnement des programmes et les brochures de l'IREM de Montpellier.

II.3.1 Document du GEPS

Dans la partie intitulée « Equations diophantiennes » du document étudié, il y a comme nous l'indiquions en introduction un premier court paragraphe que nous reproduisons ci-après :

> 1) On pourra commencer par étudier quelques équations dont le traitement est simple :
> $5x^2 + y^2 = 45$ (peut se résoudre par essais successifs puisque x et y sont bornés).
> $2x^2 - y^2 = 5$. En raisonnant modulo 5, on montre qu'il n'y a pas de solution.
> $7x^2 + 2y^2 = 3$. En raisonnant modulo 7, on montre qu'il n'y a pas de solution.
> En dehors des cas où on peut balayer en un temps manifestement court l'ensemble des nombres où on peut trouver la solution, serait-il plus simple de démontrer qu'il n'y a pas de solutions que de les trouver toutes ? Les exemples donnés ci-dessous illustrent cette interrogation.
> [Document accompagnement programmes, 2002]

Nous identifions ici deux organisations de résolution mentionnées dans l'analyse épistémologique : la recherche exhaustive au sens large et la « méthode des perspectives » dans le cas particulier où il suffit d'envisager une seule relation modulo n pour résoudre l'équation en jeu. Rappelons que cette dernière consiste à considérer une même équation modulo différents entiers, afin de déterminer des contraintes sur les solutions éventuelles permettant de limiter la recherche de ces solutions ou de montrer l'impossibilité d'en trouver. (cf. *chapitre 2 §II.1.3*).

II.3.2 Brochures de l'IREM de Montpellier

Dans l'ensemble constitué des deux brochures de l'IREM de Montpellier, le problème de la résolution d'une équation dite de Pell-Fermat et celui d'une équation dite de Mordell font l'objet d'une étude approfondie. Le premier, rencontré dans la brochure parue en 1999, est mis en scène par les auteurs pour illustrer la méthode de descente infinie. Ainsi, au-delà de l'analyse de la résolution de l'équation de Pell-Fermat, il s'agit d'étudier la vie de l'invention de Fermat.

II.3.2.1 La descente infinie

Dans la brochure la plus récente, nous identifions à deux reprises une utilisation de la descente infinie (à visée négative) ainsi que de la méthode associée pour résoudre des équations diophantiennes que nous avons présentée dans l'analyse épistémologique (cf. *chapitre 2 §I.3.2*).

L'invention de Fermat est introduite sur l'exemple de l'irrationalité de $\sqrt{2}$; les auteurs la présentent en tant que méthode, donc en particulier sans la réduire à la propriété « Toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie ». Après avoir exposé la preuve correspondante, ils justifient leur choix par rapport à la preuve dite classique :

> En conclusion, si la démonstration classique de « $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel », qui fait intervenir la parité, est peut-être plus rapide, celle-ci présente l'avantage d'une recherche de transformation qui convient, et d'un lien avec les graphiques.
>
> [Bernard, Briant, Faure, Fontana, Nogues & Trouche, 1999]

La recherche de la transformation est exposée pas à pas après que sa forme générale ait été donnée sans détail. Cette transformation est réinvestie immédiatement pour résoudre l'équation de Pell-Fermat $y^2 - 2x^2 = 1$ en utilisant la méthode de résolution d'équations diophantiennes que nous avons présentée lors de l'analyse épistémologique.

Ces deux catégories organisatrices (descente infinie (à visée négative) et méthode associée pour résoudre des équations diophantiennes) sont utilisées dans le cadre de la résolution du problème suivant[36] : *Soient a et b deux entiers positifs, il s'agit de prouver que, dès que* $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ *est un entier, c'est un carré d'entier*. De même que précédemment, la résolution choisie plonge la recherche d'une solution plus petite associée au processus de descente (infinie ou celle associée au processus de remontée définie par une relation de récurrence) dans le cadre de la géométrie analytique.

II.3.2.2 Une équation de Mordell

Une longue partie de la première brochure de l'IREM de Montpellier est consacrée à la résolution de l'équation $x^3=y^2+2$. La longueur de cette partie est liée à son originalité de conception. Les auteurs ont en effet choisi d'exposer successivement, relativement à ce problème, deux solutions erronées puis des éléments de résolution fournis par des élèves de terminale S, des résultats de recherches algorithmiques proposés par ces premiers, une première solution générale proposée par un enseignant puis son adaptation pour des élèves de TS et, enfin, d'autres pistes fruits du travail bibliographique des auteurs de la brochure. Cette partie est en fait le récit du travail d'un des auteurs de la brochure auquel l'un de ses élèves avait posé le problème trouvé dans un livre de Warusfel[37].

Les erreurs des solutions proposées par les élèves sont, pour l'une, une factorisation abusive et, pour l'autre, une erreur de raisonnement en termes de parité. Les éléments de résolution donnés renvoient tous à une recherche exhaustive au sens large, au sens où certaines solutions sont écartées de l'ensemble des solutions potentielles. La démarche algorithmique consiste, quant à elle, à mener une recherche exhaustive au sens strict en testant successivement des couples d'entiers. La solution correcte et complète proposée est basée sur l'exploitation de la structure de l'anneau de $Z[i\sqrt{2}]$.

[36] Ce problème est traité dans un chapitre intitulé « Du continu au discret… Et réciproquement».

[37] Warusfel, A. (1961) Les nombres et leurs mystères ; Editions du Seuil.

III. CONCLUSION

En contrepoint au chapitre précédent, l'objet du corps principal de ce chapitre a été d'étudier, relativement à un thème mathématique choisi en fonction de l'analyse épistémologique et de son importance dans l'enseignement, comment les potentialités de l'arithmétique pour le raisonnement mathématique sont exploitées lorsque l'espace dans lequel on se situe est relativement peu contraint si on le compare à celui des sujets de baccalauréat.

Les quatre documents étudiés font vivre une grande richesse, tant à travers la diversité des problèmes abordés sur le thème qu'à travers celle des dimensions organisatrices et opératoires représentées dans la résolution de ces problèmes (cette diversité provient en particulier d'une pratique souvent observée, dans tout le corpus, consistant à proposer plusieurs démonstrations d'un même résultat). Les niveaux de formulation engagés par les différents auteurs, à travers en particulier l'existence d'implicites, tant du côté opératoire qu'organisateur, ne sont pas sans rapport avec le fait qu'il s'agit de documents produits à l'attention d'enseignants auxquels la noosphère suppose une certaine culture mathématique.

Les différents types de publications se distinguent dans la place relative accordée à la tâche routinière et dans l'introduction de problèmes à la limite, voire hors, des programmes ou difficiles à envisager avec des élèves réels. Sur le premier point, le document du GEPS est en marge de ceux produits par l'APMEP et l'IREM de Montpellier : il traite de façon détaillée la tâche routinière alors que les autres documents ne l'envisagent même pas. Sur le second point, on a une graduation évidente du document du GEPS à la brochure de l'APMEP, en passant par les deux brochures IREM. On sent, de ce point de vue, le document du GEPS plus contraint de par sa nature institutionnelle, tandis que les documents IREM et APMEP, au-delà de l'aide directe à la mise en place des programmes, se permettent des développements plus culturels, non nécessairement implémentables dans les classes. C'est particulièrement le cas pour le document APMEP dont le titre lui-même sous-entend la dimension culturelle.

Au-delà de la mise en évidence de la richesse de ces brochures, à travers celle des problèmes proposés autour du thème de la résolution d'équations diophantiennes et de la diversité des solutions présentées pour ces problèmes, il nous faut, pour compléter l'analyse institutionnelle menée dans ce chapitre, maintenant préciser, conformément à ce qui a été annoncé, la structure globale de ces documents et leurs objectifs, ainsi que la façon dont les potentialités de l'arithmétique y sont présentées aux enseignants qui en sont les destinataires.

Les thèmes abordés par le GEPS relativement au programme d'arithmétique sont la division euclidienne, ceci très succinctement (il est seulement précisé que celle-ci est à étendre à Z), les équations diophantiennes, comme nous l'avons développé dans ce chapitre, les congruences mises au service de la détermination des restes de divisions de grands nombres entiers avec un très court paragraphe sur les clefs de contrôle, le petit théorème de Fermat dont trois preuves sont données et enfin les nombres premiers en lien avec l'articulation entre arithmétique et analyse à travers l'étude de $\pi(x)$, le nombre de nombres premiers p tels que $p \leq x$ (x étant un nombre réel positif). L'objectif principal est clairement indiqué :

> L'objectif principal de ces documents est de donner des repères et des éclairages sur certains aspects du programme. On y trouvera des thèmes de travail consistants et des pistes d'activités à partir desquels il revient à chaque enseignant d'organiser le travail des élèves (très peu d'exemples sont directement « prêts à l'emploi »).
>
> [Document d'accompagnement des programmes, 2002]

Précisons que, dans la partie réservée à l'arithmétique du programme de l'enseignement de spécialité, de tels exemples « prêts à l'emploi » n'existent pas ; il est à la charge de l'enseignant d'exploiter le document pour la classe. Le GPES justifie à cinq niveaux différents la place de ce contenu dans l'enseignement de spécialité[38] :

> - son introduction dans l'enseignement de spécialité, à l'occasion de la précédente rénovation de programme a été un succès tant auprès des élèves que des enseignants ;
> - il paraît judicieux de proposer dans la partie spécialité un chapitre relativement indépendant du programme du tronc commun : c'est le cas avec l'arithmétique, peu étudiée dans le cursus antérieur, et que l'on peut aborder sans être pénalisé par d'éventuels échecs dans d'autres disciplines ;
> - les applications de l'arithmétique (codage, clés de contrôle…) ont remis ce domaine sous les feux de l'actualité : l'étude de ce chapitre donne quelques éléments pour mieux comprendre les enjeux de ces applications ;
> - la démarche mathématique comporte des phases expérimentales que les documents d'accompagnement ont soulignées à plusieurs reprises ; c'est particulièrement le cas en arithmétique où des calculs à la main ou avec une machine permettent de conjecturer des résultats. Quant aux démonstrations, elles revêtent souvent un caractère original (en comparaison de celles présentées en géométrie ou analyse) et formateur ;
> - enfin, il ne faut pas négliger la possibilité de construire quelques algorithmes simples puis de les mettre en œuvre sur calculatrice programmable ou tableur.
>
> [Document d'accompagnement des programmes, 2002]

[38] Pour une étude comparative détaillée des programmes de 1998 et 2002, nous invitons le lecteur à se reporter aux travaux de Ravel (2003).

L'ouvrage de Savin est structuré de façon équilibrée en quatre parties. Le but de la première est de montrer le lien entre les suites de Farey[39] et l'équation de Bézout et d'utiliser ensuite les propriétés de ces suites pour obtenir un théorème d'approximation des nombres réels par des rationnels. Dans la seconde, une preuve d'une version faible du théorème des nombres premiers[40] est donnée en rappelant quelques démonstrations de l'infinitude des nombres premiers, des formules pour obtenir ces nombres et des résultats de théorie analytique. La troisième traite du problème de Waring, comme nous l'avons précisé dans ce chapitre, et la dernière partie enfin concerne le décompte d'objets ou de structures en fonction de leur taille. Ainsi, comme l'auteur l'écrit :

> J'avais le choix […] entre procéder à une compilation de résultats appartenant à une même famille et choisir un résultat particulier, puis construire l'exposé autour de lui. C'est cette dernière option que j'ai préférée, pour maintenir une cohérence dans la progression tout en conservant des courtes digressions en rapport avec le sujet. Cette méthode m'a permis de donner plusieurs démonstrations de résultats identiques, ce qui est toujours formateur pour les élèves de Terminale, qui croient qu'à un théorème correspond une démonstration unique.
>
> [Savin, 2000]

Rappelons que dans la partie que nous avons étudiée, nous avons noté que ce choix pouvait rendre opaque le rôle joué par certains résultats exposés par rapport à la preuve du principal résultat visé. En fait, cet ouvrage est le support écrit d'un stage que l'auteur a animé en février 1999 à Londres auprès de professeurs de mathématiques :

> En accord avec eux [les enseignants], le stage a consisté en une présentation relativement exhaustive de sujets esthétiques qui peuvent être traités dans le cadre de devoirs à la maison par des élèves très motivés des classes de terminale S, option mathématiques. Ainsi, chaque partie du texte est destinée à fournir le support pour une famille de devoirs à la maison, qui s'échelonneraient sur toute la durée de l'année scolaire, et qui demanderait aux futurs bacheliers de fournir un travail consistant et de longue haleine .
>
> [Savin, 2000]

[39] La suite de Farey d'ordre n est la suite croissante des fractions irréductibles comprises entre 0 et 1 dont le dénominateur ne dépasse pas n. <u>Exemple</u> : La suite de Farey d'ordre 5 est $\frac{0}{1},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{1}{1}$.

[40] Soit x un nombre réel positif, on note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers p tels que $p \leq x$. Le théorème des nombres premiers énonce que $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$.

On voit bien ici que le propos n'est pas exactement le même que celui du document du GEPS. Mais, comme dans le document du GEPS, dans la partie sur laquelle nous nous sommes centrée, comme dans les autres, transposer l'exposé mathématique de l'auteur pour les élèves, lorsque cela est envisageable, est à la charge de l'enseignant.

Les brochures de l'IREM de Montpellier abordent quant à elles, après avoir toutes deux donné des éléments relatifs à l'histoire des programmes, différents thèmes dont voici les intitulés : « Informatique et arithmétique », « Au début était le dénombrement », « Des nombres entiers rationnels », « Un programme de recherche pour l'année autour d'une découverte de Fermat : résolution en nombres entiers $x^3=y^2+2$ » pour la première brochure et « Divisibilité », « Une méthode éprouvée : la descente infinie », « Du continu au discret… Et réciproquement », « Algorithmique » et « Des nombres sur lesquels on s'interroge », pour la seconde. Hors de l'influence des textes de 1998, les motivations qui ont donné naissance à la première brochure étaient les suivantes :

> On pourrait aussi dire[41] que l'arithmétique est une source infinie de problèmes, qui peuvent être abordés (pour certains !) avec des outils assez rudimentaires. Et par des méthodes très diverses. C'est ainsi une mine d'idées pour qui veut favoriser l'« esprit de recherche » dans le cours de mathématiques. Argument d'efficacité…
> On pourrait encore avancer que la généralisation de l'outil informatique impose de situer clairement les domaines du discret et du continu. Argument d'utilité…
> On pourrait enfin soutenir que l'arithmétique peut être un fil conducteur de l'enseignement des mathématiques, du collège au lycée, des entiers positifs (classe de 6^e) aux entiers relatifs (classe de 4e), des polynômes réels (classe de Seconde) aux polynômes complexes (classe de Terminale). Argument de continuité…
>
> [Bernard, Faure, Fontana, Nogues, Nouaze & Trouche, 1995]

D'une manière générale, l'étude globale de l'ensemble des documents montre que l'étude du thème « Résolution d'équations diophantiennes » nous a permis d'avoir une vision assez représentative de ce qui vit dans ces documents, tant en termes de richesse mathématique exprimée à travers la diversité des dimensions organisatrice et opératoire développées, que par rapport à la façon dont cette richesse est communiquée au lecteur et donc en particulier au travail de transposition à opérer pour un enseignement effectif. Ce travail de transposition est conséquent car les auteurs des documents étudiés restent la plupart du temps au niveau de l'action mathématique sans expliciter une analyse en termes d'accessibilité pour des élèves de terminale S.

[41] Les deux premiers éléments sont un « argument d'autorité » (avec la célèbre citation de Gauss) et un « argument d'humanité » (citation de Ifrah extraite de son livre intitulé *Histoire universelle des chiffres* (Ifrah, 1994).

Ce chapitre clôt la partie 2.1 de l'étude institutionnelle ; l'analyse didactique se poursuit avec l'analyse de travaux d'élèves menée dans la partie 2.2.

CHAPITRE 7 :

UNE EPREUVE D'ENTRAINEMENT AU BACCALAUREAT

CHAPITRE 7 : 165

UNE EPREUVE D'ENTRAINEMENT AU BACCALAUREAT 165

INTRODUCTION 167

I. ANALYSE *A PRIORI* 168

I.1 ANALYSE *A PRIORI* DES SOLUTIONS POSSIBLES POUR LES DIFFERENTES QUESTIONS 169

I.2 ANALYSE MATHEMATIQUE ET DIDACTIQUE EN TERMES DE DIMENSIONS ORGANISATRICE ET OPERATOIRE 172

I.2.1 Mener une recherche exhaustive 173

I.2.2 Recherche exhaustive et traitement des contraintes du système (S) 177

I.2.3 Synthèse et compléments : élaboration d'organigrammes et de grilles d'analyse 179

I.3 EMERGENCE D'UN QUESTIONNEMENT DIDACTIQUE 187

II. ANALYSE *A POSTERIORI* 189

II.1 QUELLE(S) PENSEE(S) ORGANISATRICE(S) RENCONTRE-T-ON DANS LES COPIES ETUDIEES ? 189

II.1.1 Entre reconstruction de la pensée sous-jacente à l'énoncé et création d'une autre pensée organisatrice 191

II.1.2 Trois copies proposent une résolution complète du problème (P') 212

II.2 COMMENT L'AUTONOMIE DEVOLUE AU NIVEAU OPERATOIRE EST-ELLE GEREE PAR LES ELEVES ? 216

II.2.1 Autonomie dévolue au niveau opératoire et dialectique entre les dimensions organisatrice et opératoire 216

II.2.2 Echecs au niveau opératoire 218

II.2.3 Traitements opératoires locaux et originaux 220

II.3 NATURE DES NOMBRES ET DIALECTIQUE ENTRE LES COMPOSANTES ORGANISATRICE ET OPERATOIRE 221

II.3.1 Une non-prise en compte de la nature des objets 221

II.3.2 Un diagnostic mitigé 222

III. CONCLUSION 222

INTRODUCTION

L'enquête épistémologique nous a permis d'identifier des spécificités du raisonnement en arithmétique, tant dans ses dimensions organisatrice qu'opératoire, et donc des potentialités *a priori* pour l'apprentissage du raisonnement mathématique en classe de terminale scientifique. Après avoir pris, dans les deux chapitres précédents, la mesure du champ exploité par l'institution scolaire par rapport à ces potentialités, nous abordons dans celui-ci et le prochain le questionnement suivant : qu'en est-il de ces potentialités théoriques, si l'on analyse le fonctionnement d'élèves dans le cadre des programmes et de l'enseignement actuel ? Autrement dit, comment cela se traduit-il du côté des élèves ?

De même que pour l'analyse institutionnelle, nous nous intéressons à des objets plus ou moins assujettis à des contraintes institutionnelles. Dans ce chapitre, nous envisageons des copies d'élèves d'une épreuve d'entraînement au baccalauréat et, dans le suivant, une séance de recherche extra-ordinaire, objet peu contraint par rapport à celui mentionné en premier.

Les deux corpus retenus dans le cadre de l'analyse de travaux d'élèves diffèrent également quant au contexte de production. Parce que le raisonnement mathématique est dépendant non seulement du domaine concerné mais aussi du contexte de production, il nous a semblé important de choisir des corpus distincts sur ce plan.

Tel qu'il a été proposé aux élèves, l'énoncé en jeu dans ce chapitre est le suivant :

1. Soit l'équation (E) : 17x–11y=5 d'inconnues x et y dans Z.

a. A l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière (x_0 ;y_0) de (E).

b. Résoudre (E).

c. Soit (x ,y) un couple solution de (E). On note δ=PGCD (x,y).

(i) Quelles sont les valeurs possibles de δ ?

(ii) Montrer que δ=5 ⇔ 5 divise x.

(iii) En déduire les entiers naturels x et y solutions de : $\begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ PGCD(x, y) = 5 \end{cases}$

2. Le plan est rapporté au repère orthonormé (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$). On considère les points A(16,-13) et B(-1,-2).

a. Déterminer l'ensemble (F) des points M du plan à coordonnées entières tels que le triangle ABM soit rectangle en B.

b. Donner la liste des points de (F) à coordonnées entières (x ;y) tels que :

0≤ x ≤ 200, 0 ≤ y ≤ 200 et PGCD (x,y) = 5.

Dans la suite le système $\begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ PGCD(x, y) = 5 \end{cases}$ sera noté *(S)* et les contraintes « 17x-11y=5 » et « PGCD(x,y)=5 » seront respectivement appelées *contrainte n*°1 et *contrainte n°2.*

Grâce à leur enseignante, nous avons pu recueillir les copies des élèves d'une classe de terminale S ayant travaillé sur cet énoncé dans le cadre d'une épreuve d'entraînement au baccalauréat ; notre corpus est ainsi constitué d'une quinzaine de copies.

Dans ce qui suit, nous nous proposons de mener successivement une *analyse a priori* de l'énoncé donné ci-dessus et une *analyse a posteriori* en prenant en compte les copies d'élèves. Même s'il s'agit ici d'un objet intermédiaire (ce n'est pas l'épreuve définitive), l'*analyse a priori* sera mise en rapport avec l'étude institutionnelle de l'épreuve de spécialité du baccalauréat (cf. chapitre 5). Et, contrairement à cette dernière, nous pourrons observer le fonctionnement effectif d'élèves confrontés au problème arithmétique en jeu ici dans le cadre de l'*analyse a posteriori*.

I. ANALYSE *A PRIORI*

L'analyse *a priori* de l'énoncé de l'épreuve étudiée dans ce chapitre est menée suivant deux étapes successives :

- analyse des solutions possibles pour les différentes questions,
- analyse mathématique et didactique en termes de dimensions organisatrice et opératoire.

La deuxième analyse repose en partie sur la première. A l'issue de ces analyses, un questionnement didactique émerge ; celui-ci constituera le fil conducteur de notre analyse *a posteriori*.

Au cours de la deuxième étape, un ensemble d'organigrammes et de grilles d'analyse est construit pas à pas.

La construction de ces organigrammes et grilles repose, en premier lieu, sur l'analyse mathématique en termes de dimensions organisatrice et opératoire. Celle-ci se fait « de l'organisateur vers l'opératoire » : on « part » de la pensée organisatrice principale pour « arriver » aux traitements opératoires les plus locaux. Il s'agit ainsi de rendre compte d'une profondeur allant de l'organisateur vers l'opératoire afin d'essayer de restituer (même partiellement) la dynamique relative à la dialectique existant entre ces deux composantes. En effet, un jeu d'allers-retours dans les différents niveaux envisagés devrait nous permettre d'aller observer les relations dialectiques vivant entre les deux composantes citées, et ainsi, d'analyser la résolution d'un élève dans son ensemble, sans écarter ses traitements opératoires « les plus profonds ». Dans certaines grilles d'analyse, relativement à notre souci de conserver une « vue d'ensemble », on renverra explicitement à ce qui a été fait précédemment dans la copie. A noter que les éventuelles connexions logiques qui sont faites entre les questions constituent un observable essentiel dans l'analyse de la dimension organisatrice.

En second lieu, nous utilisons le cadre d'analyse de la *théorie des 4T* (Chevallard, 1998) pour décrire une partie des traitements opératoires. Nous retenons en particulier les niveaux technique et technologique pour la construction des grilles d'analyse :

Types de tâches. – A la racine de la notion de praxéologie se trouvent les notions solidaires de *tâche*, *t*, et de *type* de tâches, *T*. […] tâches, types de tâches, genre de tâches ne sont pas des donnés de la nature : ce sont des « artefacts », des « œuvres », des *construits institutionnels*, dont la reconstruction en telle institution, par exemple en classe, est un problème à part entière, *qui est l'objet même de la didactique.*

Techniques. – […] Soit donc T un type de tâches *donné*. Une praxéologie relative à T précise (en principe) *une manière d'accomplir*, de réaliser les tâches $t \in T$: à une telle *manière de faire*, τ, on donne ici le nom de *technique* (du grec *tekhnê*, savoir-faire).
Technologies. – On entend par *technologie*, et on note généralement θ, un discours rationnel (logos) sur la technique – la *tekhnê* – τ, discours ayant pour objet premier de justifier « rationnellement » la technique , en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches du type *T*, c'est-à-dire de réaliser ce qui est prétendu .
[…] On notera qu'une deuxième fonction de la technologie est d'*expliquer*, de *rendre intelligible*, d'*éclairer* la technique. Si la première fonction – justifier la technique – consiste à assurer que la technique donne bien ce qui est prétendu, cette deuxième fonction consiste à exposer *pourquoi* il en est bien ainsi.
[…] Enfin une troisième fonction correspond à un emploi plus actuel du terme technologie : la fonction de *production de techniques*.

[Chevallard, 1998]

Au sein du niveau technique, nous différencions la technique du discours descriptif de celle-ci, et au sein du niveau technologique, nous distinguons ce qui est explicite de ce qui est implicite dans chaque copie d'élève. Ces distinctions sont en effet nécessaires pour essayer de rendre compte au mieux de ce que l'on trouvera dans une copie. A noter que la notion de tâche (respectivement sous-tâche) est implicitement en jeu dans notre analyse, sans que celle-ci soit spécifiquement rattachée à ce cadre théorique (sauf lorsque l'on considère les niveaux technique ou technologique associés) ; cet emploi renvoie davantage à la notion de problème (respectivement sous-problème), dans son acceptation la plus large. Le découpage en sous-problèmes est fait à partir d'une analyse en termes de dimension organisatrice.

I.1 Analyse *a priori* des solutions possibles pour les différentes questions

Dans un premier temps, nous faisons une analyse *a priori* des solutions possibles pour les différentes questions :

Questions 1.a et 1.b : L'ensemble de ces deux questions correspond à la **résolution de l'équation notée (E) dans Z**. La méthode indiquée dans l'énoncé correspond à la technique officielle enseignée en terminale S pour ce type d'équation diophantienne : détermination d'une solution particulière en utilisant l'algorithme d'Euclide puis, à partir de celle-ci, obtention de toutes les solutions en faisant intervenir en particulier le théorème de Gauss. Ici, à l'aide de l'algorithme d'Euclide on trouve pour l'équation 17x-11y=1 la solution particulière (2,3), de laquelle on déduit la solution (10,15) (notée (x_0,y_0) conformément à l'énoncé) pour l'équation (E). Puis, en notant (x,y) une solution quelconque de (E), on obtient l'égalité $17(x-x_0)=11(y-y_0)$. Le théorème de Gauss permet de conclure à l'existence d'un entier k tel que $y=17k+y_0$. A ce stade, il y a (au moins) deux façons d'achever la résolution de (E) : soit on reporte cette expression de y dans (E), soit on utilise à nouveau le théorème de Gauss à partir de l'égalité $17(x-x_0)=11(y-y_0)$. D'une manière ou d'une autre, on trouve que l'ensemble des solutions de (E) est exactement (sans oublier de raisonner par équivalence) l'ensemble des couples (x,y) tels que $\begin{cases} x = 11k + 10 \\ y = 17k + 15 \end{cases}$ avec k entier.

Question 1.c.i et 1.c.ii : Ces deux questions correspondent au traitement de la contrainte « PGCD(x,y)=5 » du système en jeu dans le problème proposé aux élèves. Dans l'énoncé, il s'agit d'en obtenir une traduction équivalente à partir de l'autre contrainte (relative à l'équation (E)) ; la <u>question 1.c.i</u> correspond dans cet esprit à un travail préliminaire : le PGCD de x et y étant en particulier un diviseur commun de x et y, il divise 17x−11y. Deux stratégies opératoires sont alors *a priori* possibles, selon que l'on parte de (E) ou de sa résolution (obtenue avec les deux questions précédentes), pour trouver les valeurs possibles du PGCD de x et y (noté δ) : à partir de (E), on sait directement que δ divise 5 et, à partir de la résolution de (E), c'est-à-dire en utilisant l'expression de x et y en fonction de l'entier k, on aboutit à la même conclusion mais après avoir effectué le calcul 17(11k+10)-11(17k+15). Dans ces deux cas, on conclut avec la recherche des diviseurs de 5. Dans la <u>question 1.c.ii</u>, on aborde l'équivalence visée. Celle-ci peut être démontrée en établissant successivement les deux implications en jeu ; l'implication « 5 divise $x \Rightarrow \delta=5$ » nécessite un autre traitement qu'une simple application de la définition du PGCD, comme cela est le cas pour l'implication inverse. Comme pour des questions précédentes, il y a au moins deux façons différentes de démontrer cette implication (selon que l'on parte de (E) ou de sa résolution) :

- <u>A partir de (E)</u> : Supposons à présent que 5 divise x ; (x,y) étant solution de (E), on a 11y=17x-5. Comme 5 divise x, 17x-5 est divisible par 5, d'où 11y est divisible par 5. 11 et 5 étant premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 5 divise y.
- <u>A partir de la résolution de (E)</u> : 5 divise 10 et 11k+10 donc en particulier (11k+10)-10, c'est-à-dire 11k. De plus, 5 et 11 étant premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss **5 divise k,** et donc y (car 5 divise17k+15).

D'une manière ou d'une autre, on a finalement montré que 5 est un diviseur commun à x et y et, **d'après la question 1.c.i**, 5 est le PGCD de x et y.

Question 1.c.iii : Dans cette question, il s'agit de faire la synthèse des résultats obtenus précédemment afin de résoudre le problème en jeu dans cet énoncé. A partir de la résolution de la question (1.b) et l'énoncé de la question (1.c.ii), on a :

$$(x,y) \text{ solution de } \begin{cases} PGCD(x,y)=5 \\ 17x-11y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \text{ divise x} \\ \begin{cases} x = 11k+10 \\ y = 17k+15 \end{cases} \end{cases} \text{ avec k entier}$$

Si l'on a traité la question 1.c.ii à partir de la résolution de (E) on a directement celle du système qui est attendue :

$$(x,y) \text{ solution de } \begin{cases} PGCD(x,y)=5 \\ 17x-11y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 55k+10 \\ y = 85k+15 \end{cases} \text{ avec k entier}$$

Sinon, il reste à montrer que 5 divise l'entier k intervenant dans la résolution de (E), comme par exemple cela a été fait dans la question 1.c.ii (à partir des expressions de x et y en fonction de k) .
Dans un cas, comme dans l'autre, il faut vérifier, pour avoir l'équivalence, que si 5 divise k alors 5 divise x, ce qui est trivial.
De plus, étant donné qu'il est demandé de résoudre (S) dans N, il faut modifier la spécification de k (dans N au lieu de Z).

Question 2.a et 2.b : dans ces deux dernières questions, il s'agit d'aborder le problème de géométrie analytique sous-jacent : «Le plan étant rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},)$, on considère les points A(16,-13) et B(-1,-2). Quel est l'ensemble (F) des points M du plan à coordonnées (x,y) entières tels que le triangle ABM soit rectangle en B et tels que $0 \leq x \leq 200$, $0 \leq y \leq 200$ et PGCD (x,y) = 5 ? ».
La question 2.a correspond à la traduction arithmétique du problème, c'est-à-dire au passage entre les deux cadres en jeu. L'énoncé «le triangle ABM est rectangle en B » peut être traduit à l'aide d'au moins deux outils : le théorème de Pythagore ou l'outil vectoriel. Que ce soit d'une façon ou d'une autre, on aboutit à l'équation (E), après un travail de calcul algébrique. La question 1.b permet alors de conclure. Soulignons que l'on cherche ici les solutions dans Z.
Dans la question 2.b, deux contraintes sont ajoutées : la contrainte en jeu dans le système intervenant en 1.c.iii (« PGCD(x,y)=5 »), et une contrainte de taille qui réduit la recherche aux entiers naturels inférieurs ou égaux à 200. Cette dernière conduit à une recherche exhaustive, qui est limitée à quatre étapes grâce à l'utilisation de la question 1.c.iii pour la prise en compte de l'autre contrainte ajoutée.
La recherche menée est synthétisée dans le tableau suivant :

k	**Couple (x,y) solution du système** $\begin{cases} x = 55k + 10 \\ y = 85k + 15 \end{cases}$
0	(10,15)
1	(65,100)
2	(120,185)
3	(175,270) la recherche s'arrête.

Les couples solutions sont : **(10,15), (65,100) et (120,185).**

I.2 Analyse mathématique et didactique en termes de dimensions organisatrice et opératoire

Une analyse suivant les dimensions organisatrice et opératoire de cet énoncé d'entraînement au baccalauréat nécessite de préciser le problème en jeu dans cet énoncé. En effet, nous voulons analyser cet exercice d'entraînement au baccalauréat dans son ensemble, c'est-à-dire en considérant les différentes questions comme liées les unes aux autres par une même problématique. Cette perspective d'analyse n'exclut pas que chaque question soit étudiée pour elle-même.

Le plan étant rapporté au repère (O,$\vec{i}$, $\vec{j}$), nous identifions ce problème comme étant le suivant :

(P) *Le plan est rapporté au repère orthonormé (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$). On considère les points A(16,-13) et B(-1,-2) ; il s'agit de déterminer l'ensemble des points du plan à coordonnées entières (x,y) tels que le triangle ABM soit rectangle en B et tels que $0 \leq x \leq 200$, $0 \leq y \leq 200$ et PGCD (x,y) = 5.*

D'un point de vue mathématique, on peut considérer qu'il s'agit d'un problème de géométrie analytique. Néanmoins, si l'on prend en compte la résolution proposée dans son contexte institutionnel (sujet d'une épreuve d'entraînement au baccalauréat), on pourrait dire qu'il s'agit d'un problème d'arithmétique « habillé » dans le champ de la géométrie analytique. En effet, mis à part la traduction arithmétique de l'appartenance à l'ensemble (F)[42], les connaissances et compétences en jeu relèvent de l'arithmétique et non de la géométrie.

Relativement à notre problématique de recherche, nous choisissons de nous intéresser uniquement à des résolutions arithmétiques de (P). Ainsi, nous considérons le problème (P') suivant :

[42] Précisons que cette tâche n'est pas pour autant écartée de notre analyse *a priori* ; nous y reviendrons dans la suite.

(P') *Trouver tous les entiers naturels x et y, inférieurs ou égaux à 200, solutions du système (S) suivant :*

$$\begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ PGCD(x, y) = 5 \end{cases}$$

Il s'agit de la traduction du problème (P) dans le champ de l'arithmétique. L'ensemble des solutions de (P) est le même que celui de (P').

I.2.1 Mener une recherche exhaustive

La dimension organisatrice générale de la résolution de (P') proposée à travers l'énoncé est une recherche exhaustive (cf. chapitre 2). Et, selon l'importance de la limitation de la recherche, celle-ci est plus ou moins proche d'une recherche exhaustive au sens strict. Ainsi on peut envisager différentes résolutions en faisant varier la phase de limitation de la recherche. Avant cela, rappelons[43] le sens avec lequel nous employons l'expression recherche exhaustive ainsi que celles qui lui sont associées : dans le cadre de la résolution d'un problème, on appelle méthode de recherche exhaustive une méthode où l'on teste l'une après l'autre, après les avoir énumérées, toutes les solutions potentielles ; nous distinguons deux types de recherche exhaustive :

- *Recherche exhaustive au sens strict* : le contexte limite la recherche à un nombre fini de solutions potentielles, qu'il est raisonnable de traiter,
- *Recherche exhaustive au sens large* : un travail de limitation de la recherche précède une phase de recherche exhaustive stricte.

<u>I.2.1.1 Mener une recherche exhaustive comme cela est suggéré dans l'énoncé</u>

L'énoncé que nous étudions propose de limiter la recherche en deux temps :

- <u>Premier temps</u> (questions 1a&1b) <u>: résoudre l'équation (E) 17x-11y = 5</u> (les entiers x et y solutions de cette équation sont exprimés en fonction d'un entier k). La pensée organisatrice associée à cette résolution est celle associée à la technique généralement enseignée pour résoudre ce type d'équation (cf. § 1). Résoudre l'équation (E) est un sous-problème que l'énoncé propose de traiter complètement, même si la recherche associée à (P') est bornée ; **toute idée de recherche exhaustive est étrangère à cette première question**.

La grille donnée ci-après sera utilisée pour analyser les résolutions de (E) proposées par les élèves :

[43] Pour plus de détails se reporter à notre analyse épistémologique (cf. Partie 1).

<table>
<tr><th colspan="7">RECHERCHE SOLUTION PARTICULIERE</th></tr>
<tr><th rowspan="4">Copie</th><th rowspan="4">Equation en jeu explicitement</th><th colspan="4">Niveau technique</th><th rowspan="4">Niveau technologique (associé ou non à la technique en jeu)</th></tr>
<tr><td colspan="3">Technique</td><td rowspan="3">Discours descriptif de la technique</td></tr>
<tr><td colspan="2">Algorithme d'Euclide</td><td rowspan="2">Autre</td></tr>
<tr><td>Arrêt avant avant dernière ligne $11= 6\times1+5$ et remontée</td><td>Jusqu'au dernier reste non nul $6=5\times1+1$ et remontée</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="8">RECHERCHE SOLUTION GENERALE</th></tr>
<tr><th rowspan="3">Copie</th><th rowspan="3">Spécification de l'entier k en jeu dans les expressions finales de x et y</th><th colspan="4">Niveau technique</th><th rowspan="3">Niveau technologique (associé ou non à la technique en jeu)</th><th rowspan="3">Réciproque</th></tr>
<tr><td colspan="3">Technique</td><td rowspan="2">Discours descriptif de la technique</td></tr>
<tr><td>Emploi des lettres x_0 et y_0</td><td>Avec report (Th.Gauss $\times1$)</td><td>Sans report (Th.Gauss $\times2$)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3"></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Soulignons que l'obtention de l'expression de x et de celle de y en fonction d'un entier k peuvent être plus ou moins indépendantes selon que l'une est substituée dans (E) ou non (ou dans une expression dérivée de (E)) ; le théorème de Gauss est utilisé une à deux fois selon le cas. Une différence opératoire essentielle est le nombre d'entiers intervenant dans cette résolution. En effet, si on utilise deux fois ce théorème, deux entiers sont en jeu et leur égalité est à établir. Par contre, en utilisant une seule fois ce théorème, un seul entier entre en scène.

- Deuxième temps (question 1.c.i, 1.c.ii & 1.c.iii en partie) : montrer que l'entier k en jeu dans le premier temps est divisible par 5. Cet élément est obtenu par l'intermédiaire de l'équivalence « PGCD(x,y)=5⇔5 divise x » : la contrainte « PGCD(x,y)=5 » est traduite de manière équivalente par « 5 divise x » en intégrant l'autre contrainte en jeu dans (S). C'est ainsi que deux étapes apparaissent pour accéder à l'information voulue :

- Etablissement de l'équivalence mentionnée (questions 1ci&1cii)
- Utilisation de la résolution de (E) pour accéder à « 5 divise k » par l'intermédiaire de « 5 divise x » (question1ciii)

La pensée organisatrice générale de la <u>première étape</u> est de démontrer l'équivalence en établissant successivement les deux implications correspondantes. L'implication « 5 divise x ⇒ PGCD(x,y)=5 » nécessite un travail préliminaire (question 1ci) : explicitation de la condition nécessaire « PGCD(x,y)∈{1,5} » pour que (x,y) soit solution de (E). Nous aboutissons à la grille d'analyse suivante pour cette étape :

<table>
<tr><th colspan="10">TRAITEMENT CONTRAINTE « PGCD(X,Y)=5 »</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Copie</td><td colspan="4">⇒</td><td colspan="5">⇐</td></tr>
<tr><td colspan="4" rowspan="2">Du côté opératoire</td><td rowspan="4"></td><td colspan="4">Condition nécessaire pour (x,y) solution de (E) portant sur PGCD(x,y)
(Question 1ci)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Du côté opératoire</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Utilisation résolution de (E)</td><td rowspan="2">Traduction éventuelle du PGCD</td><td colspan="2">NIVEAU θ[44]</td><td rowspan="2">Utilisation résolution (E)</td><td rowspan="2">Traductio n éventuelle du PGCD</td><td colspan="2">Niveau θ
Relatif à PGCD(x,y) divise 5</td></tr>
<tr><td>Explicite</td><td>Implicite</td><td>Explicite</td><td>Implicite</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

La deuxième étape de ce second temps de la limitation de la recherche sera étudiée par la suite (cf. §I.2.2.1).

Cette limitation réduit la recherche au sens strict à **4 tests** (se reporter à l'analyse des solutions possibles pour la question 2.b) ; les couples obtenus sont exactement les solutions recherchées. Pour cette phase de recherche au sens strict, nous avons construit la grille d'analyse suivante :

[44] Notation employée pour désigner le niveau technologique (Chevallard, 1998).

RECHERCHE AU SENS STRICT								
Copies	**Ce qu'il en est à la fin de 2.a**	**Solution(s) données**	Cohérence avec le système à partir duquel la recherche au sens strict est menée	*Système en jeu* *(sans la contrainte ≤ 200)*	Connexion explicite avec d'autres questions	**A propos du test $\leq$ 200** Nombre d'étapes explicitées	Discours de l'élève	**Traces d'une vérification**
	CLIQUER[45]							

I.2.1.2 Mener une recherche exhaustive autrement

On peut envisager de limiter la recherche en ne réalisant que le premier temps proposé par l'énoncé. Cela correspond à ne pas traduire la condition « PGCD(x,y) = 5 ». Ainsi, on commencerait la phase de recherche exhaustive au sens strict à partir de la résolution suivante de (E) :

(x,y) solution de (E) si et seulement si $\begin{cases} x = 11k + 10 \\ y = 17k + 15 \end{cases}$ avec k entier

Douze tests seraient alors nécessaires pour obtenir les solutions potentielles :

k	Couple (x,y) solution du système $\begin{cases} x = 11k + 10 \\ y = 17k + 15 \end{cases}$
0	(10,15)
1	(21,32)
2	(32,49)
3	(43,66)
4	(54,83)
5	(65,100)
6	(76,117)

45 Dans le fichier Word de ce document, des « liens hypertextes » ont été créés afin de consulter la grille correspondante.

7	(87,134)
8	(98,151)
9	(109,168)
10	(120,185)
11	(131,202)

Parmi ces couples susceptibles d'être des solutions de (P'), il s'agit de sélectionner ceux pour lesquels le PGCD de x et y est égal à 5 : on retrouve les trois couples (10,15), (65,100) et (120,185).

I.2.2 Recherche exhaustive et traitement des contraintes du système (S)

En fait, comme cela apparaît (implicitement) dans la variante proposée ci-dessus, **la façon de mener la recherche exhaustive est intimement liée au traitement des contraintes du système (S)**. Une contrainte étant envisagée, deux niveaux d'analyse apparaissent pour l'étude de son traitement. Suivant le premier, il s'agit de **situer la gestion de la contrainte entre phases de limitation et de recherche au sens strict**. Le deuxième niveau d'analyse renvoie, quant à lui, au **rapport de dépendance entretenu avec l'autre contrainte en jeu**. Nous envisageons successivement ces deux niveaux d'analyse.

I.2.2.1 Entre phases de limitation de la recherche et de recherche exhaustive stricte

Avec la variante présentée précédemment, nous avons un exemple où la prise en compte de la contrainte n°2 a lieu au niveau de la phase de recherche au sens strict, et non plus dans la phase de limitation, comme cela est proposé par les auteurs de l'énoncé. Ce transfert du traitement de la contrainte n°2 implique que disparaisse tout ce qui concerne la question 1.c ; ainsi par exemple, le travail opératoire se situe dans un registre numérique au lieu d'un registre littéral. On pourrait faire de même avec la contrainte relative à l'équation (E). Ces variantes illustrent le rapport qui existe entre les phases de limitation de la recherche et de recherche exhaustive au sens strict : moins on limite la recherche et plus il y aura de tests à faire pour chacune des solutions potentielles. On peut par exemple envisager de résoudre le problème (P') sans qu'il y ait de limitation de la recherche, donc en particulier sans résoudre (E) et sans traduire la condition n°2 ; trois types de tests (et non plus seulement un ou deux) seraient alors à faire pour déterminer si une solution potentielle est solution du problème : comparaison d'un nombre au nombre 200, détermination du PGCD de deux entiers donnés et décision qu'un couple d'entiers donné est solution de (E).

La pensée organisatrice sous-jacente à l'énoncé s'identifie à une recherche exhaustive au sens large où la phase de recherche exhaustive au sens strict se réduit au seul test de taille (≤ 200). En particulier, le sous-problème « résoudre le système $\begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ PGCD(x,y) = 5 \end{cases}$ dans Z×Z » vit de façon autonome par rapport au problème principal (P') (ou(P)), au sens où sa résolution pourrait être extraite de celle de ce dernier.

Soulignons que dès qu'une contrainte est gérée dans la phase de recherche au sens strict, la résolution du système (S) ne peut être que partielle.

Envisageons à présent le deuxième niveau d'analyse annoncé pour l'étude du traitement des contraintes définissant le système en jeu.

I.2.2.1 Les deux contraintes sont-elles traitées indépendamment l'une de l'autre ?

Il s'agit ici d'apprécier le rapport de dépendance existant dans la gestion des contraintes, et en particulier de repérer si une contrainte donnée est traduite, ou ne l'est pas, en intégrant l'autre (au titre d'hypothèse). Relativement au premier niveau d'analyse abordé précédemment, il est à préciser que la non-appartenance à la même phase de la recherche exhaustive (limitation et recherche au sens strict) implique un certain rapport d'indépendance entre les traitements des deux contraintes.

La pensée organisatrice sous-jacente à l'énoncé est de traiter les contraintes associées au système de manière dépendante comme suit : la contrainte « PGCD(x,y)=5 » est travaillée et traduite à partir de l'autre contrainte, c'est-à-dire en supposant que le couple (x,y) est solution de (E). Il existe ainsi une dépendance de la contrainte n°2 vis-à-vis de la contrainte n°1, du point de vue organisateur. Ensuite, selon que la résolution de (E) est utilisée ou non au cours du traitement, il y aura une relation de dépendance au niveau opératoire. Lors de l'analyse des solutions possibles à la question 1c, nous avons « joué » sur ce degré de liberté et avons proposé deux résolutions pour chacune des trois sous-questions. Y a-t-il des différences au niveau opératoire entre ces deux procédés ? La réponse est affirmative : pour les questions 1.c.i et 1.c.ii, l'élément technologique en jeu est le même (*tout diviseur commun à deux entiers divise toute combinaison linéaire de ces deux entiers)*, cependant, dans un cas la combinaison est à (re)construire. Les effets de la distinction pointée ici sont d'autant plus conséquents au niveau de la dialectique entre les niveaux organisateur et opératoire. En effet, en travaillant à partir de la résolution de (E), on a directement (sans utiliser l'intermédiaire PGCD(x,y)=5 $\Leftrightarrow$ 5 divise x) l'information voulue pour la résolution attendue du système (S) : 5 divise l'entier k. Ainsi, même si l'énoncé fige *a priori* une pensée organisatrice, les degrés de liberté possibles au niveau opératoire (ici par exemple le choix quant à l'utilisation ou non de la résolution de (E)) peuvent mettre en évidence un cheminement organisateur plus économique : la dialectique entre les composantes organisatrice et opératoire est ici clairement mise en évidence. A noter que cette analyse semble mettre à jour une maladresse dans la conception de l'énoncé : pour que le passage par la traduction 5 divise x ne soit pas inutile par rapport à la visée finale, il aurait fallu poser les questions 1.c.i et 1.c.ii avant les questions 1.a et 1.b (ce qui est envisageable). On a ainsi illustré les deux cas de figure : dépendance aux niveaux organisateur et opératoire (utilisation de la résolution de (E)), et dépendance au niveau organisateur avec indépendance du côté opératoire (non utilisation de la résolution).

Dans le cadre de cette analyse *a priori*, il est légitime de chercher à résoudre le problème en ne traduisant pas la deuxième contrainte à l'aide de la première. Dans cette perspective, il convient de traduire la contrainte n°2 avec l'existence de deux entiers premiers entre eux, notés x' et y', tels que x=5x' et y=5y'. Et, selon que la résolution de l'équation (E) est utilisée ou ne l'est pas, deux cas se présentent. Le premier cas correspond à un traitement indépendant des deux contraintes (avant leur association relative à la résolution du système qu'elles définissent). Dans le second, le rapport de dépendance est inversé par rapport à celui sous-jacent à l'énoncé étudié. C'est en effet la contrainte n°1 qui est travaillée avec l'hypothèse que le PGCD du couple (x,y) envisagé est égal à 5. On aboutit alors à l'équation 17x'-11y'=5 notée (E') ; on retrouve le type de tâches auquel est rattaché la résolution de l'équation (E). On constate de plus que tout ce qui avait été mis en œuvre pour démontrer l'équivalence «PGCD(x,y)=5⇔5 divise x » (questions 1ci&1cii) disparaît et que l'élément essentiel « 5 divise k » émerge spontanément. Soulignons que le théorème de Bézout est essentiel pour s'assurer un raisonnement par équivalence (x' et y' vérifiant (E') sont premiers entre eux).

Cette analyse nous conduit à la grille d'analyse suivante pour le deuxième temps de la limitation de la recherche (nous rappelons qu'il s'agit de l'utilisation de la résolution de (E) pour accéder à « 5 divise k » par l'intermédiaire de « 5 divise x » (question1ciii)) :

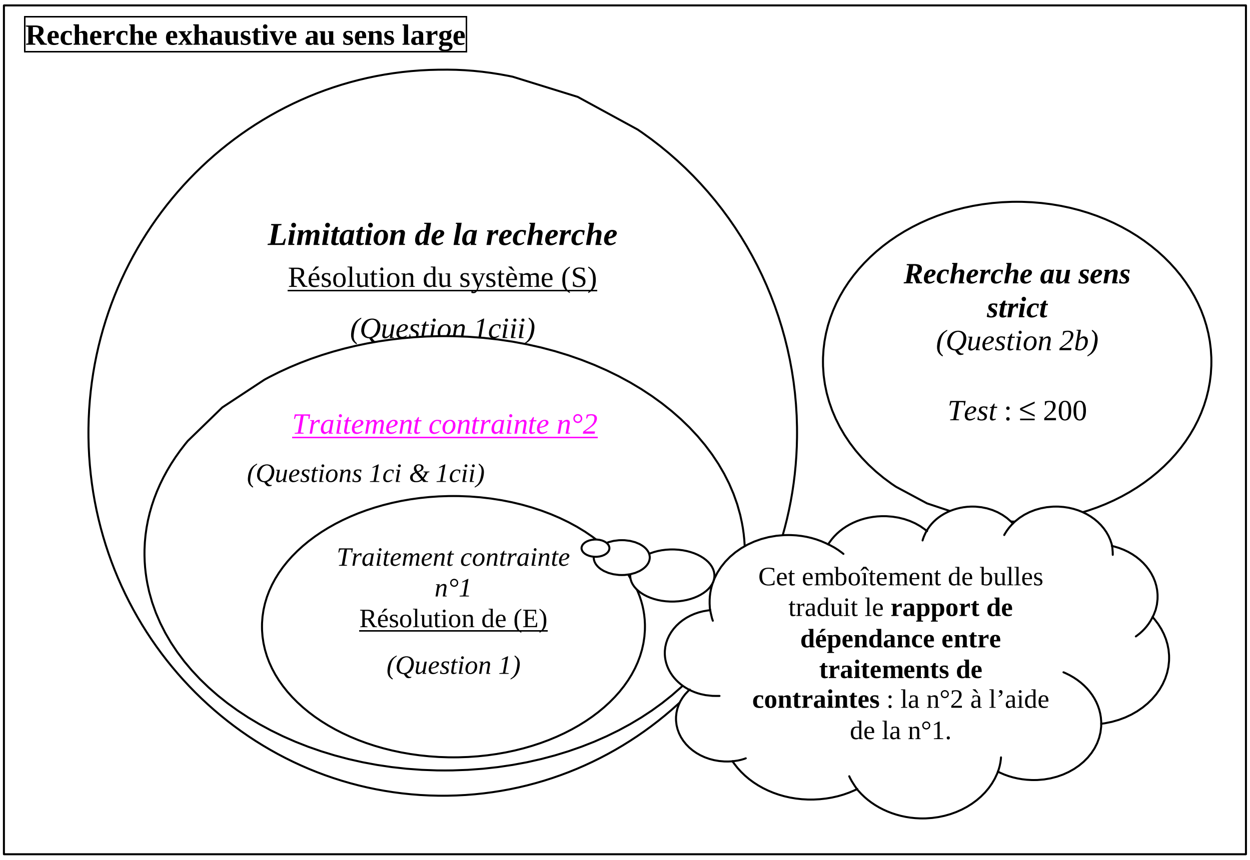
RESOLUTION DE (S)									
Copie	**Contrainte n°1**	**Contrainte n°2 Type de traduction**		**L'élément « 5 divise k »**			**Connexion(s) logique(s) avec autre(s) question(s)**		**Echec(s) Raisonnement(s) par ⇔**
		Indépendante de la contrainte n°1	Dépendante de la contrainte n°1	Apparition question(s) antérieure(s)	Dans l'association des contraintes n°1 et n°2		Explicite(s)	Implicite(s)	
					Equation (E') 17x'-11y'=1	*Th. Gauss (emploi explicite)*			
	Résolution de (E) CLIQUER				Résolution de (E') CLIQUER				

I.2.3 Synthèse et compléments : élaboration d'organigrammes et de grilles d'analyse

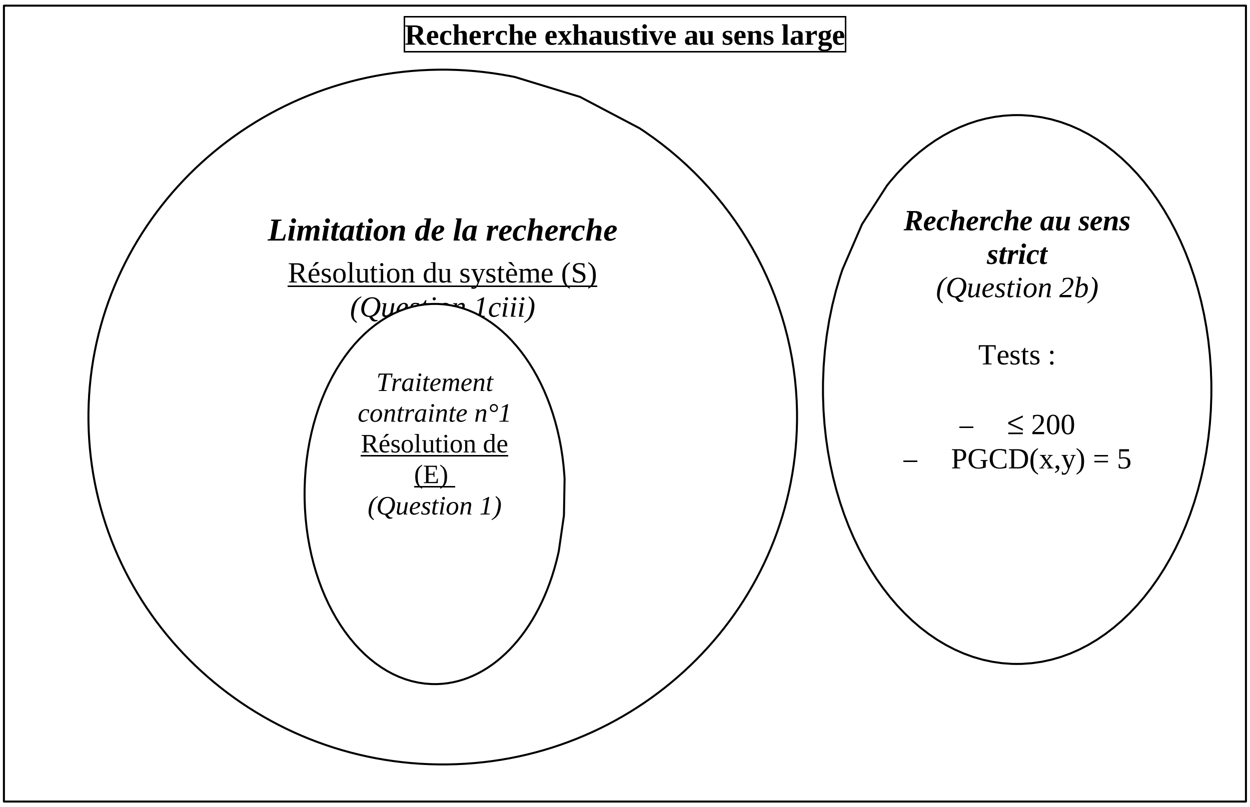
A ce stade de notre analyse *a priori*, nous pouvons construire différents organigrammes synthétisant et schématisant la variabilité qui existe dans l'ensemble des résolutions du problème arithmétique (P') envisagées jusqu'à présent. Lorsque cela sera possible, nous indiquerons le lien qui existe entre le découpage opéré et les différentes questions de l'énoncé. L'ensemble des grilles qui seront utilisées pour l'analyse *a posteriori* sera complété au fur et à mesure que ces organigrammes seront donnés.

I.2.3.1 Différentes résolutions ont été envisagées

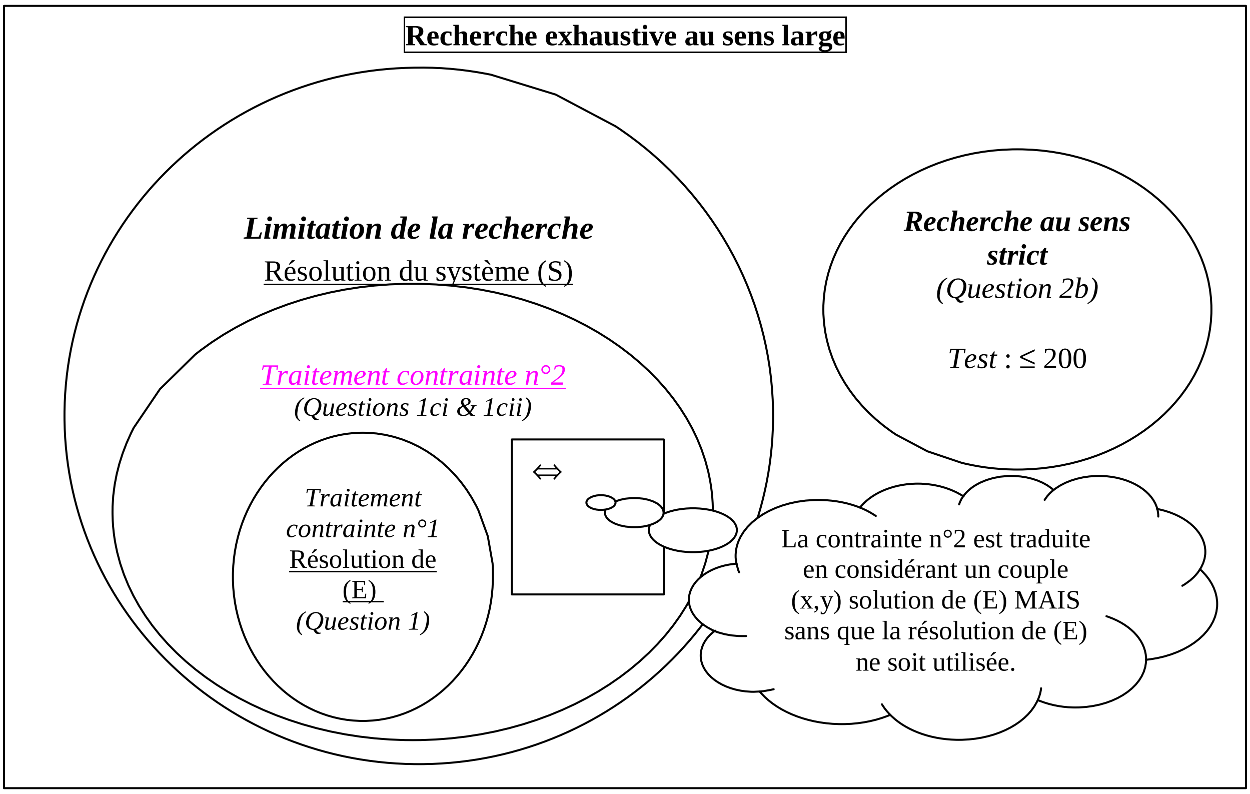
Tout d'abord, un organigramme relatif à la pensée organisatrice sous-jacente à l'énoncé proposé aux élèves est le suivant :

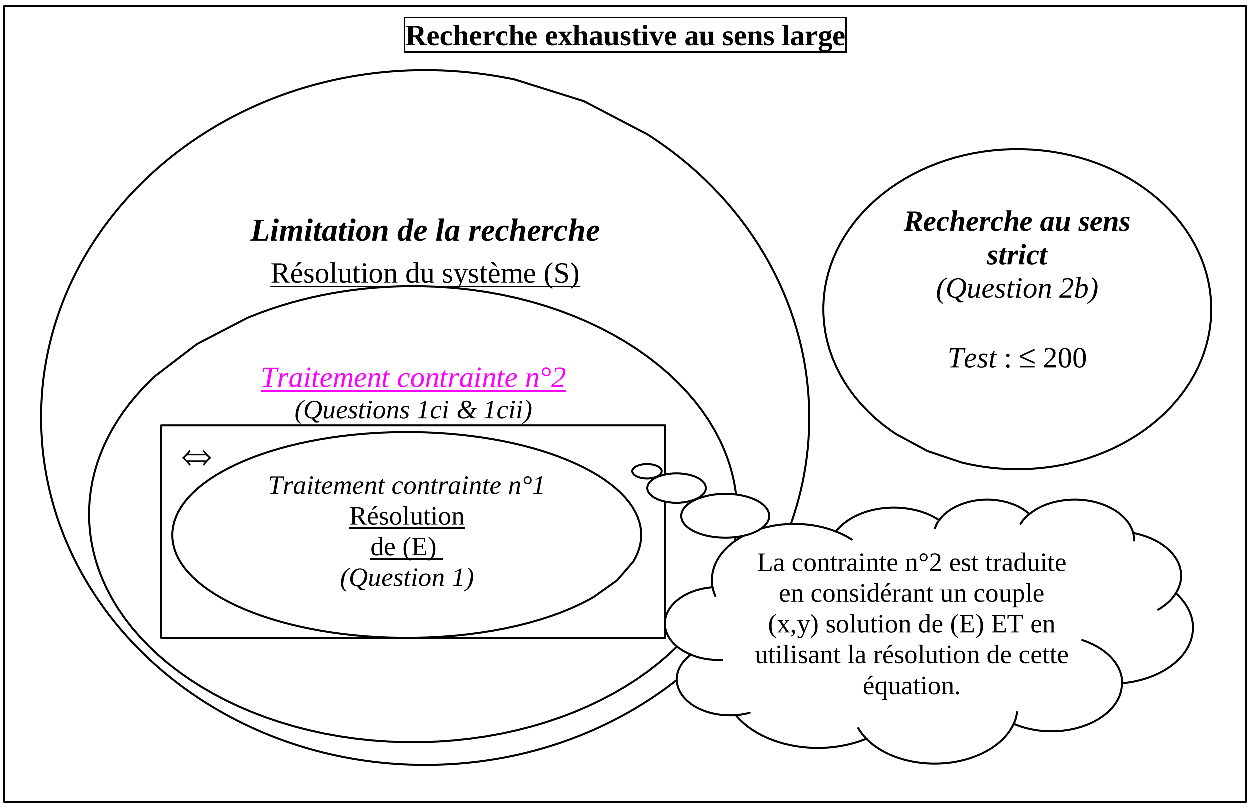


Pour mettre en évidence le rapport qui existe entre limitation de la recherche et recherche au sens strict au sein d'une recherche exhaustive (au sens large), nous avions proposé une autre pensée organisatrice pour résoudre (P'). L'organigramme qui suit la schématise :

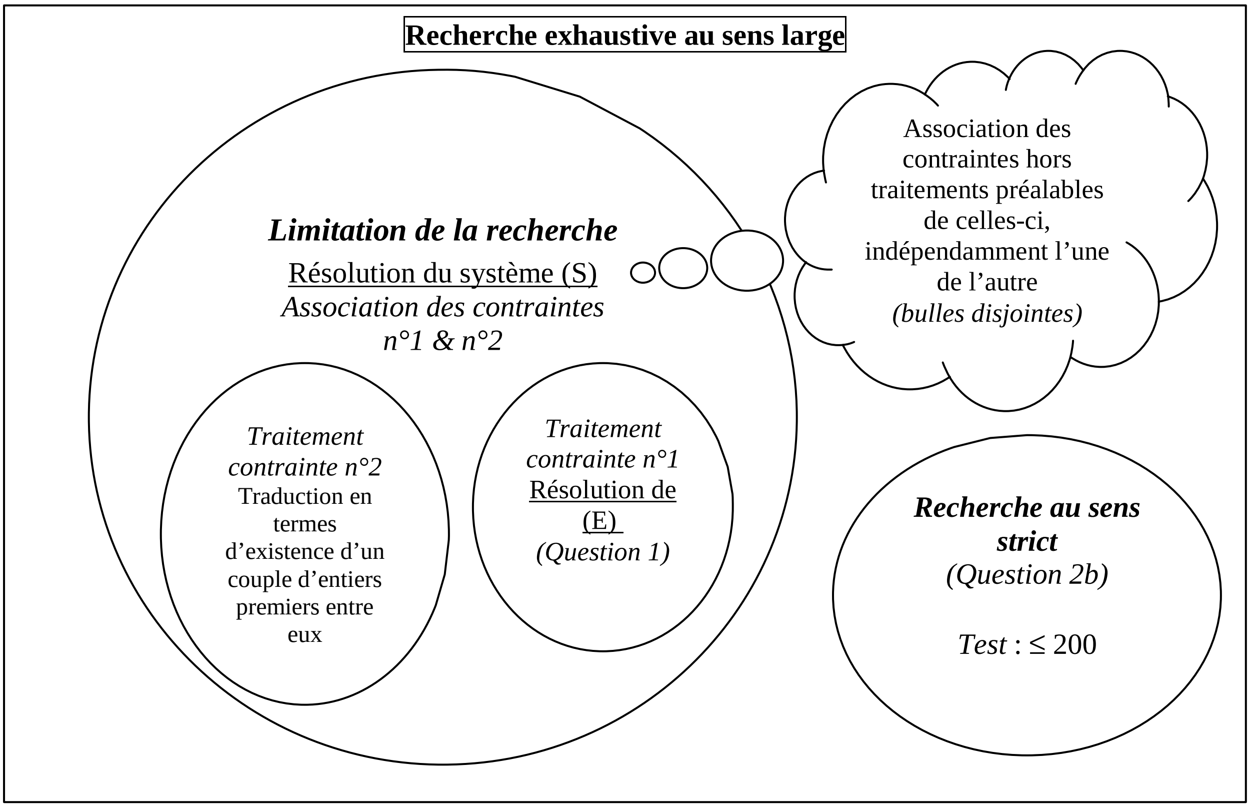


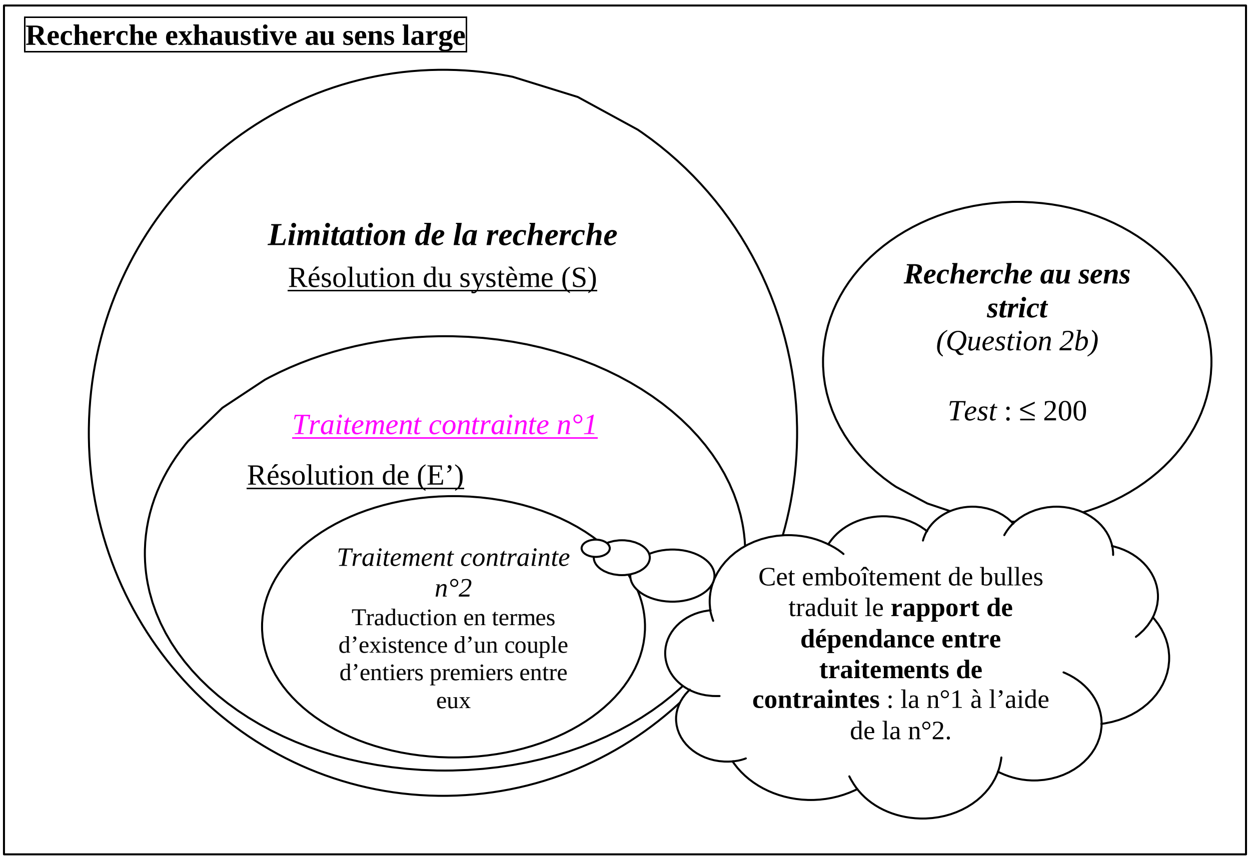
Dans le cas où l’une des contraintes est traduite à partir de l’autre au sein de la limitation (fort rapport de dépendance), nous avons vu qu’il pouvait y avoir deux possibilités du côté opératoire. Les deux organigrammes donnés ci-après l’illustrent conformément à la pensée organisatrice sous-jacente à l’énoncé : dans le *premier organigramme* la résolution de (E) n’est pas utilisée pour traduire la contrainte n°2, le *deuxième organigramme* représente l’autre possibilité. Pour la lecture de ces organigrammes, précisons que nous avons eu besoin d’introduire un nouvel objet symbolisant la pensée organisatrice (équivalence) relative au traitement de la contrainte n°2.


Recherche exhaustive au sens large
Limitation de la recherche
Résolution du système (S)
Traitement contrainte n°2
(Questions 1ci & 1cii)
Traitement contrainte n°1
Résolution de (E)
(Question 1)
⇔
Recherche au sens strict
(Question 2b)
Test : ≤ 200
La contrainte n°2 est traduite en considérant un couple (x,y) solution de (E) MAIS sans que la résolution de (E) ne soit utilisée.


Recherche exhaustive au sens large
Limitation de la recherche
Résolution du système (S)
Traitement contrainte n°2
(Questions 1ci & 1cii)
⇔
Traitement contrainte n°1
Résolution de (E)
(Question 1)
Recherche au sens strict
(Question 2b)
Test : ≤ 200
La contrainte n°2 est traduite en considérant un couple (x,y) solution de (E) ET en utilisant la résolution de cette équation.

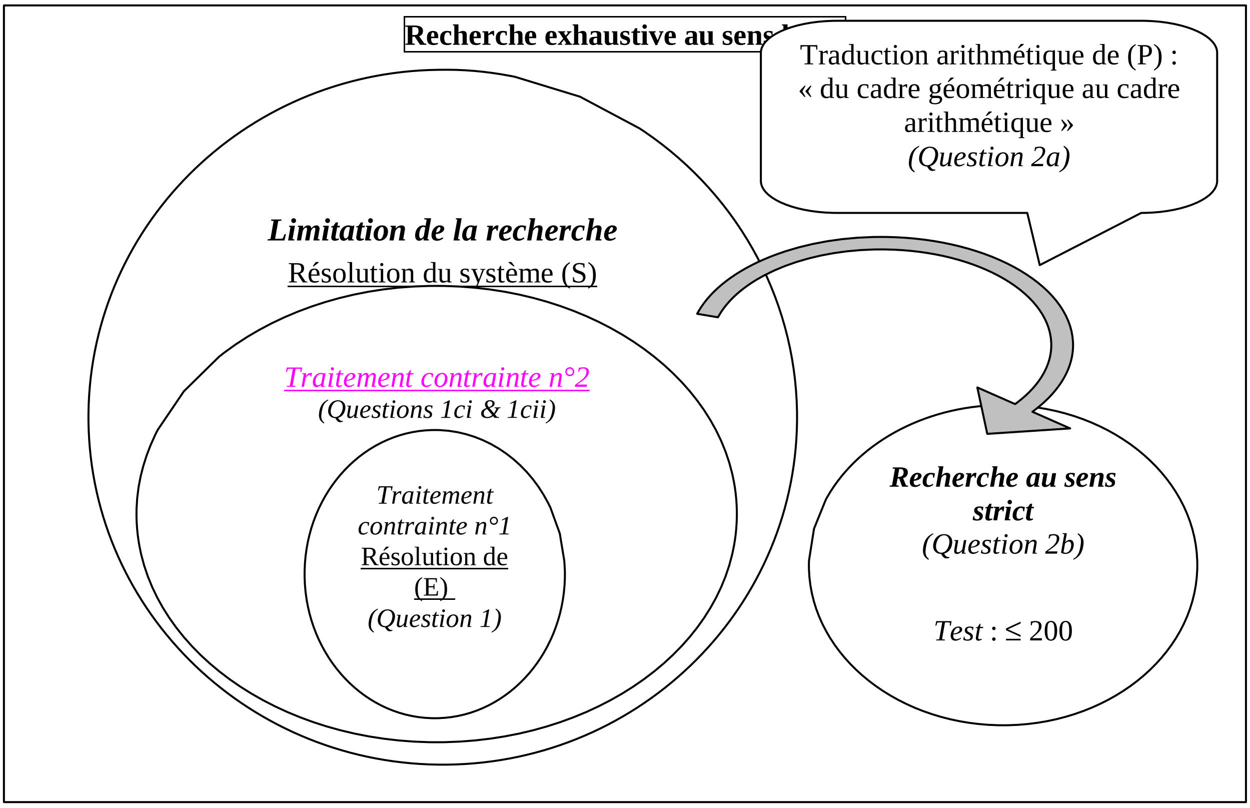
En rupture avec l'organisation proposée par les auteurs de l'épreuve, nous avons vu que l'on peut traduire la contrainte n°2 « PGCD(x,y)=5 » en termes d'existence d'un couple d'entiers (x',y') premiers entre eux tels que x=5x' et y=5y' donc en particulier indépendamment de la contrainte n°1. Ainsi, deux organigrammes sont à envisager, comme nous l'expliquions, selon que la résolution de l'équation (E) est utilisée ou non :


Recherche exhaustive au sens large
Limitation de la recherche
Résolution du système (S)
Association des contraintes n°1 & n°2
Traitement contrainte n°2
Traduction en termes d'existence d'un couple d'entiers premiers entre eux
Traitement contrainte n°1
Résolution de (E)
(Question 1)
Association des contraintes hors traitements préalables de celles-ci, indépendamment l'une de l'autre
(bulles disjointes)
Recherche au sens strict
(Question 2b)
Test : ≤ 200


Recherche exhaustive au sens large
Limitation de la recherche
Résolution du système (S)
Traitement contrainte n°1
Résolution de (E')
Traitement contrainte n°2
Traduction en termes d'existence d'un couple d'entiers premiers entre eux
Recherche au sens strict
(Question 2b)
Test : ≤ 200
Cet emboîtement de bulles traduit le rapport de dépendance entre traitements de contraintes : la n°1 à l'aide de la n°2.

I.2.3.2 Traduction arithmétique de (P)

Si l'on revient au problème (P), il faut ajouter le passage du cadre géométrique (analytique) au cadre arithmétique (question 2.a). Ainsi, l'organigramme déjà construit pour la résolution correspondant à l'énoncé d'entraînement au baccalauréat devient :



Traduire arithmétiquement le problème (P) revient à montrer que l'ensemble (F) est exactement l'ensemble des couples solutions (entières) de (E). Du point de vue de la dimension opératoire, cette traduction nécessite deux types de connaissances :

- des connaissances géométriques pour expliciter le fait que le triangle ABM est rectangle en B, que ce soit par l'intermédiaire du théorème de Pythagore ou de l'outil vectoriel,
- des connaissances algébriques à travers l'utilisation du calcul algébrique pour aboutir à l'équation (E).

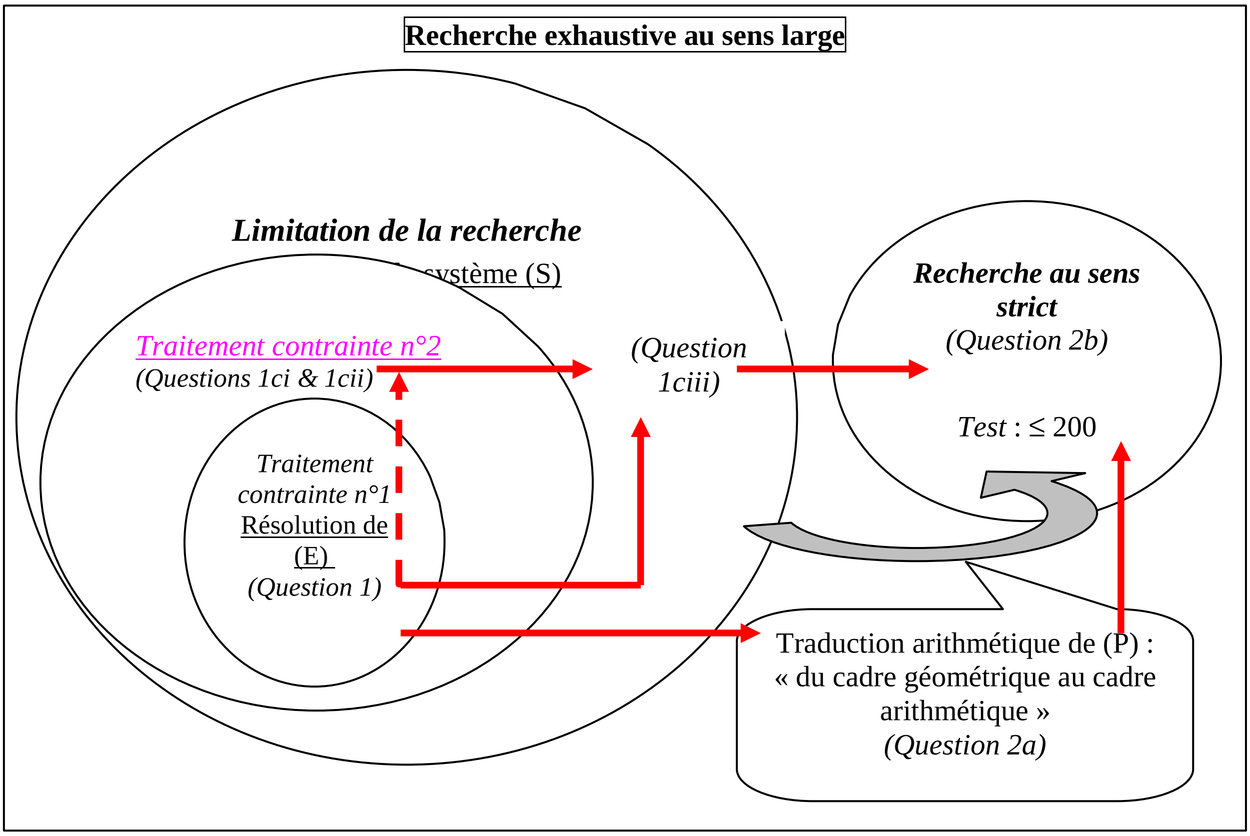
Aucune connaissance propre à l'arithmétique n'est en jeu.

La grille d'analyse relative à ce passage du cadre géométrique au cadre arithmétique est la suivante :

DU CADRE GEOMETRIQUE AU CADRE ARITHMETIQUE						
Copie	**Outil pour traduire «le triangle AMB est rectangle en B »**	**Elément(s) de nature technologique**	**Si « Ensemble solution » donné ≠ Ensemble solution attendu** — Solution fournie par l'élève : *Equation finale obtenue*	*« Ensemble solution » donné (avec éventuellement Spécification de l'entier k)*	Du côté opératoire : le 1er élément provoquant l'échec de la procédure.	Du côté organisateur : connexion avec 1b ?

I.2.3.3 Connexions logiques entre les questions de l'énoncé

Nous complétons l'organigramme précédent en y indiquant à l'aide de flèches les connexions logiques qui existent entre les différentes questions de l'énoncé ; la flèche en pointillés correspond au degré de liberté qui existe au niveau opératoire quant à l'utilisation de la résolution de l'équation (E) pour traduire la contrainte n°2 conformément à l'attente des auteurs du sujet. Ces connexions sont effectivement à prendre en compte pour l'analyse de la pensée organisatrice générée par l'ensemble des questions, comme nous l'expliquions en introduction.



Précisons qu'en choisissant de traduire la contrainte n°2 indépendamment de la contrainte n°1, la connexion entre les deux questions 1ci et 1cii et la question 1ciii disparaît.

I.3 Emergence d'un questionnement didactique

L'énoncé en jeu dans ce chapitre est à rattacher à deux des pôles définis par notre classification des sujets de baccalauréat suivant les types de problèmes en jeu : le pôle de la résolution d'équations diophantiennes et celui de la notion de divisibilité. L'aspect « patchwork » signalé lors de l'analyse des sujets du baccalauréat ne caractérise pas le sujet envisagé ici. Les deux pôles mentionnés précédemment sont en effet imbriqués à travers la donnée d'un système défini par deux contraintes : la première met en scène la tâche emblématique τ[46] dans Z ainsi que τ dans N, et la deuxième contrainte la notion de PGCD.

Notre analyse mathématique montre que plusieurs organisations sont possibles pour aborder le problème étudié selon le traitement choisi pour chacune des deux contraintes définissant le système en jeu. On peut en effet, pour chacune d'elles, jouer à la fois sur les phases de limitation de la recherche et de recherche exhaustive au sens strict et sur le rapport de dépendance entretenu avec l'autre contrainte. L'organisation choisie par les concepteurs permet d'évaluer tout particulièrement sur la tâche emblématique τ dans Z avec laquelle, d'ailleurs, l'énoncé débute.

Comme le montre notre étude institutionnelle, dans certains sujets de baccalauréat le caractère routinier de la tâche emblématique mentionnée précédemment est parfois dépassé et, en général, c'est en réduisant la taille de l'ensemble des solutions recherchées que ce dépassement est opéré. A deux reprises on identifie ce levier dans l'épreuve étudiée ici. La première fois, c'est lorsque le système est mis en scène : la recherche est spécifiée dans N après qu'une résolution dans Z de l'équation définissant la contrainte n°1 ait été demandée. La deuxième fois, ce n'est que superficiellement que le levier mentionné est exploité : une recherche est demandée au sein d'un ensemble fini de N mais après qu'une résolution complète du système en jeu ait fait l'objet de questions précédentes. En revanche, le problème mathématique choisi par les concepteurs de l'épreuve d'entraînement permet un dépassement original de la tâche emblématique par l'intermédiaire, non plus d'une réduction de la taille de l'ensemble au sein duquel les solutions sont recherchées, mais de questions de divisibilité.

Concernant l'autonomie laissée à l'élève, l'analyse menée jusqu'à présent montre que l'élaboration d'une pensée organisatrice relative au problème principal en jeu n'est pas à la charge de l'élève : ce n'est pas sa capacité à développer une pensée organisatrice qui peut être évaluée ici, mais celle à en reconstituer une qui est pré-construite (donnée par l'énoncé). Néanmoins, comme pour les sujets de baccalauréat concernés, le seul balisage pour réaliser la tâche emblématique est la donnée de deux questions, l'une relative à la recherche d'une solution particulière et l'autre à celle de la solution générale :

[46] Résolution d'équations diophantiennes du type $ax+by=c$ avec a, b et c entiers, c multiple du PGCD de a et b.

[…]

a. A l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière $(x_0 ;y_0)$ de (E).

b. Résoudre (E).

[Questions 1.a & 1.b]

De plus, c'est à l'élève de mettre en œuvre un raisonnement par double implication pour démontrer l'équivalence en jeu dans la question 1.cii. Comme cela apparaît dans notre étude des sujets de baccalauréat, l'équivalence logique ne semble pas être considérée comme problématique par l'institution scolaire.

Du côté opératoire, tout est à la charge de l'élève : dans cet énoncé où tout semble figé du côté de la pensée organisatrice, le travail opératoire est laissé à l'autonomie de l'élève. L'analyse mathématique a mis en évidence des degrés de liberté à ce niveau. L'élève a en particulier le choix d'utiliser ou non la résolution de (E) dans la traduction de la contrainte n°2 par l'énoncé « 5 divise x ». Comme nous l'avons montré, ce choix n'est pas anodin : l'apparition de l'élément « 5 divise k » est naturelle dans un cas (elle est même prématurée par rapport aux questions posées), mais non avec le choix contraire.

Ainsi, du point de vue de l'autonomie dévolue à l'élève, cette épreuve est tout à fait caractéristique des évaluations du niveau d'enseignement envisagé.

Nous sommes amenée à nous interroger sur les points particuliers suivants :

Y a-t-il reconstruction (consciente ou non) par l'élève de la pensée organisatrice sous-jacente à l'énoncé ? Une reconstruction minimale lui est-elle nécessaire pour traiter l'ensemble des questions ? Autrement dit, suffit-il à l'élève de se situer au niveau opératoire ? S'il n'y a pas reconstruction de la part de l'élève, ce dernier crée-t-il (consciemment ou non) une autre pensée organisatrice ? Autrement dit, s'affranchit-il de l'organisation sous-jacente à l'énoncé pour en construire une qui lui soit propre ? Qu'est-ce qui est alors à l'origine de cette création ? Quelles en sont les implications au niveau opératoire ?

Comment l'élève va-t-il gérer l'autonomie qui lui est dévolue du côté opératoire ? Celle-ci facilite-t-elle ou, au contraire, fait-elle obstacle à la résolution du problème par l'élève ? D'une manière générale, où se situent ses erreurs et difficultés ?

La dialectique entre les composantes organisatrice et opératoire vit-elle pour l'élève ? Le cas échéant : quel est l'impact d'une pensée organisatrice apparemment figée sur le travail opératoire de l'élève ? Inversement, comment le développement des différents traitements opératoires de l'élève influe-t-il sur sa reconstruction ou création d'une pensée organisatrice, suivie consciemment ou non ?

Un dernier point : La lecture de l'énoncé montre qu'il y a une certaine variabilité quant à l'ensemble des nombres envisagés. Il est demandé de résoudre (E) dans Z (« […] d'inconnues x et y dans Z »), puis le système dans N (« En déduire les entiers naturels solutions de […] ») ; par la suite, concernant le problème géométrique, ce sont tout d'abord les solutions entières qui sont demandées (« l'ensemble (F) des points du plan à coordonnées entières tels que […] ») puis la recherche est limitée aux entiers naturels qui inférieurs ou égaux à 200. En résumé, nous pouvons dire que « de Z, on passe à N, puis on revient à Z et finit dans N ». On peut se demander si cela ne va pas être perturbant pour l'élève : comment va-t-il gérer cette variabilité ? Celle-ci va-t-elle participer à la dialectique entre les composantes organisatrice et opératoire ; le cas échéant, de quelle façon ?

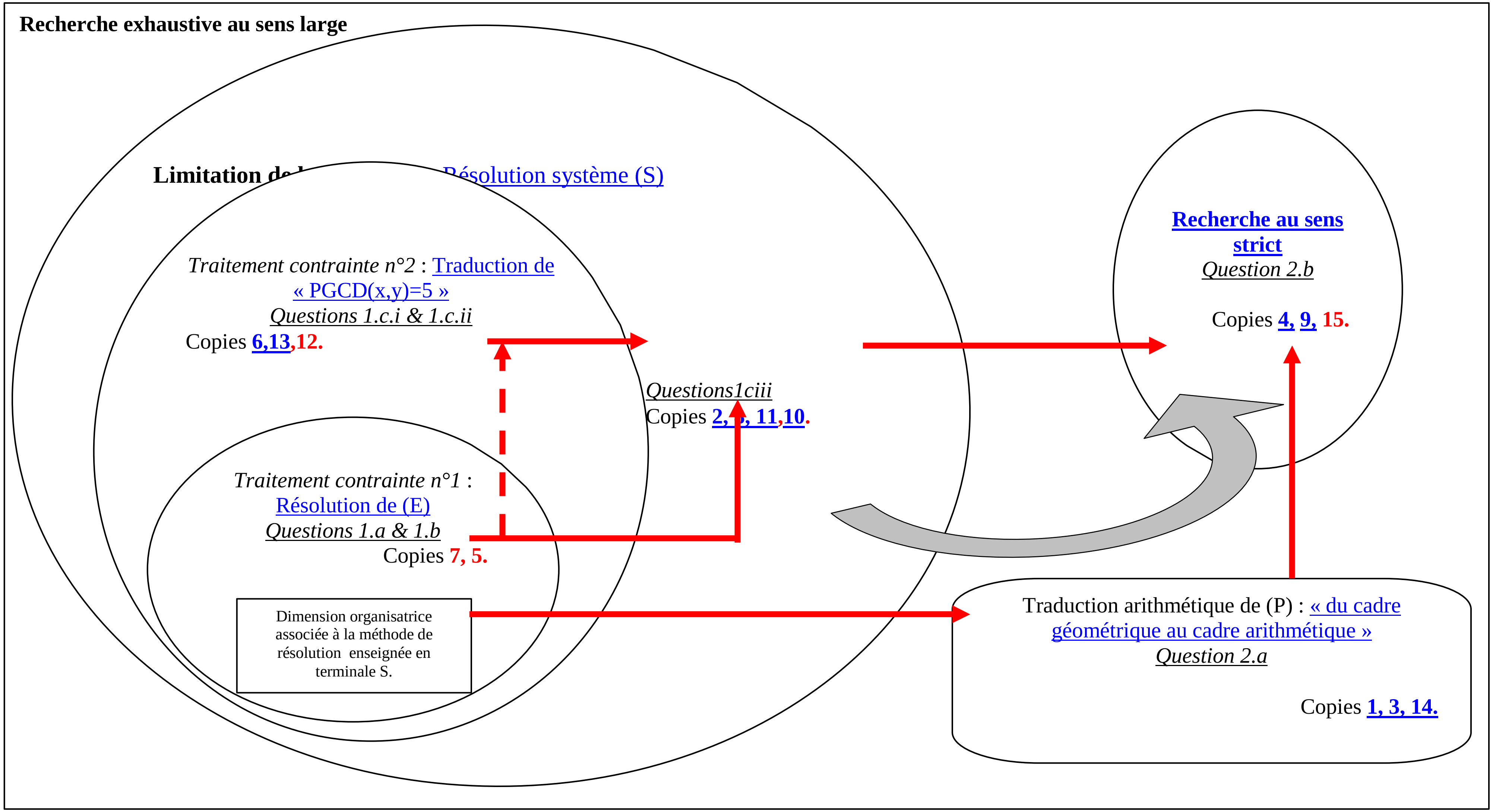
II. ANALYSE *A POSTERIORI*

Nous menons à présent une analyse *a posteriori* sur un corpus constitué de 15 copies d'élèves de terminale S. Celle-ci est en particulier menée à partir des organigrammes et grilles d'analyse construits dans le cadre de l'analyse *a priori*. Les grilles ont été préalablement remplies après lecture des copies étudiées. Précisons que l'exploitation de celles-ci est progressive dans notre rédaction : au moment où nous les intégrerons dans notre texte, l'exploitation en sera partielle. Le questionnement issu de l'analyse *a priori* organise notre « lecture » de ces différents éléments.

II.1 Quelle(s) pensée(s) organisatrice(s) rencontre-t-on dans les copies étudiées ?

Nous nous intéressons ici aux questions posées en fin de l'analyse *a priori* concernant la dimension organisatrice. Pour cela, nous reprenons dans un premier temps l'organigramme issu de l'analyse *a priori* de l'énoncé étudié et y localisons les différentes copies (indication du numéro) en fonction de la dernière question traitée (traitement achevé ou non), sans rendre compte de la réussite à cette question et aux questions antérieures. Il s'agit en effet d'avoir simplement une idée de l'avancement de la résolution du problème (P') dans l'ensemble des 15 copies analysées.

ORGANIGRAMME 1



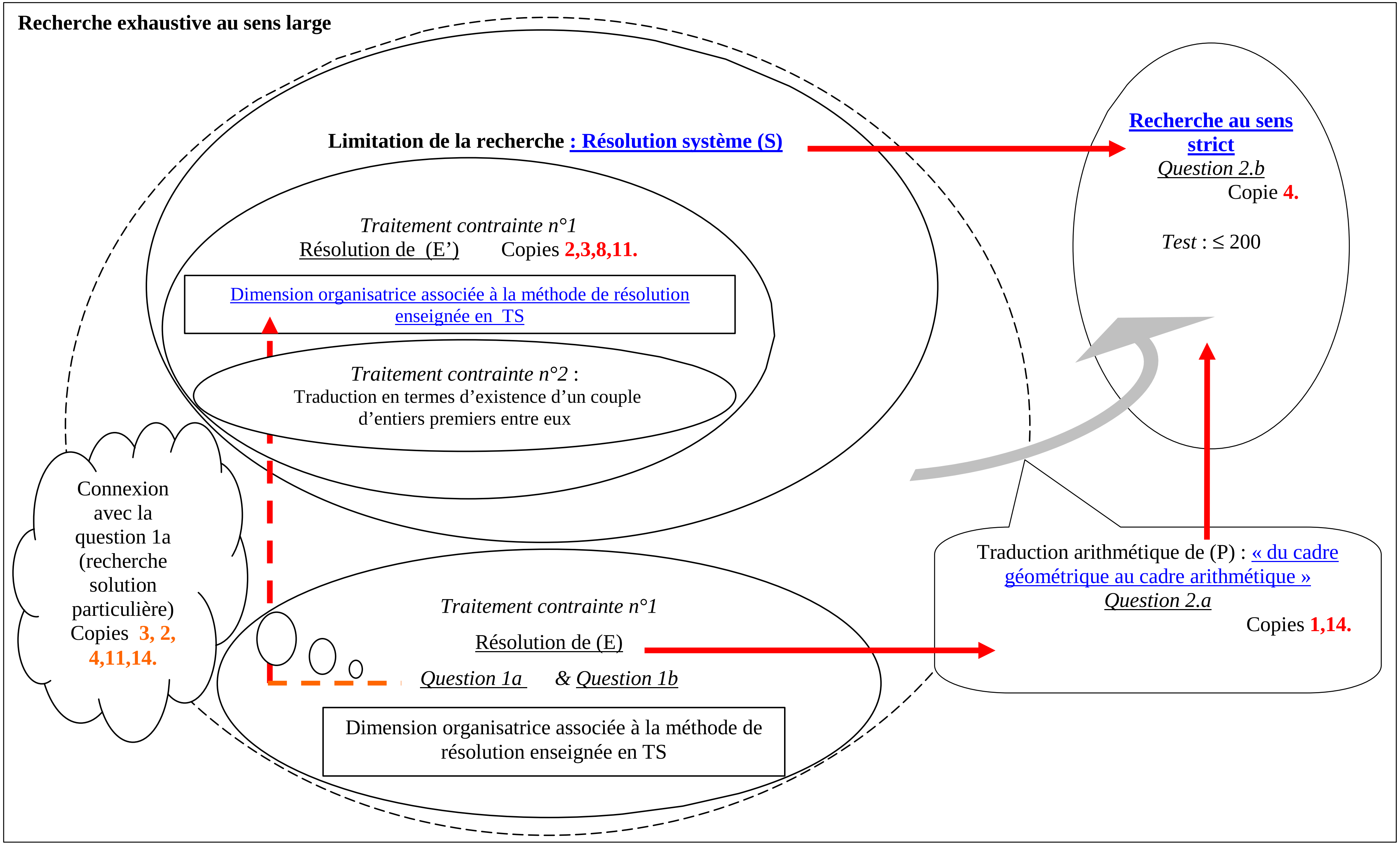
II.1.1 Entre reconstruction de la pensée sous-jacente à l'énoncé et création d'une autre pensée organisatrice.

Comme le montre une des colonnes de la grille d'analyse donnée ci-après, l'organigramme donné ci-dessus ne convient que pour 8 copies sur les 15 qui sont étudiées :

RESOLUTION DE (S)									
Copie	**Contrainte n°1**	**Contrainte n°2 Type de traduction**		**L'élément « 5 divise k »**			**Connexion(s) logique(s) avec autre(s) question(s)**		**Echec(s) Raisonnement(s) par $\Leftrightarrow$**
		Indépendante de la contrainte n°1 : Traduction en termes d'existence d'un couple d'entiers premiers entre eux	Dépendante de la contrainte n°1	Apparition question(s) antérieures(s)	Dans l'association des contraintes n°1 et n°2 : *Equation 17x'-11y'=1*	Dans l'association des contraintes n°1 et n°2 : *Th.Gauss (emploi explicite)*	Explicite(s)	Implicite(s)	
1	Résolution de (E) CLIQUER	✔			Résolution CLIQUER		∅	∅	Une seule solution donnée
2		✔					∅	1.a	Une seule solution donnée
3		✔					« voir 1.a »	∅	Une seule solution donnée
4		✔					∅	1.a	5 divise k $\Rightarrow$ 5 divise x
8		✔					∅	∅	*Traitement question incomplet*
9			11k+10≡0(mod5)			✔	∅	1.b & 1.c.ii	5 divise k $\Rightarrow$ 5 divise x
10			divise 11t+10 et 17t+15	✔		✔	∅	1.b & 1.c.ii	5 divise k $\Rightarrow$ 5 divise x
11		✔			Résolution CLIQUER		« d'après 1.a »	∅	Une seule solution donnée
14		✔					∅	1.a	Une seule solution donnée
15			x=5q puis 11k-10=5q			✔	∅	1.b & 1.c.ii	5 divise k $\Rightarrow$ 5 divise x

En observant en particulier la colonne « Contrainte n°2, Type de traduction », on constate qu'il n'y a que dans les copies 9, 10 et 15 que la contrainte n°2 est traduite à partir de l'autre contrainte associée au système (S), conformément à la pensée organisatrice sous-jacente à l'énoncé. Pour les 7 autres copies mentionnées dans cette grille, il ne suffit pas de compléter l'organigramme initial (*organigramme 1*) ; il faudrait en construire un nouveau qui rende compte d'une organisation autre que celle sous-jacente à l'énoncé. En effet, **dans les textes de résolution correspondants, le rapport de dépendance dans le traitement des contraintes est inversé par rapport à celui de l'organisation proposée dans l'énoncé lors de la synthèse à faire dans la question 1ciii :** c'est la contrainte n°1 qui est travaillée à partir de la contrainte n°2. Cette dernière est préalablement traduite avec l'équivalence suivante : « 5 est le PGCD de x et y si et seulement s'il existe deux entiers x' et y', premiers entre eux, tels que x=5x' et y=5y' ». Néanmoins, la construction de ce nouvel organigramme est délicate parce que la pensée organisatrice identifiée dans les sept copies concernées est en rupture avec ce qui est proposé dans l'énoncé. En effet, ici les élèves ont préalablement résolu l'équation (E) dans la question 1 donc deux pensées, même partiellement, coexistent : l'une où l'on traite la contrainte n°1 indépendamment de la contrainte n°2 en résolvant (E) et l'autre où cette résolution n'intervient pas. Les deux organigrammes correspondants donnés lors de l'analyse *a priori* (cf. § I.2.3.1) sont donc possibles. Nous les associons afin de rendre compte de la coexistence des deux organisations qui sont en présence, tout en privilégiant la pensée suivie par les élèves pour résoudre le système dans le cadre de la question 1ciii. Nous obtenons finalement l'organigramme qui suit pour les copies 1, 2, 3, 4, 8, 11 et 14 :

ORGANIGRAMME 2 (Copies 1, 2, 3, 4, 8, 11 et 14)



Comme nous l'avons représenté dans cet organigramme, pour répondre complètement à la question 2a, l'élève a besoin de la résolution de l'équation (E). Néanmoins, il serait légitime vis-à-vis de la résolution du problème (P) explicité dans la question 2b, de répondre que l'ensemble (F) recherché est exactement l'ensemble des solutions entières de l'équation (E) ; l'analyse correspondante des copies concernées sera abordée dans la suite (cf. §II.1.2).

Les copies qui ne sont pas concernées par cet organigramme (copies 5,6,7,9,10,12,13,15) constituent un ensemble que nous scindons en deux selon que la résolution de (E) est utilisée, ou ne l'est pas, dans le traitement de la contrainte n°2, que ce soit dans le cadre des questions 1ci et 1cii ou de la question 1ciii ; l'analyse *a priori* légitime ce choix. En plus de la grille précédente, nous avons besoin pour faire ce partage, de la grille d'analyse relative au traitement de la contrainte n°2 :

TRAITEMENT CONTRAINTE « PGCD(X,Y)=5 »									
Copie	$\Rightarrow$				$\Leftarrow$				
	Du côté opératoire		Niveau θ			Condition nécessaire pour (x,y) solution de (E) portant sur PGCD(x,y) (Question 1ci)			
						Du côté opératoire		*Niveau θ Relatif à δ divise 5*	
	Utilisation résolution de (E)	*Traduction éventuelle du PGCD*	*Explicite*	*Implicite*		Utilisation résolution de (E)	Traduction éventuelle du PGCD	Explicite	Implicite
1	∅	« x=5x’ » (Renvoit à la traduction en termes d’existence d’un couple d’entiers premiers entre eux explicite en 1ci)	Traduction en termes d’existence d’un couple d’entiers premiers entre eux		Pas d’utilisation résolution (E)	∅	Traduction en termes d’existence d’un couple d’entiers premiers entre eux	« δ (17x’-11y’)=5 »	
2	∅	∅	Caractéristique diviseur commun		Echec dimension organisatrice ⇔	∅	∅	∅ « CN donnée direct »	
3	∅	∅	Caractéristique diviseur commun		Echec dimension organisatrice ⇔	∅	∅	✔	<u>Th en acte</u> : « 5 divise 17x-11y donc 5 divise x et

						Perte d'information avec lecture en termes de divisibilité			y »
4	∅	∅	Caractéristique diviseur commun		Echec dimension organisatrice ⇔	∅	∅	Combinaison linéaire	
6	Oui	« Soit 10,15, un couple d'entiers naturels solution de (E) PGCD(10,15)=5 10=2×5 et 15=3×5 quand δ=5, PGCD(x,y)=PGCD(10,15) {ratures} δ divise forcément x et y »							
8	∅	∅	Th.Gauss (appliqué à (17x,5,17))	« 5 divise 17x et 11y » <u>Hypothèse</u> : car 5 divise 17x-11y	Echec dimension organisatrice ⇔	∅	∅	Combinaison linéaire « (Théorème de Bézout) »	
9	∅	Traduction en termes d'existence d'un couple d'entiers premiers entre eux	Traduction en termes d'existence d'un couple d'entiers premiers entre eux		Echec dimension organisatrice ⇔	∅	∅	Combinaison linéaire	
10	∅	∅	« par définition du PGCD »		Utilisation résolution (E) + Apparition de l'élément « 5 divise t » (renvoit à résolution (E))	Oui, Calcul de 17x-11y	∅	Combinaison linéaire	

11	∅	Traduction en termes d'existence d'un couple d'entiers premiers entre eux	traduction de traduction en termes d'existence d'un couple d'entiers premiers entre eux		Echec dimension organisatrice ⇔	∅	∅	Combinaison linéaire	
12	∅	∅	« car δ est le PGCD »						
13	∅	∅	Th.Bézout		Echec dimension organisatrice ⇔	Oui	Caractéristique diviseur commun (pour la CN « δ divise 11k+10 et 17k+15 ») <u>Remarque</u> : la réponse de l'élève à cette question s'arrête ici	∅	
14	∅	∅	« 17 et 5 premiers entre eux »	« 5 divise 17x et 11y » <u>Hypothèse</u> : car 5 divise 17x-11y & Th.Gauss appliqué à (17x,5,17)	Echec dimension organisatrice ⇔	∅	∅	Combinaison linéaire	
15	∅	∅	∅	<u>Hypothèse</u> : Caractéristique diviseur commun	Echec dimension organisatrice ⇔	∅	∅	Combinaison linéaire	

En conclusion :

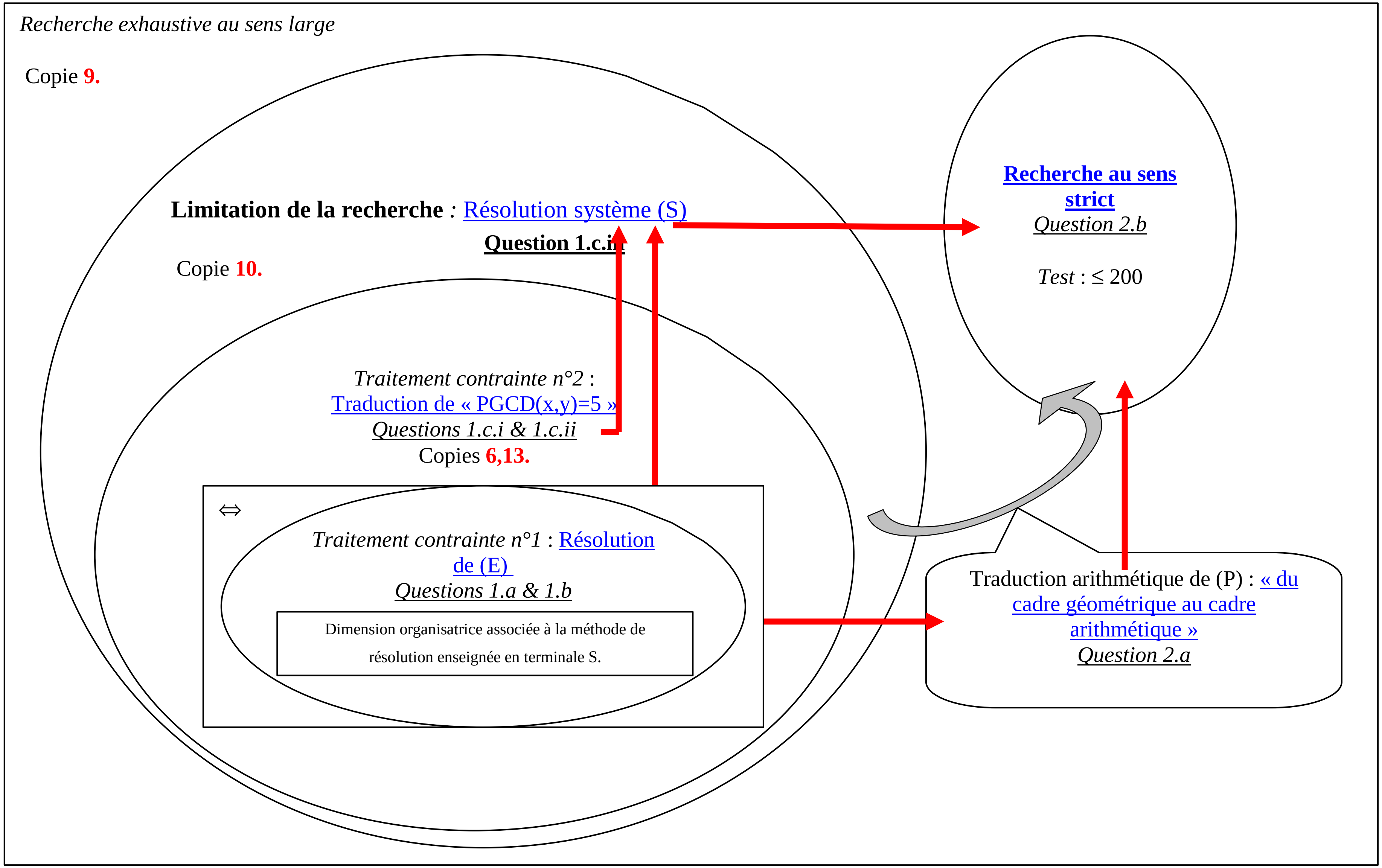
- Dans les copies 6, 9, 10 et 13, la résolution de (E) est utilisée.
- Dans les copies 12 et 15, la résolution de (E) n'est pas utilisée.

Les copies 5 et 7 sont mises de côté relativement à cette distinction puisque seule la résolution de (E) est traitée dans ces textes ; de manière arbitraire, nous les localiserons sur *l'organigramme 1*, comme nous pourrions les associer à l'un des autres organigrammes.

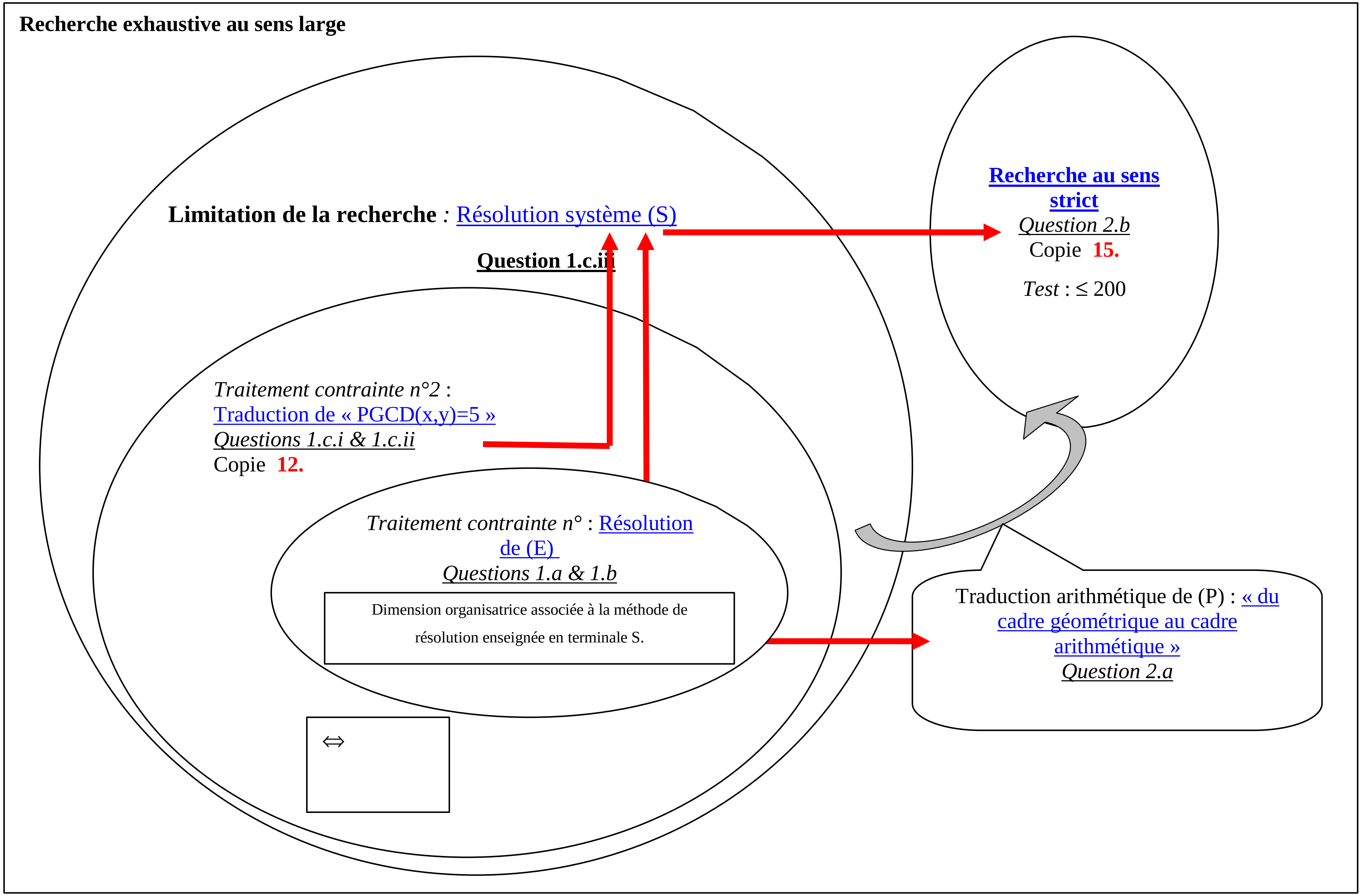
Nous donnons donc ci-après deux organigrammes :

- l'*organigramme 1.1* est associé aux copies 6, 9, 10 et 13,
- l'*organigramme 1.2* correspond quant à lui aux copies 12 et 15.

ORGANIGRAMME 1.1 (Copies 6, 9, 10 et 13)



ORGANIGRAMME 1.2 (Copies 12 et 15)



Revenons aux copies 1,2,3,4,8,11 et 14. Dans ces 7 copies, l'organisation globale sous-jacente à l'énoncé n'est pas reconstruite ; une autre pensée organisatrice est créée : c'est la contrainte n°1 qui est travaillée à partir de la contrainte n°2 et non l'inverse. Ces élèves sont donc capables de s'affranchir de l'organisation sous-jacente à l'énoncé pour construire une organisation qui leur soit propre. Ce faisant, ils ne respectent pas le contrat didactique sous-jacent à l'expression « en déduire ». Pourquoi n'ont-ils pas respecté cette clause du contrat ? S'agit-il d'un manque d'attention ou d'une incapacité à suivre l'indication ? On peut émettre l'hypothèse que l'automaticité de la traduction usuelle de l'égalité concernant le PGCD a occulté « en déduire », expression à laquelle on aurait tendance à revenir quand on ne sait comment poursuivre ; le contrôle a-didactique de l'action s'efface alors au profit d'un contrôle didactique où l'on essaie de deviner les intentions de l'auteur. Il est alors naturel de se poser la question suivante : **Qu'est-ce qui est à l'origine de cette bifurcation ?** Il nous semble raisonnable de faire l'hypothèse que c'est le changement de traduction de la contrainte n°2. Nous reviendrons sur ce point dans l'étude de la gestion par les élèves de l'autonomie qui leur est dévolue du côté opératoire.

Comme nous l'avons vu dans l'analyse *a priori*, **le choix de la nouvelle traduction induit un changement dans le travail opératoire** : la tâche de résolution d'une équation diophantienne réapparaît avec l'équation $17x'-11y'=1$ à résoudre. Il est alors surprenant de constater que le système (S) n'est complètement résolu que dans une seule copie (copie 4) sur les 7 concernées. La grille correspondante est donnée ci-après ; à chaque copie correspond une ligne scindée en deux, afin de pouvoir comparer la résolution de cette équation avec la résolution de (E) :

RECHERCHE SOLUTION PARTICULIERE DE (E') : $17x'-11y'=1$						
Copie	**Equation en jeu explicitement**	**Niveau technique**				**Niveau technologique (associé ou non à la technique en jeu)**
		Technique			Discours descriptif de la technique	
		Algorithme d'Euclide		*Autres*		
		Arrêt avant avant dernière ligne $11= 6\times1+5$ et remontée	Jusqu'au dernier reste non nul $6=5\times1+1$ et remontée			
n°1	$17x-11y=5$ puis $17x'-11y'=1$		$x'=2$ et $y'=3$ puis $x=10$ et $y=15$		« Algorithme d'Euclide »	∅
n°2	$17x-11y=5$ puis $17x'-11y'=1$			$x'=2$ et $y'=3$ directement puis $x=10$ et $y=15$	∅	∅
n°3	$17x-11y=5$ puis $17x'-11y'=1$			$x'=2$ et $y'=3$ directement puis $x=10$ et $y=15$	« voir 1.a »	?« voir 1.a »
n°4	$17x-11y=5$ puis $17x'-11y'=1$			$x'=2$ et $y'=3$ directement	∅	∅
n°8	$17x-11y=5$ puis $17(5x')-11(5y')=5$					
n°11	$17x-11y=5$ puis $17x'-11y'=1$			$x'=2$ et $y'=3$ directement puis $x=10$ et $y=15$	∅	« D'après 1.a une solution particulière est $x_0'=2$ $y_0'=3$ »
n°14	$17x-11y=5$ puis $17x'-11y'=1$			$x'=10$ et $y'=15$ directement puis $x=50$ et $y=75$	∅	∅

<table>
<tr><th colspan="6">RECHERCHE SOLUTION GENERALE DE (E') 17X'-11Y'=1</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Copie</th><th rowspan="2">Spécification de l'entier k en jeu dans les expressions finales de x et y</th><th colspan="2">Niveau technique</th><th rowspan="2">Niveau technologique
(associé ou non à la technique en jeu)</th><th rowspan="2">Réciproque</th></tr>
<tr><th>Technique :
Avec report
(Th.Gauss ×1)</th><th>Discours descriptif de la technique</th></tr>
<tr><td>n°1</td><td colspan="5" rowspan="3">Arrêt à l'obtention d'une solution particulière</td></tr>
<tr><td>n°2</td></tr>
<tr><td>n°3</td></tr>
<tr><td>n°4</td><td>« t' ∈ Z »</td><td>y'=17t'+3
x'=11t'+2</td><td>« On reporte y' dans (1) »
(1) : 17(x'-2)=11(y'-3)</td><td>« Si (x',y') est solution de (1) 17 divise donc 11(y'-3). Or 17 et 11 premiers entre eux Donc 17 divise y'-3 »</td><td>1</td></tr>
<tr><td>n°11</td><td colspan="5" rowspan="2">Arrêt à l'obtention d'une solution particulière</td></tr>
<tr><td>n°14</td></tr>
</table>

Dans la copie 4, l'équation diophantienne 17x'-11y'=1 est résolue entièrement et de la même façon que dans la question 1.b, tant du côté opératoire qu'organisateur. Par contre, dans les autres copies, il n'est donné qu'une solution particulière, alors que la question 1.b a été correctement traitée. Comme l'illustre la grille d'analyse de la résolution de (E), ce type de tâche est tout à fait routinier pour les élèves (le niveau technologique relatif à l'obtention de la solution générale est très révélateur quant à cette routinisation). La plupart des élèves résout l'équation (E) correctement :

<table>
<tr><th colspan="8">RECHERCHE SOLUTION PARTICULIERE DE (E) 17X-11Y=5</th></tr>
<tr><th rowspan="4">Copie</th><th rowspan="4">Equation en jeu explicitement</th><th colspan="5">Niveau technique</th><th rowspan="4">Niveau technologique
(associé ou non à la technique en jeu)</th></tr>
<tr><td colspan="3">Technique</td><td rowspan="3">Discours descriptif de la technique</td></tr>
<tr><td colspan="2">Algorithme d’Euclide</td><td rowspan="2">Autres</td></tr>
<tr><td>Arrêt avant avant dernière ligne 11= 6×1+5 et remontée</td><td>Jusqu’au dernier reste non nul 6=5×1+1 et remontée</td></tr>
<tr><td>n°1</td><td>17x+11y=5</td><td>(-1,-2)</td><td></td><td></td><td>∅</td><td>∅</td></tr>
<tr><td>n°2</td><td>(E)</td><td></td><td>(10,15)</td><td></td><td>« recherche d’une solution particulière par l’algorithme d’Euclide »</td><td>« dernier reste non nul est 1, PGCD(17,11)=1, 17 et 11 sont donc premiers entre eux »</td></tr>
<tr><td>n°3</td><td>(E)</td><td></td><td>(10,15)</td><td></td><td>« on utilise l’algorithme d’Euclide »
? « on utilise le théorème de Bézout » (avant remontée)</td><td>? « on utilise le théorème de Bézout »</td></tr>
<tr><td>n°4</td><td>(E)</td><td></td><td>(10,15)</td><td></td><td>∅</td><td>∅</td></tr>
<tr><td>n°5</td><td>(E)</td><td></td><td>1. Arrêt en cours de remontée</td><td>2. Direct : (-1,-2)</td><td>1. « D’après l’algorithme d’Euclide on a »
2. ∅</td><td>1. Egalité ensembles diviseurs
2. ∅</td></tr>
<tr><td>n°6</td><td>(E)</td><td></td><td>(10,15)</td><td></td><td>« Utilisons l’algorithme d’Euclide PGCD(17,11)=1 »
« Reprenons l’algorithme d’Euclide à l’envers pour trouver une solution particulière »</td><td>Egalité ensembles diviseurs</td></tr>
<tr><td>n°7</td><td>17x-11y=1</td><td></td><td>(2,-3)
(10,-15)
« 5=10×17 – 15×11 »</td><td></td><td>« Résolvons 17u-11v=1 »</td><td>∅</td></tr>
</table>

n°8	(E)			Dernière ligne 5=5×1 (10,5)[47]		∅
n°9	∅			Dernière ligne 5=5×1 (10,15)	« Algorithme d'Euclide »	∅
n°10	∅		(10,15)		« Algorithme d'Euclide »	∅
n°11	(E)		(10,15)		« Algorithme d'Euclide »	∅
n°12	(E)			Dernière ligne + Remontée à partir de 5=11-6×1 (-1,-2)	« On fait l'algorithme d'Euclide »	∅
n°13	(E)			Arrêt 1ère ligne 17=11×1+6 Traitement opératoire original[48]	« d'après l'algorithme d'Euclide, »	∅
n°14	(E) & 17x-11y=1		(10,15)		« On cherche d'abord une solution pour 17x-11y=1. Algorithme d'Euclide » ; « pour trouver une solution particulière on remonte l'algorithme »	∅
n°15	(E)		(10,15)			« dernier reste non nul est 1 donc 11et 17 sont premiers entre eux »

[47] **Du côté opératoire** : erreur de calcul : « 1=6-5×1=6-(11-6×1)=6-11+6×1=6×2-11=(17-11×1)×2-11=17×2-11×**1** »

[48] « 17=11×1+6

11=(17-11) ×1+5

6=(17×1+11×2) ×1+1

5=(17-11+17×1-11×2) ×5+0

5=17×10-11×15+0 »

OBTENTION SOLUTION GENERALE DE (E) 17X-11Y=5								
Copie	**Spécification de l'entier k en jeu dans les expressions finales de x et y**	**Niveau technique**					**Niveau technologique (associé ou non à la technique en jeu)**	**Réciproque**
		Technique				Discours descriptif de la technique		
		Emploi des lettres x0 et y0	*Avec report (Th.Gauss ×1)*	Sans report (TH.GAUSS ×2)				
n°1	« t∈ Z »	0	y=17t-2 x=11t-1			∅	« Or ainsi 17 divise 11(2+y) et que 17 et 11 sont premiers entre eux alors 17 divise (2+y) (théorème de Gauss)	1
n°2	« k∈ Z »	0	y=17k+15 x=11k+10			∅	1 (illisibilité)	1
n°3	« t∈ Z »	0	y=17t+15 x=11t+10 Remarque : notation fractionnaire			« On reporte dans (E) »	« Si (x ;y) est solution alors 17 divise 11(y-15). Or 17 et 11 sont premiers entre eux donc 17 divise y-15 (théorème de Gauss) »	1
n°4	« t∈ Z »	0	y=17t+15 x=11t+10			« On reporte y dans (1) » (1) : 17(x-10)=11(y-15)	« Si (x,y) est solution de (E) donc 17 divise 11(y-15). Or 17 et 11 premiers entre eux (la division euclidienne de 17 par 11 donne 6 comme reste et 6<11) Donc 17 divise y-15 (Théorème de Gauss). »	1
n°5	« t∈ Z »	0		y=17t-2 x=11t-1	Même entier t		« Comme 17 et 11 sont premiers entre eux (car 17 et 11 sont premiers) alors 17 divise y-2. De la même façon 11 divise (x-1). (Théorème de Gauss) ».	1
n°6	0	0	y=17t+15 x=11t+10			«On reporte dans (E) » après modification	« Si(x,y) est solution, alors 17 divise 11(y-15) or 17 et 11 sont premier entre eux donc 17 divise y-15 » (Théorème de Gauss »	1

n°7	« t∈ Z »	0	y=17t+15 x=11t+10			« On reporte dans (E) » après modification	« Si (x,y) est solution alors 17 divise 11(y-15). Or 17 et 11 sont premiers entre eux, donc 17 divise (y-15) (théorème de Gauss »	1
n°8	« k∈ Z »	0	y=17k+5 x=11k+10			« On reporte dans (E) » après modification	« Si (x,y) est solution, alors 17 divise 11(y-5). Or 17 et 11 sont premiers entre eux (le dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide est 1) donc 17 divise y-5 »	1
n°9	« k∈ Z »	0	x=11k+10 y=17k+15			« on reporte le résultat dans (F) » (F) : 17(x-10)=11(y-15)	A partir de (F) : « Donc 11divise 17(x-10). Or 11 et 17 sont des nombres premiers, ils sont donc premiers entre eux. 11 divise (x-10) et 11 et 17 sont premiers entre eux donc 11 divise x-10 (théorème de Gauss) »	1
n°10	« t∈ Z »	0	y=17t+15 x=11t+10				« 17 divise 11(y-15) et PGCD(17,11)=1 donc d'après le théorème de Gauss 17 divise y-15 »	0
n°11	« t∈ N »	0	y=17t+15 x=11t+10			« On remplace y par 17t+15 dans (1) » (1) : 17(x-10)=11(y-15)	« Si x et y sont solutions, alors, 17 divise 11(y-15). Or 17 et 11 sont premiers entre eux, donc 17 divise (y-15) (théorème de Gauss)»	1
n°12	0	0	N°1 : Abandon : « 17x-11(17k-2)=5 17x=5+11(17k-2) 17x=11×17k+22×-5 »	N°2 : y=17k-2 x=11k-1	Même entier k	N°1 « Pour trouver x on remplace y par 17k-2 dans (E) »	«donc 17 divise 11(y+2) et de plus 17 et 11 sont premiers entre eux donc 17 divise (y+2) (théorème de Gauss) »	0
n°13	« k∈ Z » « k'∈ Z »	1		y=17k+15 x=11k+10	Deux entiers k et k' : « 17(11k'+10)-11(17k+15)=5 187k'+170-187k-165-5=0 187kk'=0 kk'=0 k=k' »		« On a, d'après le théorème de Gauss on sait que 17 et 11 sont premiers entre eux donc 17k=11(y-y0) avec k ∈ Z 17k=y-y0 avec k ∈ Z »	0

n°14	« k∈ Z »	0	y=17k+15 x=11k+10			« On remplace dans (E) » Après modification	« Si x et y sont solutions alors 17 divise 11(-15+y). Or 17 et 11 sont premiers entre eux (cf. algorithme d'Euclide) alors 17 divise –15+y (théorème de Gauss) tel que –15+y=17k, k∈ Z»	1
n°15	« k∈ Z »	0	y=17k+15 x=11k+10			« on revient dans (E) » Après modification	« Si (x,y) est solution, 17 divise 11(y-15), comme 17 et 11 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 17 divise (y-15) »	0

Si l'on revient aux copies 1,2,3,8,11 et 14, on constate donc que les élèves savent résoudre l'équation diophantienne 17x-11y=5 avec le support des questions 1.a et 1.b mais que, face à nouveau à ce type de tâche, cette fois sans intermédiaire, ils ne donnent qu'une réponse partielle. Ainsi, **après avoir montré leur aptitude à développer les différents traitements opératoires nécessaires, ils échouent, montrant leur difficulté à reconstituer la dimension organisatrice associée à la résolution de cette tâche**. Il y a peut-être là cependant un effet de contrat didactique : la tâche principale en jeu étant inhabituelle, l'élève peut penser par exemple avoir répondu à l'attente de l'enseignant dès l'instant qu'il a trouvé une solution au système qu'on lui demande de résoudre. Le fait que cinq élèves sur les sept concernés semblent avoir établi le lien avec la question 1a (recherche d'une solution particulière de (E)) va dans le sens de cette hypothèse. L'exemple de la copie 3, où la connexion mentionnée est explicitée, appuie également cet élément d'analyse : dans le cadre de la question 2a (passage du cadre géométrique au cadre arithmétique) on y rencontre pour la troisième fois ce type de tâche. L'élève est conduit à résoudre l'équation 17x-11y=-15, à cause d'une erreur dans le report d'une ligne de calcul à la suivante :

« $x^2 - 32x + 256 + y^2 + 26y + \mathbf{169} = 289 + 121 + x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4$

$- \quad 32x + 256 + 26y + \mathbf{129} = 289 + 121 + 2x + 1 + 4y + 4$ »

Et, contrairement à l'attitude mentionnée précédemment, l'élève s'engage dans une résolution complète de cette équation. La question 1.a est explicitement citée dans la recherche d'une solution particulière : l'élève obtient le couple solution (-30,-45), à partir du couple (10,15) solution de (E). Le texte de résolution s'achève brutalement dans l'obtention de l'expression de x à partir de celle de y :

« $17x = -187t + 480$

$x =$ »

Nous ne pouvons malheureusement pas savoir si à cet endroit l'élève a véritablement rencontré un obstacle ou si, simplement, il a été stoppé par son professeur pour lui remettre sa copie. Aussi, nous poursuivons notre analyse sous l'hypothèse qu'il a rencontré un obstacle, afin de voir où cela nous mène. On peut imaginer que l'élève va être arrêté par le fait que 480 n'est pas divisible par 17. En effet, ce serait la première fois dans ce problème qu'un nombre non entier est en jeu. L'élève peut être ainsi alerté en étant, consciemment ou non, attentif au contrat en jeu dans ce problème… Néanmoins, en reprenant la question 1.b, on trouve dans cette copie le calcul suivant :

« $17x = 187t + 170$

$$x = \frac{187t + 170}{17}$$

$x = 11t + 10$ »

On peut donc imaginer que si l'élève disposait de temps, il aurait au moins écrit la ligne suivante :

$$x = 187t + \frac{480}{17},$$

avant de se rendre compte que 480 n'est pas divisible par 17…
Ces remarques permettent de poser la question suivante : Est-ce que le fait de sortir du champ des nombres entiers peut alerter un élève ? Autrement dit : **la nature des nombres en jeu constitue-t-elle pour l'élève comme un moyen de contrôle ?** Cette question sera reprise dans la suite de notre analyse *a posteriori*.

Que ce soit à travers les tâches de résolution des équations (E) et (E') (réciproque non vérifiée), la traduction de la contrainte n°2 à partir de la contrainte n°1 (une seule implication envisagée pour démontrer l'équivalence *PGCD(x,y)=5* $\Leftrightarrow$ *5 divise x*) ou encore la synthèse à faire pour achever la résolution du système (S) (équivalence entre le système obtenu après traitements et association des deux contraintes et le système (S) initial), on observe qu'il y a un réel problème pour la plupart des élèves du côté organisateur vis à vis de l'équivalence logique. Ce constat rejoint les résultats des divers travaux didactiques sur les difficultés relatives à la logique mathématique (Durand-Guerrier (1996)). Néanmoins, le taux d'échec est relativement faible (quatre élèves sur quinze) lorsqu'il s'agit de la tâche routinière de résolution des équations (E) et (E').

II.1.2 Trois copies proposent une résolution complète du problème (P')

L'organigramme n°1 indique que l'ensemble des questions n'est abordé que dans 3 copies sur les 15 étudiées ; il s'agit des copies 4, 9 et 15. Il est très intéressant pour notre analyse qu'avec elles soient représentés les trois organigrammes en jeu. Nous avons en effet les deux cas conformes à l'énoncé avec un traitement de la contrainte n°2 à partir de la n°1 ; le dédoublement provient de l'utilisation (copie 9) ou de la non utilisation (copie 15) de la résolution de (E) dans ce traitement. Et, nous avons le cas d'une pensée organisatrice non conforme à l'énoncé avec une traduction de la contrainte n°2 indépendante de l'autre contrainte (copie 4).

Avant d'en arriver à la phase de recherche au sens strict, le passage du cadre géométrique au cadre arithmétique, autrement dit la traduction arithmétique de (P'), est à analyser. Six copies, et non seulement les trois envisagées ici, sont concernées. Voici la grille d'analyse correspondante :

DU CADRE GEOMETRIQUE AU CADRE ARITHMETIQUE

Copie	Outil pour traduire «le triangle AMB est rectangle en B »	Elément(s) de nature technologique	Si « Ensemble solution » donné ≠ Ensemble solution attendu			
			Solution fournie par l'élève		Du côté opératoire : le 1[er] élément provoquant l'échec de la procédure.	Du côté organisateur : connexion avec 1b ?
			Equation finale obtenue	*« Ensemble solution » donné (avec éventuellement Spécification de l'entier k)*		
n°1	Pythagore	« Par la réciproque du théorème de Pythagore »	15=2(17x-11y)		Erreur de calcul	La question 2b est abordée juste après l'écrit de l'équation finale obtenue
n°3	Pythagore	«AMB rectangle en B ⇔ AM²=BA²+BM²»	17x-11y=-15		Erreur dans le report	<u>Remarque</u> : « voir 1.a » dans l'obtention d'une solution particulière de 17x-11y=-15
n°4	Vectoriel	« M(x;y)∈(F)⇔(AB)⊥(BM)⇔ $AB..BM=0$ »	$y=\frac{17}{11}x-\frac{5}{11}$	« ensemble (F) des points M est la droite d'équation $y=\frac{17}{11}x-\frac{5}{11}$ »	<u>Remarque</u> : L'équation (E) pouvait être extraite du calcul avant, sous sa forme 17x-11y=5.	Pas de connexion
n°9	Vectoriel	«AB.BM=0⇔ -17(x+1)+11(y+2)=0 »	17x-11y=5	x=11k+10 y=17k+15 k∈Z		Connexion
n°14	Pythagore	∅	$-x_M-y_M=21$		« $AM^2=(x_M+y_M-(x_A+y_A))^2$ » De même pour AB² et BM²	Fin de la copie
n°15	Vectoriel	« Pour MB soit perpendiculaire à AB, il faut que $x_{AB}\times(x+1)+y_{AB}\times(y+2)=0$ »	(E)	x=11k-10 y=17k-15 k∈R	Erreur dans le report des signes lors de la connexion avec autre question (erreur déjà identifiée en 1ciii)	Connexion (à travers 1ciii probablement)

Que se passe-t-il lors de cette phase dans les trois copies (1, 3 et 14) pour lesquelles la question correspondante (question 2a) est la dernière traitée ?

On observe que ces trois copies correspondent à celles où l' « outil Pythagore », et non l'outil vectoriel, est utilisé pour traduire l'énoncé « le triangle AMB est rectangle en B » (Dans la copie 14 aucun élément technologique n'est donné et, dans la copie 1, c'est la réciproque, et non le théorème direct, qui est mentionnée). Dans la copie 1, c'est une erreur de calcul qui met l'élève en échec, dans la copie 3 c'est une erreur de report dans le passage d'une ligne de calcul à la suivante et dans la copie 14, c'est une erreur dans l'expression du carré de la distance d'un segment en fonction des coordonnées des points délimitant ce segment ($AM^2=(x_M+y_M-(x_A+y_A))^2$).

Dans le cas des copies 1 et 14 (pour la copie n°3 se reporter au §II1.1), ces erreurs stoppent la résolution du problème (P') pour les élèves (la question 2b est tout juste abordée dans la copie 1). Même s'il est possible que ce soit par manque de temps que ces élèves aient stoppé ici leur rédaction (pour ne pas dire leur résolution de (P')), on peut se poser la question suivante : ces erreurs étant faites, où se situeraient les éventuels moyens de contrôle pour ces élèves ? Le passé des textes de résolutions correspondants révèle-t-il par exemple une attention particulière aux connexions entre les différentes questions ? En se reportant aux grilles d'analyse précédentes, on peut penser que cette attention est minime dans la copie 14 et inexistante dans la copie 1. Dans ces deux copies, la question 1ciii (résolution de (S)) est déconnectée des questions 1ci&1cii, en rupture avec l'énoncé ; cette déconnexion est d'autant plus significative qu'il est écrit « en déduire » au début de la question 1ciii de l'énoncé, comme nous le précisions antérieurement. On peut émettre l'hypothèse que ces deux élèves n'ont pas le recul suffisant relativement à la pensée organisatrice en jeu dans l'énoncé pour l'utiliser afin d'être alertés de leurs erreurs.

A ce stade de notre analyse, il est opportun de revenir à la copie 4. En effet, la grille à laquelle on s'intéresse ici montre que cette question 2a est traitée de manière complètement indépendante des résolutions antérieures. Comment cette déconnexion va-t-elle être gérée dans la suite ? Nous avons à présent besoin de la grille d'analyse de la phase de recherche exhaustive au sens strict :

RECHERCHE AU SENS STRICT

Copie	Ce qu'il en est à la fin de 2.a	Solution(s) données	Cohérence avec le système à partir duquel la recherche au sens strict est menée — Connexion explicite avec d'autres questions	*Système en jeu (sans la contrainte ≤200)*		A propos du test ≤ 200 — Nombre d'étapes explicitées	A propos du test ≤ 200 — Discours de l'élève	Traces d'une vérification
n°4	CLIQUER	« Soit X l'ensemble des X et Y celui des y : X={10, 65, 120, 175} Y={15, 100, 185} »	« …avec (x,y) solution de (A) (voir question 1ciii) » (A) : (S)	« x=11×5t'+10 y=17×5t'+15, t'∈Z… »	1	0	∅	∅
n°9		(10,15), (65,100) & (120,185)	∅	« x=55b+10 y=85b+15 b∈Z »	1	3	∅	∅
n°15		(45,70) & (110,155)	« On a vu précédemment que les entiers naturels x et y solutions de »(S)« sont… »	«…x=11k+10 y=17k-15 avec k=5q et q∈Z » L'élève fait ses calculs avec x=11k-10 !	1	4	« 210 ne marche pas » « 240 ne marche pas »	∅

L'étude de la copie 4 nous apprend qu'une connexion explicite est faite avec la question 1ciii, malgré la déconnexion complète de la question 2a avec l'ensemble de la question 1. Cet apparent paradoxe se retrouve au sein de la résolution de la question 1ciii. Dans cette question, en rupture avec la pensée organisatrice de l'énoncé, l'élève n'utilise pas les questions 1ci et 1cii, alors qu'au cours de son travail opératoire, ayant besoin d'une solution particulière de l'équation 17x'-11y'=1, il renvoie explicitement à la question 1a. Au cours de l'étude de la gestion par les élèves de l'autonomie dévolue du côté opératoire, nous apporterons un élément susceptible d'expliquer (en partie) ce phénomène.

<u>Qu'en-t-il globalement de cette phase de recherche exhaustive (au sens strict) ?</u> Pour les trois élèves qui parviennent à cette étape, il ne semble pas qu'elle soit problématique, tout au moins du côté organisateur ; cette pratique apparaît comme naturelle pour ceux-ci : il semble que l'entier en jeu (noté t', b ou q) « organise spontanément la recherche » (dans la copie 4 le travail correspondant n'apparaît pas). Notons qu'aucune vérification n'est faite, que ce soit relativement à l'une ou l'autre des contraintes du système (S).

II.2 Comment l'autonomie dévolue au niveau opératoire est-elle gérée par les élèves ?

Nous abordons à présent l'ensemble des questions suivantes : Comment l'élève va-t-il gérer l'autonomie qui lui est dévolue du côté opératoire ? Celle-ci facilite-t-elle ou, au contraire, fait-elle obstacle à la résolution du problème par l'élève ? Où se situent ses erreurs et difficultés à ce niveau ? Le développement des différents traitements opératoires de l'élève influe-t-il sur sa reconstruction ou création de la pensée organisatrice qu'il suit (consciemment ou non) ? Le cas échéant, dans quelle(s) mesure(s) ?

II.2.1 Autonomie dévolue au niveau opératoire et dialectique entre les dimensions organisatrice et opératoire

<u>II.2.2.1 Cheminement organisateur plus économique</u>

Comme l'a montré l'analyse *a priori*, l'élève a le choix (implicite) quant à l'utilisation de la résolution de (E) pour le travail de la contrainte n°2 (questions 1ci & 1cii). La lecture de la grille correspondante montre que cette résolution n'est utilisée que dans trois copies :

- Dans les copies 6 et 13, cela ne mène à rien : aucun travail opératoire n'est développé à partir des informations en jeu. Il semblerait qu'exprimer x et y en fonction de l'entier k a constitué un obstacle. Soulignons qu'il s'agit ici de l'implication « PGCD(x,y)=5⇒5 divise x » (copie 6) et de la condition nécessaire portant sur le PGCD de x et y pour que le couple (x,y) soit solution de (E) (copie13) ; comme le met en évidence l'analyse des solutions possibles aux différentes questions, travailler sur les objets notés x et y à partir de leurs expressions obtenues en résolvant (E) complique les tâches envisagées.

- Le cas de la copie 10 est tout à fait remarquable. La résolution de (E) est utilisée pour établir l'implication « 5 divise x⇒PGCD(x,y)=5 », dans le cadre des deux questions 1ci et 1cii. Contrairement au cas de la copie 13, exprimer x et y, comme la résolution de (E) le permet, n'empêche pas l'élève, malgré un détour calculatoire (17(11t+10)-11(17t+15)=5), de conclure que le PGCD de x et y divise 5. Pour ce qui est de la question 1ciii, rappelons que deux élèves n'échouent pas au niveau organisateur de l'équivalence en jeu puisqu'ils envisagent les deux implications correspondantes et **l'auteur de la copie 10 est le seul, parmi les quinze auxquels on s'intéresse, à démontrer cette équivalence**. On voit apparaître le raccourci annoncé dans l'analyse *a priori* **: le choix opératoire de cet élève amène à un cheminement organisateur plus économique que celui sous-jacent à l'énoncé**. Mais, par effet de contrat (répondre à la totalité des questions posées), l'élève accomplit deux fois la même tâche en redémontrant que « 5 divise t ». Un indice syntaxique tend à montrer que cet élève ne se rend pas compte de cette répétition : pour traduire l'énoncé « 5 divise 11t+10 », il n'utilise pas la même lettre (« k » puis « q »). Nous pensons que ce détail est d'autant plus révélateur que les expressions de x et y obtenues lors de la résolution de (E) sont mises en jeu d'une question à l'autre avec une unique lettre (« t »). A noter qu'au stade de la question 1ciii, il démontre trois fois, et non seulement deux, que « 5 divise t » (en appliquant deux fois et simultanément le théorème de Gauss).

II.2.2.2 Création d'une autre pensée organisatrice

Dans le paragraphe précédent, nous avons illustré un impact possible au niveau organisateur de l'autonomie permise par l'énoncé du côté opératoire. Nous allons présenter à présent un autre aspect de la dialectique qui s'opère entre les deux composantes organisatrice et opératoire.

Dans le cadre de la résolution du système (S), on peut traduire la contrainte n°2 de différentes façons lorsque l'on aborde les questions 1ci et 1cii. Dans trois copies, c'est en termes d'existence d'un couple (x',y') tel que x=5x' et y=5y' que cette contrainte est traduite :

- Dans la copie 1, celle-ci entraîne pour la question 1ci la substitution de l'élément technologique «*tout diviseur commun à deux entiers divise toute **combinaison linéaire** de ces deux entiers*. » par une factorisation.
- Dans les copies 9 et 11, elle permet d'établir immédiatement l'implication « PGCD(x,y)=5⇒5 divise x » : le « caractère diviseur commun » du PGCD est alors implicite.

Concernant la copie 9, précisons qu'il s'agit là de la seule utilisation de ce mode de traduction ; elle n'est pas reprise au moment de la synthèse en jeu dans la question 1ciii.

Cette traduction est par contre mobilisée pour la synthèse dans les copies 1 et 11 ainsi que dans les copies 2,3,4,8 et 14. Il y a ainsi une rupture avec la pensée organisatrice sous-jacente à l'énoncé, comme nous l'expliquions en §II.1 ; **il nous semble raisonnable de faire l'hypothèse qu'il ne s'agit pas d'une bifurcation consciemment construite mais d'un processus induit par un choix effectué**

dans le travail opératoire laissé à l'autonomie de l'élève, l'élément déclencheur[49] étant d'origine institutionnelle (la traduction adoptée pour le PGCD est, comme nous avons pu le vérifier, celle qui vit usuellement dans la classe). Cette bifurcation, comme on l'a vu en §II.1, a des effets en retour sur le travail opératoire ultérieur.

II.2.2 Echecs au niveau opératoire

Nous nous intéressons ici à l'ensemble des échecs rencontrés dans les traitements opératoires développés par les élèves, qu'ils soient fatals ou non pour la résolution du problème en jeu. Cette distinction sera néanmoins précisée pour chacun des échecs qui sera mentionné.

II.2.2.1 Erreurs de calcul

Des erreurs de calcul sont observées dans quatre copies distinctes :

- Pour la copie 1, l'erreur se produit dans le cadre de la question 2.a et va être fatal en stoppant la résolution de l'élève, comme nous l'avons précisé au §II.1.2.
- Dans la copie 8, une erreur de calcul amène l'élève à trouver le couple (10,5), au lieu du couple (10,15), comme solution particulière de (E) ; cette erreur amène à une résolution fausse de (E). Cet élève fait partie des onze élèves qui raisonement par équivalence en vérifiant que les expressions de x et y conviennent réciproquement. Néanmoins, pour cet élève cette vérification ne constitue pas un moyen de contrôle à cause d'une nouvelle erreur de calcul…

  Notons que dans la copie de cet élève, on trouve l'embryon d'une pensée organisatrice propre, puisque l'on trouve la bifurcation mentionnée précédemment : la contrainte n°2 de (S) est traduite indépendamment de (E). Ce choix offre une nouvelle chance pour que l'erreur soit identifiée puisque l'équation « 17(5x')-11(5y')=5 » entre en scène. Ainsi, pour la seconde fois, le niveau organisateur est susceptible de rattraper une défaillance qui se situe au niveau opératoire. Ce texte de résolution s'arrête brutalement au moment où l'équation écrite ci-dessus intervient. Si une solution de cette équation était cherchée indépendamment du reste, l'élève aurait la possibilité de prendre conscience de son erreur. On a ici l'exemple d'une rupture avec l'organisation logique des questions sous-jacente à l'énoncé qui pourrait permettre l'identification d'une erreur commise lors d'un traitement opératoire.
- Il est intéressant de noter un changement de technique lors de l'obtention de la solution générale de (E) dans la copie 12, suite à une erreur de calcul (non identifiée sans doute). L'élève, après avoir choisi initialement d'utiliser l'expression trouvée de y pour obtenir celle de x, opte pour une deuxième utilisation du théorème de Gauss. L'erreur de calcul commise en adoptant la première technique est la suivante :

  « 17x=5+11(17k-2)

[49] Traduction du PGCD de x et y en termes d'existence d'un couple d'entiers premiers entre eux (x',y') tels que x=PGCD(x,y) ×x' et y =PGCD(x,y)×y'.

$$17x=11\times17k+22\times-5 \text{ »}$$

De même que dans l'analyse de la copie 3 (§1.1), on peut se demander si ce n'est pas la nature des nombres en jeu qui constitue pour l'élève un moyen de contrôle : « 22×-5 » n'est pas divisible par 17. Le changement de technique va permettre d'obtenir l'expression de x malgré tout. Néanmoins, l'élève fait l'erreur de faire intervenir immédiatement le même entier k, comme cela se trouve également dans la copie 5.

- Dans la copie 13, lors de la résolution de (E), l'élève choisit comme deux autres élèves (copies 5 et 12) d'obtenir les expressions de x et y indépendamment l'une de l'autre (deux utilisations du théorème de Gauss sont alors nécessaires). Parmi les trois élèves concernés, il est le seul à ne pas commettre l'erreur de faire intervenir le même entier k dès le début de la procédure d'obtention des expressions de x et y. Il est donc amené à établir l'égalité des entiers notés k et k' ; une erreur est faite :

« 17(11k'+10)-11(17k+15)=5

187k'+170-187k-165-5=0

187kk'=0

kk'=0

k=k' »

Contrairement aux deux autres erreurs de calcul mentionnées jusqu'à présent, celle-ci ne met pas l'élève en échec pour la suite de sa résolution ; nous pouvons dire qu'il s'agit là d'une erreur du type « la fin justifie les moyens ».

<u>II.2.2.2 Erreurs dans le report d'informations</u>

Dans quatre copies sur les quinze analysées, on trouve des erreurs dues au simple report d'informations. Celles-ci sont le plus souvent fatales pour la résolution du problème en jeu.

Nous avons l'exemple des copies 3, 14 et 15 :

- Dans la copie 3, ce type d'erreur est identifié dans la question 2a. Nous renvoyons à §II.1.1 pour cette étude.
- Dans la copie 15, ce type d'erreur se retrouve à plusieurs endroits, comme l'on peut le lire dans l'ensemble des grilles d'analyse. Ces erreurs concernent les symboles d'opérations et sont faites en général lors de connexions entre les questions ; ce sont elles qui vont faire échouer l'élève en particulier lors de l'ultime étape de la résolution, c'est-à-dire la recherche exhaustive au sens strict.
- Le cas de la copie 14 est similaire au précédent au sens où l'erreur se fait dans la connexion (implicite) des questions 1ciii et 1a. L'élève ayant besoin d'une solution de l'équation « 17x'-11y'=1 » retient le couple (10,15) au lieu de (2,3).

La copie 1 illustre l'unique cas où ce type d'erreur n'a pas de conséquence au-delà de la question où elle est faite. Dans le cadre de la question 1.a, l'élève considère l'équation $17x+11y=5$ au lieu de l'équation (E). Ceci l'amène à la solution particulière (-1,2) au lieu de (1,2). Cette erreur n'a pas d'effet dans la résolution de (E) (question 1b) puisque c'est à partir de l'égalité « $17\times(-1)+11\times2=5$ » que le travail s'opère. Soulignons qu'un travail opératoire avec la notation (x_0,y_0) aurait l'effet inverse : l'erreur serait reportée dans l'obtention de la solution générale.

II.2.2.3 Autres types d'erreurs

D'autres types d'erreur ont été identifiés :

- On note dans la copie 5 un arrêt lors de la « remontée de l'algorithme d'Euclide ». Ceci n'empêche pas l'élève d'obtenir, sans que l'on sache comment, une solution particulière de (E).
- On a pu identifier le théorème en acte « si un entier divise une combinaison linéaire d'entiers alors il divise chacun des termes de cette combinaison », dans le cas particulier de la combinaison « $17x-11y$ », dans les copies 3, 8 et 14.
- Dans le passage du cadre géométrique au cadre arithmétique, l'élève auteur de la copie 14 se trompe dans l'expression du carré de la longueur d'un segment en fonction des coordonnées des points délimitant ce segment : « $AM^2=(x_M+y_M-(x_A+y_A))^2$. Cette erreur a déjà été mentionnée.

II.2.3 Traitements opératoires locaux et originaux

II.2.3.1 Congruences

On note dans la copie 9 une utilisation de la notation propre aux congruences : ici, c'est la congruence modulo 5 qui est en jeu. Celle-ci intervient pour traduire le fait que « $11k+10$ » (c'est-à-dire x) est divisible par 5 dès le début de la question 1ciii. Les calculs relatifs à cet usage sont reportés ci-après :

$$« \ 11k+10\equiv0 \pmod 5$$
$$11k\equiv0 \pmod 5 \ »$$

L'élève poursuit en traduisant cette égalité par « $11k=5b$, $b\in Z$ ». Cette expression est alors traduite dans le langage naturel (« 5 divise 11k »), après quoi le théorème de Gauss est utilisé.

On constate donc que l'outil congruence n'est pas utilisé avec toute sa potentialité. Il permet seulement de montrer que 11k est divisible par 5 à partir du fait que 11k+10 l'est, alors qu'il permettrait d'éviter l'intervention de l'entier b qui est ici inutile. Il semblerait que le passage direct du registre des congruences au registre du langage naturel ne soit possible pour cet élève que dans ce sens ; pour une traduction dans le sens inverse, il a besoin d'un intermédiaire : la définition de la divisibilité qui est instituée en cours d'arithmétique.

II.2.3.2 Une lecture en termes de divisibilité

Dans la copie 3, on trouve une lecture de l'égalité 17x-11y=5 tout à fait originale : l'élève déduit de cette égalité que 5 divise 17x-11y. La présence de cette lecture en termes de divisibilité est remarquable, d'une part parce qu'elle ne vit pas dans l'institution scolaire, et d'autre part, parce que celle-ci correspond à une perte d'information spontanée de la part de l'élève. Nous reviendrons en détails sur ce type de lecture dans le cadre de l'expérimentation
menée autour d'une étude de rationalité (cf. chapitre 8).

II.2.3.3 Le théorème de Bézout

Le théorème de Bézout intervient explicitement dans les copies 3, 8 et 13 :

- Dans la copie 3, il est mentionné au titre de description de la technique de remontée de l'algorithme d'Euclide.
- Dans la copie 8, il est associé à l'élément technologique « un diviseur commun à deux entiers divise toute combinaison linéaire de ces deux entiers ».
- Le cas de la copie 13 est à souligner : ce théorème est utilisé pour montrer, dans le cadre de la question 1cii, que si (x,y) est solution de (E) alors le PGCD de entiers x et y est égal à 5.

II.3 Nature des nombres et dialectique entre les composantes organisatrice et opératoire

Comme indiqué lors l'analyse *a priori*, une simple lecture de l'énoncé montre qu'il y a une certaine variabilité quant à la nature des nombres en jeu. Ce constat amène immédiatement à s'interroger sur les conséquences d'un tel phénomène au niveau de la résolution des élèves. Et, d'une manière générale : en quoi la nature des nombres en jeu intervient-elle, tant du côté organisateur qu'opératoire ? Participe-t-elle au processus dialectique entre ces composantes ?

II.3.1 Une non-prise en compte de la nature des objets

Les différentes grilles d'analyse permettent de mettre en évidence une non-prise en compte par certains élèves de la nature des objets en jeu. Tout d'abord, on observe que dans deux copies (6 et 12), les expressions de x et y, coordonnées des couples solutions de (E), sont données en fonction d'un objet k qui n'est pas spécifié ; dans une autre (11), c'est l'ensemble N qui est donné au lieu de Z. Pour les textes de résolution restants, l'ensemble Z est indiqué mais cela semble parfois ne pas témoigner d'une réelle prise en compte de la spécification des nombres en jeu. Il suffit pour s'en rendre compte, de s'intéresser à ce qui est fait, dans la suite, dans certains textes de résolution.

Dans les copies 3 et 4, où ce type de tâche se retrouve et où la résolution est menée au-delà de la recherche d'une solution particulière, on constate que la spécification de l'entier en jeu n'est pas modifiée bien que cela soit nécessaire pour répondre à la question posée (résoudre le système (S) pour la copie 4 et déterminer l'ensemble (F) pour la copie 3).

De plus, quand on regarde cette spécification au niveau de la résolution de (S), seulement une copie (10) sur les quatre concernées (4,9,10,15), substitue l'ensemble N à l'ensemble Z. En allant plus loin dans l'ordre des questions, on retrouve ce phénomène : au stade de la recherche exhaustive au sens strict par exemple, on lit Z et non N dans les trois copies correspondantes (4,9,15). Cette non-prise en compte de la nature des nombres semble ainsi apparaître à travers le fait que, malgré une spécification dans Z, la recherche est menée spontanément dans N par ces trois élèves.

II.3.2 Un diagnostic mitigé

Nous devons être prudents quant à l'hypothèse de non-prise en compte par les élèves de la nature des objets en jeu.

Nous considérons dans un premier temps les copies 3 et 12 ; dans le cadre de questions différentes (2a et 1b), il s'agit de la résolution d'une équation diophantienne et plus particulièrement de l'étape calculatoire où l'expression de x s'obtient à partir de celle de y (déjà obtenue). Comme cela a été développé dans d'autres paragraphes (cf. §II.1.1 pour la copie 3 et §II2.2.1 pour la copie 12), il semble que ce soit le fait de « sortir » du champ des entiers qui alerte, d'une façon ou d'une autre, l'élève.

On s'intéresse à présent aux copies 4 et 15 relativement au passage du cadre géométrique au cadre arithmétique (question 2a). On note tout d'abord que l'élève auteur de la copie 15 spécifie l'ensemble R pour k. Cette influence du cadre dans lequel est plongé l'élève sur son activité est plus frappante dans le cas de la copie 4. Au niveau opératoire on observe que la visée du calcul est l'obtention d'une équation de droite (sous la forme y=ax+b) ; les coefficients en jeu sont les rationnels $\frac{17}{11}$ et $\frac{5}{11}$. Et, l'élève conclut que l'ensemble (F) est exactement cette droite. Comme cela a déjà été souligné, cet élève connectera ce travail au reste de son texte seulement à la question suivante. Il semble donc, en particulier, que la contrainte « PGCD(x,y)=5 », plus que le caractère entier des solutions demandées, fasse référence pour cet élève au champ de l'arithmétique.

A travers ces exemples, la nature des nombres apparaît dans certains cas comme un élément décisif dans la résolution des élèves. L'attention portée par les élèves à la nature des nombres en jeu et leur conscience de la spécificité du champ concerné par l'arithmétique (enseignée en terminale S) seront étudiées plus en détails à travers l'expérimentation menée dans une classe de TS présentée dans le prochain chapitre.

III. CONCLUSION

Dans ce chapitre et le suivant, il s'agit de confronter à la **contingence didactique** les potentialités révélées par l'analyse épistémologique ainsi que l'analyse institutionnelle, particulièrement la partie de celle-ci centrée sur l'épreuve de spécialité du baccalauréat. La contingence didactique, approchée par des corpus de nature aussi diverse, permet d'observer le fonctionnement effectif d'élèves.

Dans ce chapitre plus précisément, l'analyse *a priori* a permis en particulier de situer l'énoncé en jeu par rapport aux énoncés de baccalauréat envisagés lors de notre analyse institutionnelle. Quant à l'analyse *a posteriori*, elle nous permet de confronter des analyses *a priori* à des productions réelles d'élèves, ce que nous n'avions pu faire dans le cadre de l'étude des sujets de baccalauréat.

Nous reprenons dans ce qui suit les éléments principaux fournis par l'analyse *a priori* avant d'indiquer les résultats obtenus lors de l'analyse *a posteriori*.

L'énoncé en jeu dans ce chapitre est à rattacher à deux des pôles définis par notre classification des sujets de baccalauréat suivant les types de problèmes en jeu : le pôle de la résolution d'équations diophantiennes et celui de la notion de divisibilité. **L'aspect « patchwork » signalé lors de l'analyse des sujets du baccalauréat ne caractérise pas le sujet envisagé ici.** Les deux pôles mentionnés précédemment sont en effet imbriqués à travers la donnée d'un système défini par deux contraintes : la première met en scène la tâche emblématique τ[50] dans Z ainsi que τ dans N, et la deuxième contrainte la notion de PGCD. Notre analyse mathématique montre que plusieurs organisations sont possibles pour aborder le problème étudié selon le traitement choisi pour chacune des deux contraintes définissant le système en jeu. On peut en effet, pour chacune d'elles, jouer à la fois sur les phases de limitation de la recherche et de recherche exhaustive au sens strict et sur le rapport de dépendance entretenu avec l'autre contrainte. On peut envisager, par exemple, de traiter ces deux contraintes dans des phases distinctes de la recherche exhaustive (au sens large) ; cela induit en particulier une gestion de chaque contrainte indépendante de l'autre. On peut aussi réduire le nombre de tests à faire dans la phase de recherche exhaustive au sens strict en traitant les deux contraintes dans la phase de limitation de la recherche, comme cela est proposé dans l'énoncé (cela permet de résoudre complètement le système en jeu). Dans ce cas, deux organisations sont envisageables selon que l'on traite chaque contrainte avec ou sans l'autre ; dans l'énoncé, il est proposé de traduire la contrainte n°2 à partir de la contrainte n°1 et l'association de celles-ci relative à la résolution du système est ainsi gérée automatiquement. **Ainsi, nous constatons que l'organisation choisie par les concepteurs permet d'évaluer sur la tâche emblématique τ dans Z avec laquelle l'énoncé débute.** Comme le montre notre étude institutionnelle, dans certains sujets de baccalauréat le caractère routinier de la tâche emblématique mentionnée précédemment est parfois dépassé et, en général, c'est en réduisant la taille de l'ensemble des solutions recherchées que ce dépassement est opéré. A deux reprises on identifie ce levier dans l'épreuve étudiée ici. La première fois, c'est lorsque le système est mis en scène : la recherche est spécifiée dans N après qu'une résolution dans Z de l'équation définissant la contrainte n°1 ait été demandée. La deuxième fois, ce n'est que superficiellement que le levier mentionné est exploité : une recherche est demandée au sein d'un ensemble fini de N après qu'une résolution complète du système en jeu ait fait l'objet de questions précédentes. En revanche, **le**

[50] Résolution d'équations diophantiennes du type ax+by=c avec a, b et c entiers, c multiple du PGCD de a et b.

problème mathématique choisi par les concepteurs de l'épreuve d'entraînement permet un dépassement original de la tâche emblématique par l'intermédiaire, non plus d'une réduction de la taille de l'ensemble au sein duquel les solutions sont recherchées, mais de questions de divisibilité.

Concernant l'autonomie laissée à l'élève, l'élaboration d'une pensée organisatrice relative au problème principal en jeu n'est pas à la charge de l'élève : ce n'est pas sa capacité à développer une pensée organisatrice qui peut être évaluée ici, mais celle à en reconstituer une qui est pré-construite (donnée par l'énoncé). Néanmoins, comme pour les sujets de baccalauréat concernés, le seul balisage pour réaliser la tâche emblématique est la donnée de deux questions, l'une pour inviter à chercher une solution particulière et l'autre la solution générale. De plus, c'est à l'élève de mettre en œuvre un raisonnement par double implication pour démontrer l'équivalence en jeu dans la question 1.cii. Comme cela apparaît dans notre étude des sujets de baccalauréat, l'équivalence logique ne semble pas être considérée comme problématique par l'institution scolaire. Du côté opératoire, tout est à la charge de l'élève : dans cet énoncé où tout semble figé du côté de la pensée organisatrice, le travail opératoire est laissé à l'autonomie de l'élève. L'analyse mathématique a mis en évidence des degrés de liberté à ce niveau. L'élève a en particulier le choix d'utiliser ou non la résolution de (E) dans la traduction de la contrainte n°2 par l'énoncé « 5 divise x ». Comme nous l'avons montré, ce choix n'est pas anodin : l'apparition de l'élément « 5 divise k » est naturelle dans un cas (elle est même prématurée par rapport aux questions posées), mais non avec le choix contraire.
Ainsi, **du point de vue de l'autonomie dévolue à l'élève, cette épreuve est tout à fait caractéristique des évaluations du niveau d'enseignement envisagé**. Que nous apprend le fonctionnement effectif des quinze élèves auteurs des copies que nous avons analysées ?

Une première lecture des copies d'élèves nous apprend que seuls trois élèves traitent la dernière question (question 2b) où il s'agit d'exploiter la résolution du système (S) (question 1ciii) pour résoudre le problème posé après l'avoir traduit arithmétiquement (question 2a) ; l'un d'entre eux explicite les trois couples solutions ((10,15), (65,100) et (120, 185)), un autre aboutit aux valeurs des coordonnées en jeu («Soit X l'ensemble des x et Y celui des y : X={10, 65, 120, 175} Y={15, 100, 185} ») et le troisième échoue à cause d'une erreur de report. La traduction arithmétique met en échec trois autres élèves. Ces derniers ainsi que quatre autres, soit sept élèves sur quinze, échouent lors de la synthèse à faire pour résoudre le système (S) dans le cadre de la question 1ciii. Les cinq élèves restants stoppent leur travail avant cette synthèse. On constate que chacun d'entre eux, ainsi que tous les autres à l'exception de deux élèves, donnent les couples solutions de l'équation (E) objet de la question 1. Que révèle une analyse approfondie du corpus étudié par rapport à ces premières observations ?

Le phénomène le plus remarquable est que **des élèves de ce niveau sont capables de s'affranchir de l'organisation sous-jacente pour en créer une autre qui leur est propre**. A l'issue de l'analyse, **l'hypothèse que nous faisons est que ce phénomène ne s'inscrit pas dans un**

développement conscient de l'élève mais qu'il a pour origine un choix effectué dans le travail opératoire laissé à sa charge dans la question 1.c. Au lieu d'adopter pour la notion de PGCD la traduction proposée implicitement par les auteurs qui est contextualisée[51] au problème, sept élèves sur les dix ayant abordé la question correspondante (question 1ciii) choisissent celle en termes d'existence d'un couple d'entiers premiers entre eux (x',y') tels que x=PGCD(x,y)×x' et y =PGCD(x,y)×y' qui semble être automatisée. Et cela implique pour chacun d'entre eux de suivre une organisation de résolution du système en jeu en rupture avec celle qui est sous-jacente à l'énoncé ; le rapport de dépendance existant au sein du traitement des contraintes est en effet inversé : ce n'est pas la contrainte n°2 qui est travaillée avec la contrainte n°1, comme cela est suggéré dans l'énoncé, mais l'inverse. On observe donc qu'au-delà de la dimension organisatrice, certaines habitudes du travail opératoire engendrent des associations comme celle mise à jour ici. Ces associations, qui semblent parfois relever de l'automatisme, ont une influence d'autant plus grande que la reconstruction du fil organisateur, figé nous semble-t-il à la simple lecture de l'énoncé, ne va pas de soi pour les élèves, comme le montre notre étude. Ainsi, les degrés de liberté existant au niveau opératoire peuvent donner naissance à un cheminement organisateur qui est en rupture avec ce qui a été fixé par l'auteur de l'énoncé et les effets de contrat (expression « en déduire » par exemple) ne suffisent pas à « rattraper » les choses ; nous avons ici une illustration de la dialectique vivant entre le développement de traitements opératoires et la pensée organisatrice dans l'activité réelle de l'élève.

Le chemin mentionné précédemment conduit les élèves à une deuxième rencontre avec la tâche emblématique dont le balisage habituel est la donnée de deux questions, l'une relative à la recherche d'une solution particulière et l'autre à celle de la solution générale ; cela constitue un « terrain d'observation » tout à fait intéressant qui a effectivement révélé des limites avec lesquelles les élèves s'approprient la technique enseignée : ils doivent être un minimum guidé du côté organisateur. Autrement dit, **face à la tâche routinière en jeu dans un contexte non « balisé » par l'institution, les élèves semblent démunis**. On constate en effet que tous, à l'exception d'un élève (copie 4), stoppent leur résolution dès l'obtention d'une solution. Nous devons compléter cette analyse en soulignant le caractère extra-ordinaire de la tâche en jeu : un élève peut penser avoir répondu à l'attente de l'enseignant dès lors qu'une solution a été donnée. Le fait que cinq élèves sur les sept concernés semblent avoir établi le lien avec la question 1a (recherche d'une solution particulière de (E)) va dans le sens de cette hypothèse. L'exemple de la copie 3, où la connexion mentionnée est explicitée, appuie également cet élément d'analyse : suite à un événement (erreur de report) dans le travail opératoire développé pour la question 2a (passage du cadre géométrique au cadre arithmétique : « Déterminer l'ensemble (F) des points M du plan à coordonnées entières tels que le triangle ABM soit rectangle en B »), l'élève auteur de cet écrit se trouve pour la troisième fois face à la tâche emblématique et, cette fois-ci, s'engage dans une résolution complète… Une autre fragilité a été mise

51 Si (x,y) est solution de (E) on a : PGCD (x,y)=5 ⇔ 5 divise x.

en évidence au niveau organisateur dans la réalisation de la tâche emblématique mentionnée jusqu'à présent : quatre élèves sur quinze ne raisonnent pas par équivalence en omettant de vérifier que les expressions trouvées pour x et y conviennent réciproquement. Néanmoins, le caractère routinier de la tâche en jeu explique sans doute ce faible taux d'échec par rapport aux difficultés des élèves que nous avons observées plus généralement vis-à-vis de l'équivalence logique. Ces difficultés apparaissent tout particulièrement à travers la traduction de la contrainte n°2 à partir de la contrainte n°1 (neuf élèves sur les onze concernés envisagent une seule implication pour démontrer l'équivalence $PGCD(x,y)=5 \Leftrightarrow 5$ *divise* x) ou encore la synthèse à faire pour achever la résolution du système (S) (tous les élèves concernés n'abordent pas le problème de l'équivalence entre le système obtenu après traitements et association des deux contraintes et le système (S) initial).

Ce qui précède rend compte d'échecs au niveau de la dimension organisatrice mais, pour une synthèse des différents échecs identifiés dans les copies d'élèves, on constate que ceux-ci peuvent tout aussi bien être de nature opératoire. Nous avons identifié différents types d'erreurs au sein du travail opératoire développé par les élèves : des erreurs de calcul (copies 1, 8, 12, 13), des erreurs dans le report d'informations (copies 1, 3, 14, 15) ainsi qu'une erreur dans la remontée de l'algorithme d'Euclide (copie 5), dans l'utilisation du théorème en acte « si un entier divise une combinaison linéaire d'entiers alors il divise chacun des termes de cette combinaison » (copies 3, 8 et 14) et enfin une erreur dans l'expression du carré de la longueur d'un segment en fonction des coordonnées des points délimitant ce segment (copie 14). L'étude des différents échecs pointe selon nous une différence qui existe entre l'élève et l'expert : la possibilité pour ce dernier de rattraper un échec à un niveau donné (opératoire ou organisateur) grâce au contrôle qu'il aurait, à l'instant correspondant du développement en cours, sur l'autre niveau.

Au-delà des questions abordées dans ce chapitre, l'étude que nous y avons menée nous a permis d'illustrer les ressources du cadre issu de notre travail épistémologique : penser en termes de dimensions organisatrice et opératoire, tout en ayant à l'esprit l'idée de processus dialectique entre ces deux composantes, permet d'expliquer certains phénomènes liés aux raisonnements effectivement en jeu dans l'activité de l'élève. Cet outil est utile en particulier pour mettre clairement en évidence l'influence des habitudes opératoires sur les choix, conscients ou non, au niveau de la pensée organisatrice suivie par les élèves.

Dans le prochain chapitre, nous poursuivons comme nous l'annoncions l'étude de travaux d'élèves dans un contexte beaucoup moins contraint que celui d'une épreuve d'entraînement au baccalauréat. Nous allons de plus travailler sur des produits non plus seulement finis ou encore

« figés » mais sur le processus de production d'une preuve par des élèves à l'aide des transcriptions de la recherche menée en groupe par ces derniers.

CHAPITRE 8 :

UNE EXPERIMENTATION EN CLASSE DE TERMINALE SCIENTIFIQUE

CHAPITRE 8 : 228

UNE EXPERIMENTATION EN CLASSE DE TERMINALE SCIENTIFIQUE 228

INTRODUCTION 229

I. ANALYSE *A PRIORI* 230

I.1 ANALYSE MATHEMATIQUE EN TERMES DE DIMENSIONS ORGANISATRICE ET OPERATOIRE 230

I.1.1 Problème en jeu 230

I.1.3 Différentes preuves de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ 231

I.1.4 De $\sqrt{2}$ à $\sqrt{3}$: seul l'opératoire varie 235

I.1.5 Vers une généralisation 235

I.1.6 Pour une synthèse : un organigramme 236

I.2 ANALYSE DIDACTIQUE EN TERMES DE DIMENSIONS ORGANISATRICE ET OPERATOIRE : EMERGENCE D'UN QUESTIONNEMENT DIDACTIQUE 238

I.2.1 Production d'une preuve 238

I.2.2 Comparaison d'une preuve à des preuves données et production de preuves à partir de ces preuves. 241

I.2.3 Généralisation à partir de preuves données 246

II. ANALYSE *A POSTERIORI* 247

II.1 ANALYSE DES PRODUCTIONS ECRITES 248

II.1.1 Groupe A 248

II.1.2 Groupe B 255

II.2 ANALYSE DE LA TRANSCRIPTION DU GROUPE A 260

II.2.1 Itinéraire 260

II.2.2 En procédant à des zooms 263

II.3 ANALYSE DE LA TRANSCRIPTION DU GROUPE B 284

II.3.1 Itinéraire 284

II.3.2 En procédant à des zooms 289

III. SYNTHESE 324

INTRODUCTION

L'expérimentation que nous présentons dans ce chapitre correspond à un espace d'observation pour le chercheur qui diffère à deux niveaux de celui d'une épreuve d'entraînement au baccalauréat (chapitre précédent) : le niveau des contraintes auxquelles cet espace est assujetti et celui de la nature du corpus étudié.

Comme nous l'annoncions dans le chapitre précédent, nous nous situons à présent dans un contexte beaucoup moins contraint institutionnellement que celui d'un entraînement au baccalauréat. **Nous étudions ici le rapport d'élèves de TS à la rationalité mathématique face à un problème d'arithmétique dans des conditions qui sont un peu aux limites de la culture de l'enseignement en jeu.** Nous pensons que certaines observations ne peuvent effectivement avoir lieu qu'en s'éloignant des conditions ordinaires. Avec cet objectif, nous avons conçu l'expérimentation à partir de tâches peu fréquemment rencontrées, voire inexistantes, dans l'enseignement secondaire. Dans le prolongement d'un problème déjà rencontré en classe que les élèves ont préalablement à résoudre (irrationalité de $\sqrt{2}$), il s'agit en particulier de repérer des principes organisateurs de preuves fournies et de les exploiter pour une généralisation. Ainsi, ce que nous proposons aux élèves, à l'exception de la tâche correspondant au problème déjà rencontré en classe, est en rupture avec ce qui « vit » dans l'enseignement où, généralement, le niveau organisateur n'est pas sous leur responsabilité pour les tâches non routinières. Une conséquence de ceci est qu'*a priori* les difficultés rencontrées par les élèves seront importantes.

De plus, **dans cette expérimentation, il s'agit d'analyser, non plus un produit fini (démonstration achevée) mais le processus de production d'une preuve arithmétique**. Etant donnés le lissage et la concision attendues d'une démonstration mathématique écrite ainsi que les contraintes institutionnelles qui pèsent sur ce type d'objet, on peut penser que les rapports dialectiques entre dimensions organisatrice et opératoire vont être ici plus visibles que dans le cas de l'analyse d'un produit fini. Nous avons donc invité les élèves à travailler en groupes avec l'idée d'analyser les transcriptions des échanges.

L'expérimentation a été préparée en collaboration avec l'enseignante de la classe de TS concernée. Il a été convenu que les élèves disposeraient de leurs cahiers et manuel[52]. Précisons que le temps consacré par les élèves à l'ensemble de la recherche a été de deux heures, entrecoupées d'une récréation. Pour des raisons techniques, deux enregistrements ont été véritablement exploitables ; deux groupes de trois élèves sont donc concernés (groupes A et B). Le corpus en jeu dans l'analyse est le suivant pour chacun de ces groupes : production écrite remise à l'enseignante une fois les deux heures

[52] *MATH enseignement obligatoire / enseignement de spécialité Term S* (1998), BELIN.

écoulées, transcription de l'ensemble des discussions qui eurent lieu au sein du groupe pendant tout le temps de l'expérimentation (interventions de l'enseignante y compris) et brouillon (uniquement pour le groupe B).

Après avoir mené une analyse *a priori* de l'ensemble des tâches proposées aux élèves, nous débuterons l'analyse *a posteriori* par l'étude exclusive des productions écrites ; ce choix nous semble judicieux pour mettre en évidence le décalage qui existe entre le « monde » de l'écrit et celui de son processus de production approché ici à l'aide des transcriptions.

Nous proposerons ensuite trois temps de « lecture » progressifs des transcriptions (le brouillon du groupe B constitue une aide). Nous donnerons tout d'abord, pour chaque groupe, l'itinéraire suivi pendant les deux heures de travail et ensuite, en suivant autant que possible la chronologie, nous rentrerons dans le détail de la recherche des élèves en procédant à des « zooms » dont la localisation aura été définie à partir de l'analyse des productions écrites et de l'itinéraire. Enfin, nous ferons une synthèse en considérant cette fois-ci les deux groupes simultanément.

I. ANALYSE *A PRIORI*

I.1 Analyse mathématique en termes de dimensions organisatrice et opératoire

I.1.1 Problème en jeu

Le problème général en jeu est l'étude de la rationalité de nombres donnés c'est-à-dire qu'il s'agit, pour un nombre x donné, de s'intéresser à la question « x est-il rationnel ou irrationnel ? ». L'attention se porte ici particulièrement sur les nombres $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$, c'est-à-dire sur les deux problèmes suivants :

(P1) $\sqrt{2}$ est-il un nombre rationnel ?

(P2) $\sqrt{3}$ est-il un nombre rationnel ?

Soulignons qu'une l'idée d'étude (P1 et P2 sont des *problèmes ouverts*[53]) englobe deux cas :

- on n'a aucune opinion quant à la rationalité du nombre étudié,
- on a un avis quant à la rationalité du nombre étudié.

Dans le cadre de l'expérimentation menée, il est prévisible que les élèves soient dans le second cas, en particulier pour $\sqrt{2}$ car ils ont déjà rencontré en classe une preuve de l'irrationalité de ce nombre.

I.1.2 Problème en jeu et sa première approche

Avec la définition d'un nombre rationnel (celle-ci est rappelée aux élèves), il est naturel de supposer que le nombre envisagé est rationnel, que l'on ait ou non une opinion quant à la rationalité de

[53] Au sens de Arsac, Germain et Mante (1988).

ce nombre ; supposer le contraire semble en effet difficilement exploitable étant donné que cela correspond à une non-existence d'objets. Dans le cas d'un nombre irrationnel, les preuves correspondantes ont donc pour pensée organisatrice générale un raisonnement par l'absurde.

Un élément entre en jeu au niveau de cette organisation générale : la fraction $\frac{a}{b}$ est-elle choisie irréductible ? Selon que l'on particularise ou non ainsi cette fraction, la contradiction (visée dans le cas où l'on conjecture que le nombre est irrationnel) à laquelle on aboutit en suivant un raisonnement par l'absurde ne sera pas, *a priori*, la même. On peut aussi prévoir des différences induites au niveau opératoire. Pour cette raison en particulier, nous proposerons au moins deux preuves, pour envisager ces deux possibilités.

Du côté opératoire, la conscience du champ concerné par l'arithmétique (enseignée en TS) amène à élever au carré les deux membres de l'égalité $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. En effet, face à la question « x est-il un nombre rationnel ou irrationnel ? », les outils de l'arithmétique ne sont pas à disposition. L'égalité à partir de laquelle le travail va se poursuivre est donc $2=\frac{a^2}{b^2}$ ou encore $2b^2=a^2$.

A partir de là, différentes preuves sont possibles et, dans ce qui suit, nous allons rendre compte de cette variabilité dans le cas où $x = \sqrt{2}$. Nous étudierons dans un second temps le passage à l'étude de $\sqrt{3}$.

I.1.3 Différentes preuves de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

A partir du traitement opératoire initial (élever au carré), plusieurs preuves sont possibles. Nous considérons tout d'abord une preuve utilisant le caractère factoriel de l'anneau Z que nous dénommons fondamentale ; comme nous le verrons par la suite, celle-ci se généralise bien. « <u>Voir</u> les entiers sous leur forme factorisée » définit l'élément essentiel de l'opératoire qui est d'<u>écrire</u> les entiers sous leur forme factorisée (pôle opératoire *structuration autour des nombres premiers* (cf. chapitre 3). Cette « écriture » peut être opérationalisée avec la notation de la valuation 2-adique et la preuve est alors la suivante :

<u>*Preuve fondamentale*</u>

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe alors a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. D'où : $2b^2 = a^2$ et en prenant la <u>valuation 2-adique</u> :

$$1 + 2\, v_2(b) = 2\, v_2(a)$$

D'où une contradiction.

Soulignons que cette preuve ne suppose pas la fraction $\frac{a}{b}$ irréductible.

Malgré son caractère économique, ce n'est pas cette preuve que l'on rencontre dans l'enseignement secondaire. Celle qui existe est plus liée à une dimension historique (Euclide) et privilégie un travail en termes de divisibilité.

I.1.3.1 Deux lectures possibles en termes de divisibilité

A partir de l'égalité $2b^2=a^2$ ou $2=\frac{a^2}{b^2}$, on peut raisonner en termes de divisibilité sans faire appel à la décomposition en facteurs premiers. Les preuves correspondantes se généralisent plus difficilement et la composante opératoire se complexifie, ce dont notre analyse mathématique rend compte. Si, par exemple, on travaille à partir de $2b^2=a^2$, deux sens de lecture en termes de divisibilité sont possibles :

- 2 et b^2 divisent a^2. Cette lecture est la plus fréquente. Elle découle directement de la définition de la divisibilité.
- a^2 divise $2b^2$. Cette lecture est tout à fait extra-ordinaire : elle ne vit pas dans l'institution scolaire en particulier. Elle correspond à une perte d'information : a^2 est égal à $2b^2$ donc en particulier a^2 divise $2b^2$.

Pour éliminer un cas de la première lecture et poursuivre si l'on adopte la deuxième, il est judicieux de supposer a et b premiers entre eux ; on particularise la pensée organisatrice en supposant la fraction irréductible. Remarquons que ce caractère d'irréductibilité correspond à une pratique usuelle lorsque l'on travaille sur les rationnels ; dans l'enseignement secondaire en particulier, cela relève presque de l'automatisme.

Supposons que a et b sont premiers entre eux et poursuivons en reprenant les deux lectures possibles. Elles nous conduisent respectivement à :

- 2 divise a^2 ou encore a^2 est pair : il s'agit alors de raisonner en termes de parité.
- Le théorème de Gauss permet d'en déduire que a^2 divise 2.

L'inversion dans le sens de lecture se retrouve dans ces deux conclusions.
A noter que dans les deux cas est intervenu le résultat « si deux entiers sont premiers entre eux, leurs carrés le sont aussi ».

La première lecture correspond à la preuve dite classique : de l'égalité $2b^2=a^2$ on déduit que a^2 est pair donc que a est pair, puis que b^2 et b le sont aussi ; la contradiction est établie relativement au caractère irréductible de la fraction.

La deuxième lecture quant à elle conduit à une preuve que l'on peut qualifier d'originale et que nous présentons à présent.

I.1.3.2 Une preuve originale

Pour la suite du traitement de la deuxième lecture, nous renvoyons à l'article de Henry, *Le théorème de Gauss dans les Eléments d'Euclide ?!* (2001). Reprenons là où notre développement s'était arrêté (a^2 divise 2) ; $a^2 \in \{1,2\}$:

- $a^2=2$ est exclu car 2 n'est pas un carré parfait.
- Si $a^2=1$, $b^2=\frac{1}{2}$; ce qui est impossible par définition de b.

Dans les deux cas, on aboutit donc à une contradiction. Et on constate que le caractère irréductible de la fraction n'intervient plus dans la formulation de la contradiction.

L'«aveu» que Henry fait dans la conclusion de son article, témoigne de l'originalité du mode de lecture qui a donné naissance à cette preuve, au-delà de l'institution scolaire :
«Je dois maintenant un aveu aux lecteurs (lectrices) qui ont bien voulu me suivre jusqu'ici. J'ai trouvé la petite démonstration de cette propriété dans une copie de CAPES interne. […] Le candidat devait montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Sans doute encore stressé en début d'épreuve, partant de l'égalité $a^2=2b^2$, au lieu de remarquer que 2 est diviseur de a^2, il considérait maladroitement a comme diviseur de $2b^2$. Obtenant finalement une contradiction, il concluait que l'hypothèse $\sqrt{2}$ rationnel absurde, sans faire intervenir la parité de a et b, comme il se doit dans la démonstration classique. J'allais conclure à la faiblesse de son argumentation (et à un méchant 0 à la question) et passer à côté d'un joli résultat. Mais, pris d'un doute, j'ai relu attentivement la copie.» (Henry, 2001)

L'exemple de la copie de CAPES en question illustre comment le développement d'un traitement opératoire (lecture en termes de divisibilité) peut amener à une preuve, et donc en particulier à une organisation, qui ne vit pas dans une institution donnée.

Dans le cadre d'un travail en termes de divisibilité, nous avons jusqu'à présent supposé la fraction en jeu irréductible, ce que nous ne faisons plus à présent.

I.1.3.3 Descente infinie

En spécifiant le raisonnement par l'absurde qui constitue l'organisation générale, on peut parvenir autrement à une contradiction qu'en supposant la fraction en jeu irréductible ; les preuves données ci-après le montrent bien. Nous proposons dans un premier temps une preuve par descente infinie et nous utilisons ensuite un raisonnement par l'absurde et minimalité[54], logiquement équivalent à la méthode de descente infinie (cf. chapitre 2) :

Preuve par descente infinie

[54] Admettre l'existence d'un représentant irréductible pour toute fraction permet de ne pas avoir recours à ces deux catégories d'organisation.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe alors a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

De même que dans la preuve dite classique, on montre que a et b sont pairs.

Ainsi à partir du couple (a,b) on obtient le couple (a',b') d'entiers naturels non nuls vérifiant :

$$\sqrt{2} = \frac{a'}{b'}.$$

$$a' < a$$

$$b' < b$$

On peut donc construire une suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante (en considérant par exemple la suite des abscisses des couples obtenus), ce qui est impossible puisque toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie.

Preuve par l'absurde et minimalité

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, l'ensemble E des entiers naturels a tels qu'il existe b (entier naturel non nul) tel que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ n'est pas vide. Ainsi, cet ensemble admet un plus petit élément que l'on note a_0.

Comme dans la preuve dite classique, on montre que a_0 et b_0 sont pairs.

On obtient donc a_0' appartenant à E tel que $a_0' < a_0$, ce qui contredit le caractère minimal de a_0.

Nous pouvons réécrire la preuve par descente en explicitant l'ensemble E pour mettre en évidence le lien entre ces deux preuves. De plus, nous pouvons écrire une **démonstration par récurrence** en prenant pour hypothèse de récurrence :

P(n) : « Il n'existe pas d'élément x de l'ensemble E tel que x < n .»

Nous rappelons que le caractère héréditaire est établi par contraposée en reprenant ce qui a été fait dans la preuve par descente (cf. chapitre 2) ; la pensée organisatrice est différente de celle structurant les preuves données jusqu'à présent : le raisonnement par l'absurde disparaît.

Ainsi**, la spécification de la pensée organisatrice donne naissance à des preuves par l'absurde distinctes** ; cette spécification se lit en particulier au niveau de la contradiction établie. **Les preuves concernées ici (y compris la preuve par récurrence) se différencient donc aux niveaux organisateur et opératoire mais ont en commun l'étape opératoire aboutissant au résultat : « si le carré d'un nombre est pair alors il est lui-même pair ».** Celle-ci est analysée lors de l'étude de l'irrationalité de $\sqrt{3}$ que nous abordons à présent.

I.1.4 De $\sqrt{2}$ à $\sqrt{3}$: seul l'opératoire varie

Si l'on reprend les preuves données précédemment, on peut décontextualiser les différentes organisations pour démontrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel. Une adaptation est à faire néanmoins du côté opératoire. En mettant momentanément la preuve dite fondamentale de côté, nous avons besoin d'établir que « si le carré d'un nombre est divisible par trois alors il est lui-même divisible par 3 », correspondant au résultat « si le carré d'un nombre est pair alors il est lui-même pair » dans le cas de $\sqrt{2}$. Ce dernier peut être démontré de différentes manières :

- Par contraposée : la dimension opératoire dépend alors du type de traduction du caractère impair de x. Considérons par exemple les trois traductions suivantes : $x \equiv 1[2]$, il existe un entier k tel que $x=2k+1$, l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de x est nul, le travail correspondant sur x^2 est différent dans chaque cas.
- Par disjonction de cas sur l'ensemble des entiers, basée sur la relation de congruence modulo 2 : on retrouve la même discussion que précédemment ; la résolution antérieure est un des cas de la disjonction envisagée ici. La différence se situe essentiellement au niveau organisateur : on travaille sur l'implication à établir directement et non en utilisant sa contraposée.

Dans le cas de $\sqrt{3}$, la dimension organisatrice se complexifie : en suivant un raisonnement par contraposée, on est amené à faire une disjonction de cas sur l'ensemble des entiers non multiples de 3 (pour $\sqrt{2}$, elle se réduit à l'examen du cas impair), basée sur la relation de congruence modulo 3. Si l'on choisit d'utiliser la décomposition en facteurs premiers pour traiter ce sous-problème, aucune sous-dimension organisatrice n'apparaît. Ce phénomène ne doit pas nous étonner puisque **plus on est proche du ressort fondamental du résultat général sous-jacent (caractère factoriel de l'anneau Z), moins des adaptations sont à faire pour passer d'une preuve à l'autre**. Cela se retrouve d'ailleurs lorsque l'on revient à la preuve fondamentale : il suffit de remplacer la valuation 2-adique par la valuation 3-adique ; l'égalité permettant d'aboutir à une contradiction devient $1 + 2\ v_3(b) = 2\ v_3(a)$.

I.1.5 Vers une généralisation

Il est mathématiquement naturel d'inscrire les études de rationalité de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ dans un questionnement plus large : l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$ peut être vue comme cas particulier du résultat général « Soit a et b deux entiers naturels non nuls, premiers entre eux, $\sqrt{\frac{a}{b}}$ est rationnel si et seulement si a et b sont des carrés ». L'explicitation du ressort fondamental joue un rôle essentiel puisque c'est elle qui donne accès à une preuve de ce résultat général :

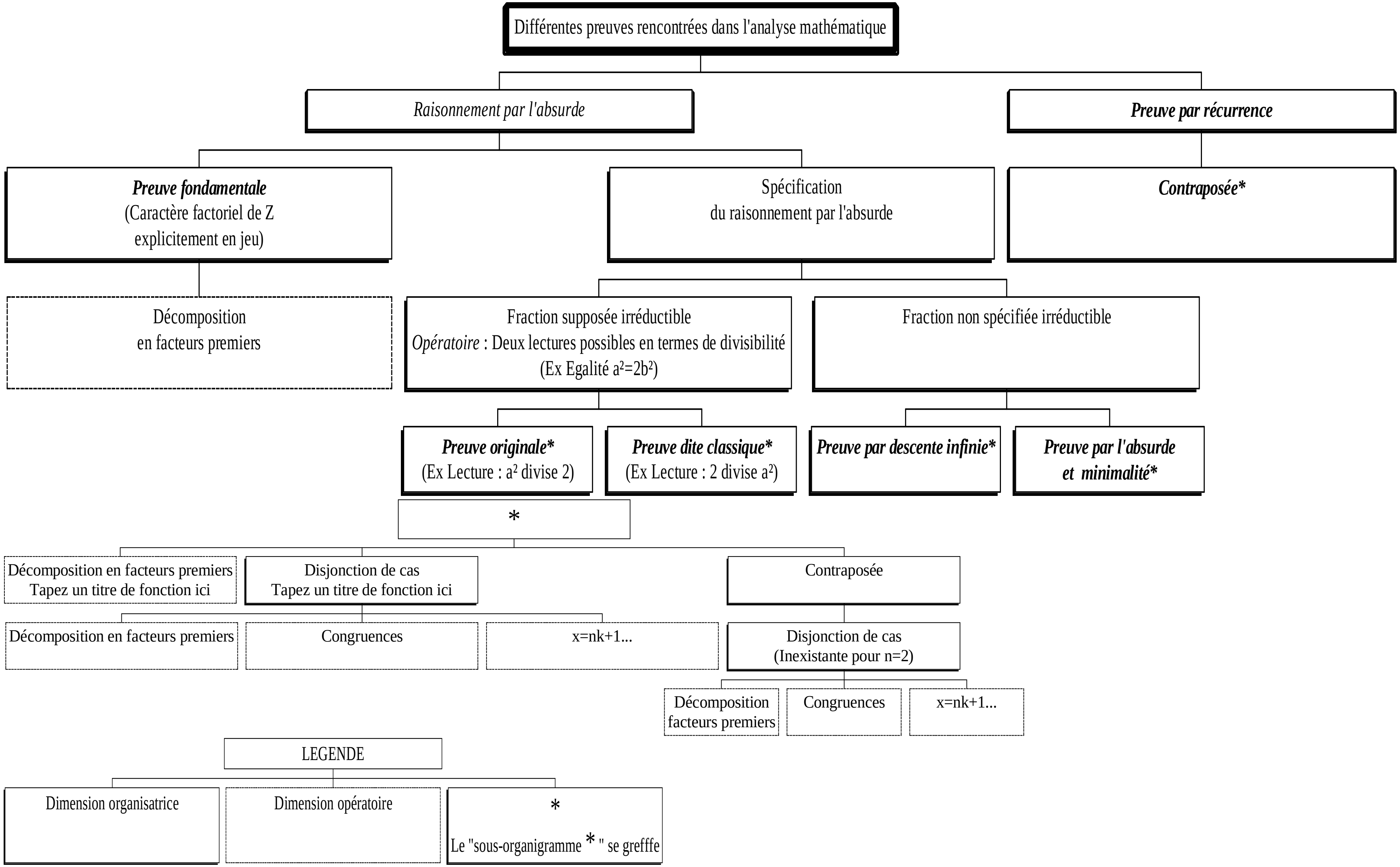
La condition « a et b sont des carrés » est clairement suffisante ; montrons qu'elle est nécessaire : Supposons donc que $\sqrt{\frac{a}{b}}$ est rationnel, il existe deux entiers naturels non nuls x et y tels que $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{x}{y}$.
D'où : $ay^2=bx^2$ (*). Supposons par l'absurde que a ne soit pas un carré, il existe p premier tel que $v_p(a)$ soit impair. a et b étant premiers entre eux, $v_p(b)$ est nul. Ainsi, on obtient à partir de (*) $v_p(a)+2v_p(y)=2v_p(x)$, D'où une contradiction ($1\equiv 0$ [2]).

Ainsi, si on en revient au travail sur les études particulières de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$, on constate que la dialectique qui s'opère entre dimensions organisatrice et opératoire peut fonctionner dans les deux sens :

- « De l'opératoire vers l'organisateur » : l'utilisation de la décomposition en facteurs premiers au niveau de l'étape opératoire peut mettre sur la voie, non seulement d'une autre preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (preuve dite fondamentale), mais sur celle d'une preuve du résultat général en jeu. Les autres traductions (il existe un entier k tel que $x=2k+1$ et $x\equiv 1[2]$), en revanche, n'aident pas directement à l'élaboration d'une telle preuve, même si elles donnent les éléments pour démontrer l'irrationalité de la racine d'un entier autre donné (non carré parfait).
- « De l'organisateur vers l'opératoire » : comme nous l'avons déjà vu, lorsque l'on raisonne par l'absurde, le fait de considérer la fraction envisagée comme irréductible implique des traitements opératoires autres que ceux rencontrés dans un raisonnement où l'irréductibilité n'intervient pas.

I.1.6 Pour une synthèse : un organigramme

Nous proposons ci-après un organigramme synthétisant l'analyse mathématique faite précédemment.


Différentes preuves rencontrées dans l'analyse mathématique
Raisonnement par l'absurde
Preuve par récurrence
Preuve fondamentale
(Caractère factoriel de Z explicitement en jeu)
Spécification du raisonnement par l'absurde
Contraposée*
Décomposition en facteurs premiers
Fraction supposée irréductible
Opératoire : Deux lectures possibles en termes de divisibilité
(Ex Egalité a²=2b²)
Fraction non spécifiée irréductible
Preuve originale*
(Ex Lecture : a² divise 2)
Preuve dite classique*
(Ex Lecture : 2 divise a²)
Preuve par descente infinie*
Preuve par l'absurde et minimalité*
*
Décomposition en facteurs premiers
Tapez un titre de fonction ici
Disjonction de cas
Tapez un titre de fonction ici
Contraposée
Décomposition en facteurs premiers
Congruences
x=nk+1...
Disjonction de cas
(Inexistante pour n=2)
Décomposition facteurs premiers
Congruences
x=nk+1...
LEGENDE
Dimension organisatrice
Dimension opératoire
*
Le "sous-organigramme * " se grefffe

Pour les tâches proposées aux élèves, nous avons retenu la preuve fondamentale ainsi que les preuves par descente infinie et par l'absurde et minimalité. Pourquoi un tel choix ? La preuve fondamentale permet de mettre en scène le ressort essentiel à une généralisation en jeu dans la dernière tâche proposée aux élèves (cf §I.2.3). Avec la culture d'enseignement de la classe de TS, il est assez improbable en effet que ce dernier apparaisse spontanément dans le travail des élèves. Nous pensons également qu'avec cette culture les élèves vont partir du fait que la fraction en jeu est irréductible. Nous préférons donc, étant limitée par le nombre de preuves à proposer (limites temporelles de l'expérimentation) choisir des preuves d'une autre catégorie (du point de vue organisateur). Nous choisissons ainsi une preuve par descente infinie et une par l'absurde et minimalité. Cela nous permet en particulier de mettre en jeu deux preuves distinctes sur le plan organisateur (les modes de raisonnement sont logiquement équivalents mais non didactiquement *a priori*) ayant en commun l'étape opératoire où il s'agit de montrer que a et b sont pairs et donc de fixer la composante opératoire.

Soulignons que les preuves choisies sont très éloignées de ce qui « vit » au niveau d'enseignement étudié. Comme nous le précisions en introduction, la conception de l'expérimentation est basée en particulier sur l'hypothèse que la création de conditions un peu aux limites de la culture de l'enseignement envisagé permet d'observer des phénomènes inaccessibles dans des conditions ordinaires. Nous abordons maintenant l'analyse didactique où nous présentons en détails les tâches proposées aux élèves.

I.2 Analyse didactique en termes de dimensions organisatrice et opératoire : émergence d'un questionnement didactique

L'ensemble de l'activité a pour objectif premier de permettre d'observer et d'analyser les raisonnements des élèves dans différents types de tâches relatives à un même problème, et ainsi de disposer de plusieurs éclairages complémentaires sur le fonctionnement cognitif des élèves. Les types de tâches en question sont les suivants :

- Production d'une preuve,
- Comparaison d'une preuve à des preuves données,
- Production de preuves à partir de preuves données,
- Généralisation à partir de preuves données.

I.2.1 Production d'une preuve

La première tâche prescrite aux élèves est la suivante :

Rationnel ou irrationnel ?

On rappelle qu'un nombre x est rationnel si et seulement s'il existe deux entiers a et b ($b\neq 0$) tels que $x=\frac{a}{b}$. Etudier la rationalité d'un nombre x, c'est s'intéresser à la question « x est-il rationnel ou irrationnel ? ». Problème : Etudier la rationalité de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$.

D'un point de vue didactique à présent, nous nous intéressons au problème (P1) (étude de la rationalité de $\sqrt{2}$), dans un premier temps, puis au problème (P2) (resp. $\sqrt{3}$).

I.2.1.1 Etude de la rationalité de $\sqrt{2}$

La preuve attendue[55] par l'enseignante pour $\sqrt{2}$ est la preuve classique où la fraction est supposée irréductible. L'enseignante n'exige pas que le résultat : « si le carré d'un entier est pair alors il en est de même de cet entier » soit démontré. Nous nous posons les questions suivantes : **des éléments organisateurs ou opératoires de la preuve attendue par l'enseignante vont-ils apparaître ? Est-ce qu'en particulier le traitement opératoire initial, identifié dans notre analyse mathématique (élévation au carré), apparaît spontanément dans le travail des élèves ? La preuve attendue va-t-elle émerger complètement dans la recherche des élèves ? Trouve-t-on des éléments nouveaux, tant du côté opératoire qu'organisateur ? Le cas échéant, ceux-ci conduisent-ils ou pourraient-ils conduire à d'autres preuves que celle attendue par l'enseignante ? Quelle est la nature des éventuelles difficultés rencontrées par les élèves ?**

Il est important de souligner que la preuve dite classique est attendue car elle a déjà été présentée aux élèves et, pour cette même raison, la production d'une preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ n'est pas considérée *a priori* comme problématique.

I.2.1.2 De $\sqrt{2}$ à $\sqrt{3}$

Pour le nombre $\sqrt{3}$, le contrat est différent de celui identifié pour $\sqrt{2}$: l'enseignante attend que l'implication « si le carré d'un entier est multiple de 3 alors il en est de même de cet entier » soit établie. Comme elle l'explique elle-même à ses élèves :

> « […] là vous m'avez dit un peu très naturellement, et je le veux bien, que si a² est pair, a est pair aussi. Faudra peut-être faire le même raisonnement en disant un peu plus clairement pourquoi euh, pourquoi ça marche pour 3. Parce que là bon les nombres pairs impairs, vous les connaissez tellement bien que j'aimerais bien que vous me le disiez sans me le justifier. »

---

[55] Concernant l'influence du rapport institutionnel dominant sur la plus ou moins grande plausibilité d'apparition des différentes démonstrations prévues *a priori* nous renvoyons d'une part à notre étude de la composante opératoire (cf. chapitre 3) et d'autre part à notre analyse des brochures destinées aux enseignants (cf. § chapitre 6).

Ainsi, pour démontrer l'irrationalité de $\sqrt{3}$, les élèves ont à charge la construction de l'étape opératoire mise en évidence lors de notre analyse mathématique. Il s'agit donc de produire une preuve (irrationalité de $\sqrt{3}$) pour laquelle on dispose d'éléments du côté organisateur, à travers la réalisation d'une autre preuve (irrationalité de $\sqrt{2}$), alors que tout est à construire au niveau de la composante opératoire.

Interrogeons-nous dans un premier temps en termes de pensée organisatrice. Deux cas sont possibles selon que la recherche des élèves est autonome ou non (même partiellement) par rapport à l'étude de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ d'où les questions suivantes : **à supposer que les élèves aient une preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, comment l'utilisent-ils en ce qui concerne la composante organisatrice de la preuve à écrire ? Si l'étude de l'irrationalité de $\sqrt{3}$ est menée indépendamment de celle de $\sqrt{2}$, la pensée organisatrice naissante est-elle différente de celle suivie pour $\sqrt{2}$?**

Du côté de la dimension opératoire, comme nous le soulignions précédemment, le contrat en jeu implique un travail de construction au sein de cette composante, que la pensée développée pour $\sqrt{2}$ soit reprise ou non. **Cela est-il problématique pour les élèves ? Dans quelle mesure ?**

Ces deux pôles de questionnement (composantes organisatrice et opératoire) sont à unifier, en ayant à l'esprit l'idée de processus dialectique entre les deux composantes en jeu. Nous faisons en effet l'hypothèse suivante : le processus d'élaboration d'une preuve est complexe, en particulier parce que le développement d'une pensée organisatrice, qui peut-être inconsciente et même embryonnaire, et celui de l'ensemble des traitements opératoires, sont étroitement liés ; nous pensons que cela est en particulier vrai dans le cas d'un élève actif dans une recherche de nature mathématique. Ainsi, on est amené à s'interroger sur la façon dont s'exprime la dialectique entre dimension organisatrice et opératoire dans l'ensemble de l'activité de recherche des élèves, tout particulièrement lors du passage de l'étude de $\sqrt{2}$ à celle de $\sqrt{3}$. Lors de l'analyse *a posteriori*, nous serons peut-être parfois conduite à prolonger le développement de traitements opératoires identifiés dans le travail des élèves afin d'étudier où cela les conduirait à terme, quitte à explorer divers cheminements possibles, tant du côté opératoire qu'organisateur.

Une des fonctions de ce premier temps de recherche est de faciliter la dévolution de la suite de l'activité aux élèves, que nous allons à présent analyser. Il nous semble en effet préférable que les élèves soient préalablement confrontés au problème en jeu dans les preuves qui leur sont proposées dans la suite.

I.2.2 Comparaison d'une preuve à des preuves données et production de preuves à partir de ces preuves.

Dans la suite de ce qui est proposé aux élèves, il y a un élément nouveau : la présence dans le milieu initial de l'élève de preuves (produites ou non par l'élève). Deux types de tâches sont en jeu : comparaison d'une preuve à d'autres d'un même résultat (irrationalité de $\sqrt{2}$) et production de preuves (irrationalité de $\sqrt{3}$) avec le support d'autres (irrationalité de $\sqrt{2}$).

I.2.2.1 Comparaison d'une preuve à d'autres d'un même résultat

Une fois le temps consacré à l'étude de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ écoulé (avec l'enseignante il a été convenu d'attendre au moins la production par les élèves d'une preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$), il est demandé aux élèves de comparer leur preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ à trois autres données : une preuve par descente infinie, une autre par l'absurde et minimalité et enfin la preuve fondamentale (pour la justification du choix de ces preuves parmi celles envisagées dans l'analyse mathématique nous renvoyons à §I.1.6).

Nous avons prévu deux ensembles de ces trois preuves en faisant varier l'opératoire de l'étape où il s'agit de montrer que a est pair sous l'hypothèse que son carré l'est : dans un ensemble, proposé aléatoirement au groupe B, nous avons utilisé les congruences et dans l'autre, fourni au groupe A également au hasard, non. Pourquoi avoir prévu cela ? Nous pensons que la maîtrise de l'outil des congruences par les élèves de terminale S est telle que la version des trois preuves l'utilisant sera plus problématique que la version n'exploitant pas cet outil. En proposant une version distincte à chaque groupe, nous pourrons *a priori* étudier cette hypothèse en comparant le travail au sein des deux groupes. Voici ces deux ensembles de preuves suivis de la formulation de la tâche prescrite correspondante :

Trois preuves de l'irrationalité de $\sqrt{2}$: (Groupe A)

<u>Preuve n°1</u>

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe alors a et b entiers <u>naturels</u> non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

<u>Montrons que a et b sont pairs</u> : Avec l'égalité précédente on a $2b^2 = a^2$ donc a^2 est pair ; montrons qu'alors a est pair : si a n'est pas pair, il existe un entier k tel que $a = 2k + 1$ et donc a^2 est impair car égal à $4(k^2 + k) + 1$.
On peut donc écrire $a = 2a'$ d'où $2b^2 = 4a'^2$, ou encore $b^2 = 2a'^2$. De même que pour a on en conclut que b est pair.

Ainsi, à partir des entiers a et b, on obtient les entiers naturels non nuls a'et b' tels que :

- $\sqrt{2} = \frac{a'}{b'}$.
- $a' < a$
- $b' < b$

On peut donc construire une suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante, ce qui est impossible puisque toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie.
En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

<u>Preuve n°2</u>

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel. L'ensemble E des entiers naturels a tels qu'il existe b (entier naturel non nul) tel que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ est alors non vide. Ainsi, E admet <u>un plus petit élément que l'on note a_0</u>.

On note b_0 l'entier tel que $\sqrt{2} = \frac{a_0}{b_0}$.

<u>Montrons que a_0 et b_0 sont pairs</u> : Avec l'égalité précédente, on a $2b_0^2 = a_0^2$ donc a_0^2 est pair ; montrons que a_0 est pair : si a_0 n'est pas pair, il existe un entier k tel que $a_0 = 2k + 1$ et donc a_0^2 est impair car égal à $4(k^2 + k) + 1$.
On peut donc écrire $a_0 = 2a_0'$ d'où $2b_0^2 = 4a_0'^2$, ou encore $b_0^2 = 2a_0'^2$. De même que pour a on en conclut que b_0 est pair.

On obtient donc a_0' appartenant à E tel que $a_0' < a_0$, ce qui contredit le caractère minimal de a_0.
En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

<u>Preuve n°3</u>

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe alors a et b entiers <u>naturels</u> non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Ainsi on a $2b^2 = a^2$.
On appelle α l'exposant de 2 dans la décomposition en nombres premiers de a et β celui de b. D'après l'égalité précédente on a : $1 + 2\beta = 2\alpha$.
D'où une contradiction (un nombre impair ne peut être égal à un nombre pair).
En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Trois preuves de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (Groupe B)

Preuve n°1

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe alors a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

Montrons que a et b sont pairs : Avec l'égalité précédente on a $2b^2 = a^2$ donc $a^2 \equiv 0 \bmod 2$; montrons qu'alors
$a \equiv 0 \bmod 2$:

- si $a \equiv 0 \bmod 2$ alors $a^2 \equiv 0 \bmod 2$
- si $a \equiv 1 \bmod 2$ alors $a^2 \equiv 1 \bmod 2$

Comme ici $a^2 \equiv 0 \bmod 2$, on a bien $a \equiv 0 \bmod 2$.
On peut donc écrire $a = 2a'$ d'où $2b^2 = 4a'^2$, ou encore $b^2 = 2a'^2$. De même que pour a on en conclut que b est pair.
Ainsi, à partir des entiers a et b, on obtient les entiers naturels non nuls a'et b' tels que :

- $\sqrt{2} = \frac{a'}{b'}$.
- $a' < a$
- $b' < b$

On peut donc construire une suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante, ce qui est impossible puisque toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie.
En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Preuve n°2

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel. L'ensemble E des entiers naturels a tels qu'il existe b (entier naturel non nul) tel que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ est alors non vide. Ainsi, E admet un plus petit élément que l'on note a_0.

On note b_0 l'entier tel que $\sqrt{2} = \frac{a_0}{b_0}$.

Montrons que a_0 et b_0 sont pairs : Avec l'égalité précédente on a $2b_0^2 = a_0^2$ donc $a_0^2 \equiv 0 \bmod 2$; montrons qu'alors $a_0 \equiv 0 \bmod 2$:

- si $a_0 \equiv 0 \bmod 2$ alors $a_0^2 \equiv 0 \bmod 2$
- si $a_0 \equiv 1 \bmod 2$ alors $a_0^2 \equiv 1 \bmod 2$

Comme ici $a^2 \equiv 0 \bmod 2$, on a bien $a_0 \equiv 0 \bmod 2$.
On peut donc écrire $a_0 = 2a_0'$ d'où $2b_0^2 = 4a_0'^2$, ou encore $b_0^2 = 2a_0'^2$. De même que pour a on en conclut que b_0 est pair.
On obtient donc a_0' appartenant à E tel que $a_0' < a_0$, ce qui contredit le caractère minimal de a_0.
En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Preuve n°3

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe alors a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Ainsi on a $2b^2 = a^2$.

On appelle α l'exposant de 2 dans la décomposition en nombres premiers de a et β celui de b. D'après l'égalité précédente on a : $1 + 2\beta = 2\alpha$.
D'où une contradiction (un nombre impair ne peut être égal à un nombre pair).
En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Formulation de la tâche prescrite :

C'est à vous maintenant ! …
1. Si vous avez démontré que $\sqrt{2}$ est irrationnel : votre preuve est-elle l'une des trois preuves données ? Expliquez votre réponse.

La comparaison qui est à faire entre leur (éventuelle) preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et celles proposées a deux fonctions essentielles, à deux niveaux différents :

- Au niveau de l'activité à faire vivre en classe : il s'agit de motiver une lecture complète des trois preuves données qui interviennent également dans la tâche suivante proposée aux élèves.
- Au niveau de l'analyse que l'on veut mener : il s'agit d'identifier autant que possible les critères sur lesquels se basent les élèves lorsqu'ils lisent une preuve donnée dans le but de la caractériser. **Que retiennent-ils en premier à la lecture d'une preuve ?** Cette identification prépare l'analyse que l'on veut faire de la tâche proposée dans la question suivante : la production de preuves à partir de preuves données. Nous devrions en effet pouvoir ainsi connaître préalablement les éléments sur lesquels l'attention des élèves se porte plus particulièrement. Cela devrait donc nous permettre de mieux comprendre suivant quelles modalités ils utilisent une preuve donnée pour en construire une autre.

I.2.2.2 Production de preuves avec le support d'autres preuves

En même temps que les preuves fondamentale, par descente infinie et par l'absurde et minimalité ont été données aux élèves dans le cadre de la demande de comparaison de ces preuves avec leur preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, il leur a été demandé, dans une question suivante, de démontrer l'irrationalité de $\sqrt{3}$ en suivant ces trois types de raisonnement :

2. *La* *preuve n°1* *est appelée* ***preuve par descente infinie***, *la preuve n°2* ***preuve par l'absurde et minimalité*** *; la* *preuve n°3* *sera désignée comme une* ***preuve utilisant la décomposition en nombres premiers***.

En observant ces trois preuves, écrivez trois démonstrations de l'irrationalité de $\sqrt{3}$: une par descente infinie, une autre par l'absurde et minimalité et enfin une troisième utilisant la décomposition en nombres premiers.

Remarque : Pour vous aider, vous pouvez faire pour les trois preuves données un schéma décrivant les différentes étapes du raisonnement suivi, sans mettre le détail de ce qu'il y a à l'intérieur de ces étapes.

La construction de preuves qui est demandée est un type de tâche extra-ordinaire par rapport à ce qui vit en classe. L'intérêt est de permettre un accès plus direct aux raisonnements spontanés des élèves, au sens où ceux-ci sont moins conditionnés par l'enseignement reçu ; le cas extrême à éviter est celui d'un type de tâche qui est routinière dans la classe : les élèves ont en effet tendance à être guidés en premier lieu par une certaine automatisation dans la réalisation de la tâche en jeu et on perd ainsi toute la spontanéité relative à une première rencontre.

Une façon d'utiliser les preuves données pour écrire celles correspondant au cas de $\sqrt{3}$ est de décontextualiser la pensée organisatrice qui ne doit pas varier d'une preuve à l'autre, conformément à ce qui est demandé. **Comment les élèves procèdent-ils ?**

Une chose est à craindre dans la construction de cette question : les élèves pourraient écrire les trois preuves demandées en se basant essentiellement sur des indices syntaxiques. Il serait alors en particulier quasi-impossible d'évaluer leur compréhension des preuves en jeu, que ce soit celles fournies dans l'énoncé ou celles produites par eux-mêmes, uniquement à partir de leurs productions écrites. Les échanges verbaux permettront peut-être de remédier à ce défaut de conception, qui nous a semblé inévitable dans ce type de tâches, ou tout du moins de l'identifier.

Prévoyant le cas d'élèves qui auraient des difficultés au niveau de l'étape opératoire où il s'agit de montrer que si le carré d'un entier est divisible par 3 alors il en est de même de cet entier, nous avons rédigé une aide à leur distribuer si besoin. Selon les preuves fournies (avec ou sans congruences, cf. §I.2.2.1), deux aides ont été conçues :

<u>Aide pour démontrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel</u>
Pour démontrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel *par descente infinie* et *par l'absurde et minimalité*, on a besoin de montrer que si on a l'égalité $a^2 = 3b^2$ (a^2 est multiple de 3…) alors a et b sont multiples de 3 (a et b deux entiers naturels non nuls). Pour cela, calculez a^2 dans les trois cas suivants : $a \equiv 0 \mod 3$ $a \equiv 1 \mod 3$ $a \equiv 2 \mod 3$ Conclure …

<u>Aide pour démontrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel</u>
Pour démontrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel *par descente infinie* et *par l'absurde et minimalité*, on a besoin de montrer que si on a l'égalité $a^2 = 3b^2$ (a^2 est multiple de 3…) alors a et b sont multiples de 3 (a et b deux entiers naturels non nuls). Pour cela, supposez que a n'est pas multiple de 3 en disant que a peut s'écrire de deux façons différentes : $a = 3k+1$ (k entier) $a = 3k+2$ (k entier) Calculez a^2 dans ces deux cas et conclure.

Ces aides seront-elles effectivement nécessaires ? Le cas échéant, constitueront-elles véritablement une aide pour les élèves ? De manière plus locale, comme les preuves qui leur sont associées, ces deux aides se différencient au sein de l'opératoire : lequel des deux outils en jeu apparaît dans le travail des élèves comme le mieux maîtrisé ?

Nous considérons à présent la troisième et dernière question posée aux élèves relativement à l'ensemble des trois preuves fournies.

I.2.3 Généralisation à partir de preuves données

Le but de la dernière question posée aux élèves est de généraliser les résultats d'irrationalité de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$. L'énoncé de la question correspondante est le suivant :

Essayons de généraliser … : On peut se demander pour quelles valeurs de n le nombre $\sqrt{n}$ est rationnel … A votre avis ?

Lequel des trois types de preuves (par descente infinie, par l'absurde et minimalité ou utilisant la décomposition en nombres premiers) vous semble celui qui permettra de démontrer le plus facilement votre conjecture ?
Remarque : **On ne vous demande pas de démonstration**. Expliquez simplement quel raisonnement vous suivriez (à l'aide d'un schéma par exemple) …

Il s'agit ici de formuler une conjecture puis de s'interroger sur la façon de la démontrer. Il y a la possibilité de faire des essais en travaillant avec des valeurs données de n, autres que 2 et 3, en particulier en réutilisant les « rouages » des preuves précédentes ; le problème est le même que dans le passage du cas n=2 au cas n=3, à moins que l'on considère un carré parfait, auquel cas on obtient un entier. Nous aurions donc ici l'occasion d'avoir des éléments venant compléter l'analyse du travail des élèves relatif au type de tâches précédent.
Selon la preuve à partir de laquelle on mène sa recherche, on va disposer des moyens d'écrire une preuve pour le cas général ou, au contraire, arriver dans une impasse : savoir passer d'une étude particulière à une autre, peut ne pas impliquer que l'on ait en mains la clef pour la preuve du cas général. Comme nous l'avons vu lors de notre analyse mathématique, seule la preuve dite fondamentale donne cette clef : l'utilisation de la décomposition en nombres premiers.

Ce qui est demandé ici aux élèves est d'autant plus difficile que le contexte institutionnel fait obstacle à cette pratique. En effet, même si la décomposition en nombres premiers est souvent utilisée dans le cadre de tâches où des nombres donnés sont en jeu, celle-ci ne l'est généralement pas pour un travail sur des nombres génériques. Ainsi, les preuves dont l'opératoire s'inscrit dans le pôle « réseaux réguliers » (raisonnement en termes de parité dans le cas de $\sqrt{2}$) sont des objets *a priori* plus proches de la pratique des élèves.

Nous débutons à présent l'analyse *a posteriori* avec l'étude des productions écrites des deux groupes d'élèves étudiés qui ont été remises à l'enseignante à la fin de l'expérimentation.

II. ANALYSE *A POSTERIORI*

Nous rappelons que nous débutons l'analyse *a posteriori* par l'étude exclusive des productions écrites afin en particulier de mettre en évidence le décalage qui existe entre le « monde » de l'écrit et celui de son processus de production approché ici à l'aide des transcriptions. Ensuite, pour chacun des groupes A et B, nous décrirons l'itinéraire suivi et procèderons à des « zooms » ; nous précisons ci-après la méthodologie suivie.

Dans le cadre d'une première lecture des transcriptions, nous décrivons pour chaque groupe son itinéraire. Chaque itinéraire est découpé en épisodes définis selon plusieurs étapes :

- Une première étape consiste à découper la transcription suivant la tâche principale en jeu (production d'une preuve, comparaison et production d'une preuve à des preuves données, généralisation à partir de preuves données),
- Ensuite, le découpage se poursuit suivant :
    - l'objet (en particulier l'égalité) sur lequel les élèves travaillent,
    - les interventions de l'enseignante si celles-ci modifient le milieu de la recherche des élèves, donc en particulier lorsqu'elles définissent une rupture dans l'orientation de celle-ci.

Une fois ce découpage opéré, chaque épisode est simplement « raconté », en réservant la donnée d'extraits au deuxième temps de lecture des transcriptions où des « zooms » seront faits.

Pour chaque groupe, nous ferons une brève présentation de chaque élève par rapport au rôle qu'il joue au sein du groupe, avant de donner l'itinéraire.

Après avoir analysé les productions écrites des groupes d'élèves et décrit les itinéraires suivis au cours de leur recherche, nous procéderons à des zooms pour étudier plus en détail les raisonnements des élèves, tant du coté organisateur qu'opératoire.

Pour chaque groupe, afin de rappeler son itinéraire et préciser la localisation des zooms, nous donnerons pour chaque épisode, lorsque cela sera jugé pertinent, un organigramme synthétisant les moments « forts » de la recherche des élèves. Nous y indiquerons la présence éventuelle de l'enseignante. Indiquons que lorsque dans un organigramme, pour une case donnée, aucun extrait n'est analysé cela signifie que le moment de la recherche symbolisé par cette case ne comporte aucun développement mathématique associé à l'élément le définissant.

Nous analyserons ensuite finement les différents échanges correspondant aux extraits qui ont été choisis.

II.1 Analyse des productions écrites

II.1.1 Groupe A

Les preuves du groupe A de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$ sont les suivantes :

Supposons $\sqrt{2}$ rationnel.

$\sqrt{2}$ s'écrit donc $\frac{a}{b}$ avec $PGCD(a;b) = 1$ et a et $b \in \mathbb{N}^*$

On a :

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2}$$ (car $\sqrt{2} > 0$ et a et b dans $\mathbb{N}^*$)

$$\Leftrightarrow a^2 = 2b^2$$

$\Leftrightarrow$ 2 divise a^2

$\Leftrightarrow$ 2 divise a

Donc, a s'écrit $2q$ avec $q \in \mathbb{N}^*$

Donc, $a^2 = 2b^2$

$$\Leftrightarrow 4q^2 = 2b^2$$

$$\Leftrightarrow 2q^2 = b^2$$

$\Leftrightarrow$ 2 divise b^2

$\Leftrightarrow$ 2 divise b

Donc, b s'écrit $2q'$ avec $q' \in \mathbb{N}^*$

a et b sont donc tout deux multiples de 2, ce qui est impossible, car a et b sont premiers entre eux.

$\sqrt{2}$ ne peut donc pas s'écrire comme un nombre rationnel, $\sqrt{2}$ est donc irrationnel.

Supposons $\sqrt{3}$ rationnel

$\sqrt{3}$ s'écrit donc $\frac{a}{b}$ avec PGCD $(a;b) = 1$ et a et $b \in \mathbb{N}^*$

On a :

$\sqrt{3} = \frac{a}{b}$

$\Leftrightarrow 3 = \frac{a^2}{b^2}$ (car $\sqrt{3} > 0$ et a et b dans $\mathbb{N}^*$)

$\Leftrightarrow a^2 = 3b^2$

$\Leftrightarrow 3$ divise $a^2 = a \times a$

Si 3 ne divise pas a
PGCD $(3;a) = 1$, car 3 est premier.
Donc, 3 divise a
IMPOSSIBLE
Donc, 3 divise a

Donc a s'écrit $3k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

Donc, $a^2 = 3b^2$

$\Leftrightarrow 9k^2 = 3b^2$

$\Leftrightarrow 3k^2 = b^2$

$\Leftrightarrow 3$ divise b^2

De même que pour a

$\Leftrightarrow 3$ divise b

Donc, b s'écrit $3k'$ avec $k' \in \mathbb{N}^*$

a et b sont donc tout deux multiples de 3, ce qui est impossible, car a et b sont premiers entre eux.

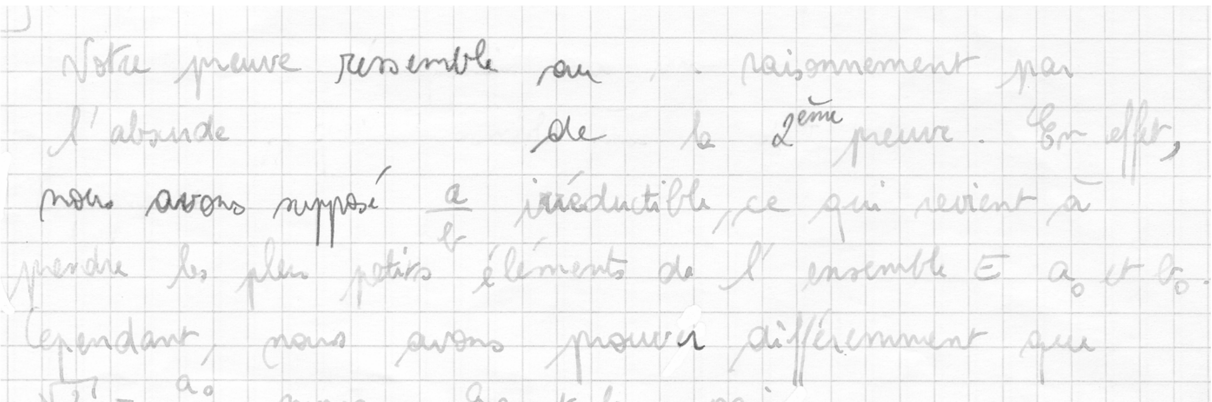
$\sqrt{3}$ ne peut donc pas s'écrire comme un nombre rationnel, $\sqrt{3}$ est donc irrationnel.

La rédaction de ces preuves est extrêmement policée et bien construite pour des élèves de terminale S.

On constate que leur preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ est exactement celle attendue par l'enseignante, la preuve dite classique où la fraction est supposée irréductible. Il n'y a pas de rupture avec le contrat relatif au résultat « si le carré d'un nombre est pair alors ce nombre est pair aussi » puisque celui-ci n'est pas démontré. En revanche, on note la présence d'une justification soignée pour l'équivalence où il y a élévation au carré ; cela renvoie en particulier à une attention portée sur la nature des nombres. La contradiction quant à elle est exprimée relativement à une impossibilité d'écriture.

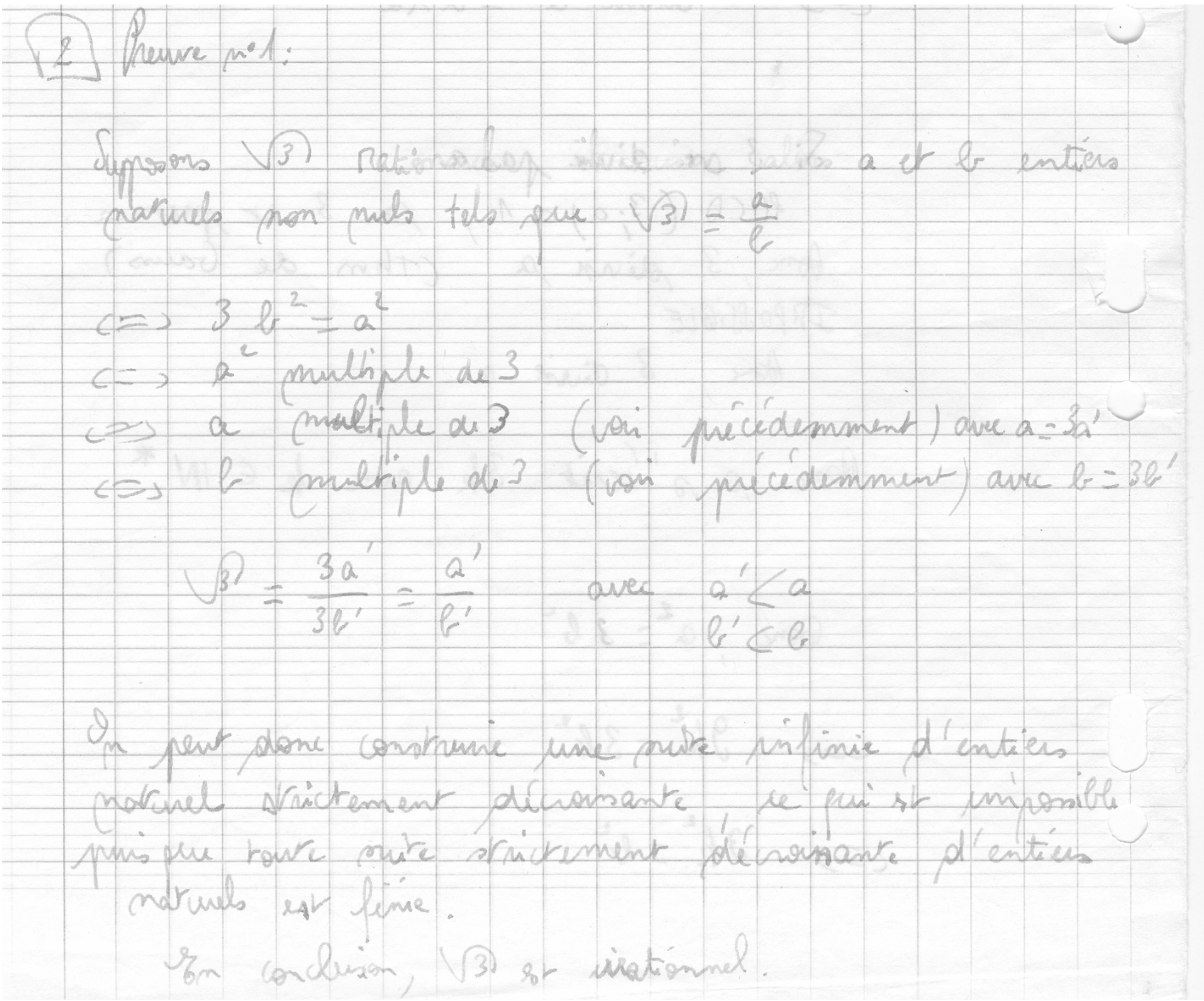
La ressemblance syntaxique des deux preuves est flagrante : il semble que les élèves sont conscients qu'ils sont en train de suivre le même raisonnement. Il n'y a pas de rupture avec le contrat relatif à l'étape opératoire où il s'agit de montrer que a est multiple de 3 sous l'hypothèse que son carré l'est. Ce résultat est démontré avec le théorème de Gauss qui est un outil privilégié des élèves avec la culture d'enseignement de la classe de TS. Le raisonnement suivi est néanmoins complexe et il est étonnant que des élèves de ce niveau l'aient suivi.

Pour la comparaison faite par le groupe A entre leur preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et les trois preuves fournies (preuve fondamentale, par descente infinie et par l'absurde et minimalité) on peut lire :


Notre preuve ressemble au raisonnement par l'absurde de la 2ème preuve. En effet, nous avons supposé $\frac{a}{b}$ irréductible, ce qui revient à prendre les plus petits éléments de l'ensemble E a_0 et b_0. Cependant, nous avons prouvé différemment que $\sqrt{2} = \frac{a_0}{b_0}$ suppose a_0 et b_0 paires.

Il est tout à fait remarquable et très surprenant que ces élèves aient fait le lien entre le raisonnement par l'absurde et minimalité et leur raisonnement par l'absurde où la fraction est supposée irréductible. Du côté opératoire par contre, ils n'ont pas identifié le manque de leur preuve par rapport à celle proposée (démonstration du résultat « si le carré d'un nombre est pair alors ce nombre est pair aussi ») ; ils ont simplement observé une différence quant à l'étape opératoire où le caractère pair de a et b est démontré.

Les preuves de l'irrationalité de $\sqrt{3}$ produites par le groupe A sont les suivantes :



(2) Preuve n°1 :

Supposons $\sqrt{3}$ rationnel alors il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$

$\Leftrightarrow 3b^2 = a^2$

$\Leftrightarrow a^2$ multiple de 3

$\Leftrightarrow a$ multiple de 3 (voir précédemment) avec $a = 3a'$

$\Leftrightarrow b$ multiple de 3 (voir précédemment) avec $b = 3b'$

$\sqrt{3} = \frac{3a'}{3b'} = \frac{a'}{b'}$ avec $a' < a$, $b' < b$

On peut donc construire une suite infinie d'entiers naturel strictement décroissante, ce qui est impossible puisque toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie.

En conclusion, $\sqrt{3}$ est irrationnel.

2. Preuve par l'absurde et minimalité.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{3}$ soit rationnel. L'ensemble E des entiers naturels a tels que b (entier naturel non nul) tel que $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ est alors non vide. Ainsi, E admet un plus petit élément que l'on note a_0. On note b_0 l'entier tel que $\sqrt{3} = \frac{a_0}{b_0}$

Montrons que a_0 et b_0 sont des multiples de 3 :

$$\sqrt{3} = \frac{a_0}{b_0}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\, b_0 = a_0$

$\Leftrightarrow a_0^2 = 3 b_0^2$

$\Leftrightarrow$ 3 divise a_0^2

$\Leftrightarrow$ 3 divise a_0 (car si 3 ne divise pas a_0, alors PGCD$(3, a_0) = 1$ donc 3 divise a_0 car 3 divise $a_0^2 = a_0 \times a_0$ IMPOSSIBLE)

$\Leftrightarrow a_0 = 3 a'_0$

$\Leftrightarrow (3a'_0)^2 = 3 b_0^2$

$\Leftrightarrow 3 a'^2_0 = b_0^2$

$\Leftrightarrow$ 3 divise b_0^2

$\Leftrightarrow$ 3 divise b_0

$\Leftrightarrow b_0 = 3 b'_0$

$\Leftrightarrow \sqrt{9} = \frac{a_0}{b_0} = \frac{3a'_0}{3b'_0} = \frac{a'_0}{b'_0}$

et $a'_0 < a_0$
$b'_0 < b_0$

Impossible car on a dit que a_0 est le plus petit élément de E.

Conclusion, $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Preuve n°3 : preuve utilisant la décomposition en nombres premiers.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{3}$ soit rationnel, il existe alors a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$

Ainsi on a $3b^2 = a^2$.

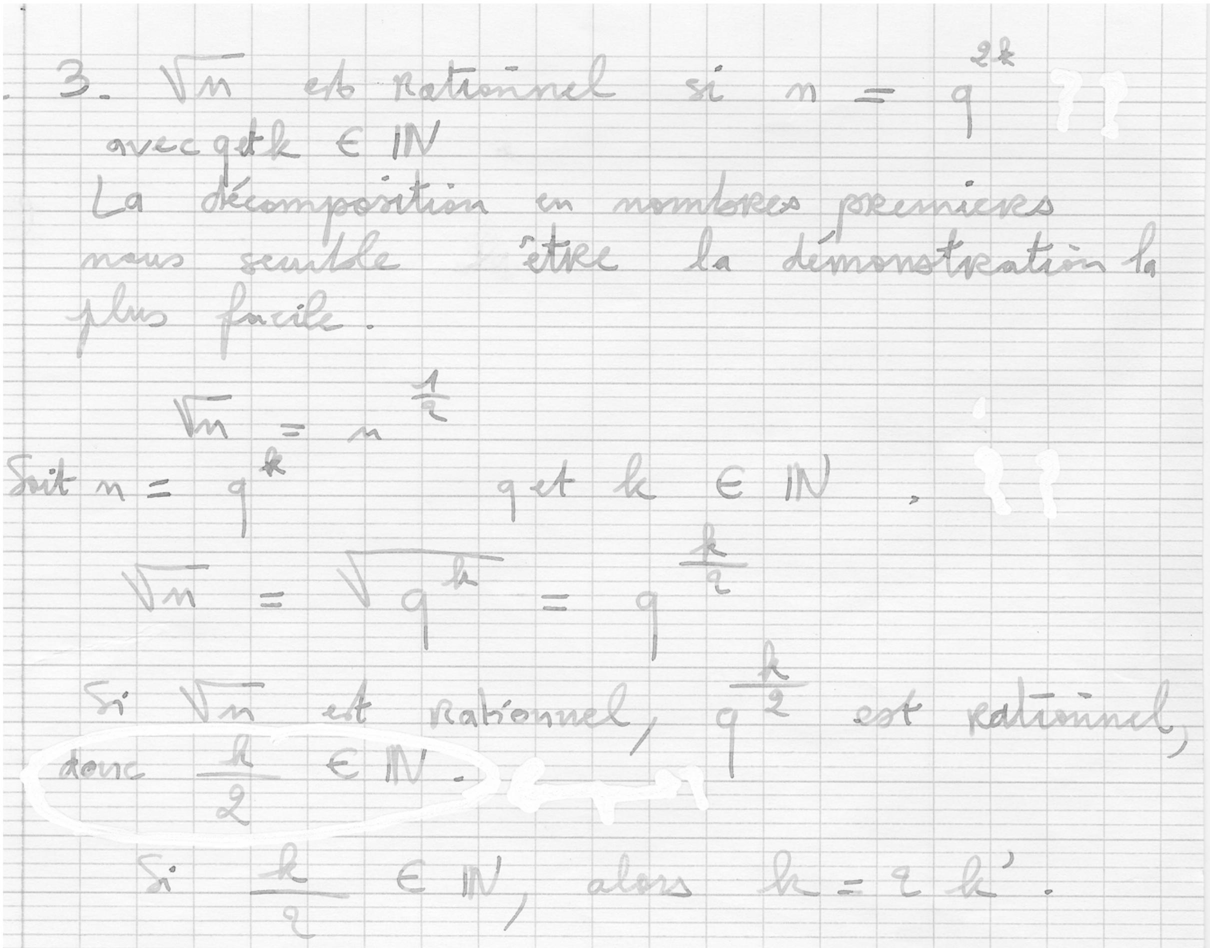
On appelle α l'exposant de 3 dans la décomposition en nombres premiers de a et β celui de b. D'après l'égalité précédente, on a : $1 + 2\beta = 2\alpha$

D'où une contradiction (un nombre impair ne peut être égal à un nombre pair).

En conclusion, $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Ce groupe a parfaitement réussi à utiliser les trois preuves fournies pour la composante organisatrice ; les parties correspondantes du texte des preuves données ont été recopiées mot à mot par les élèves (on note en particulier que pour la preuve 2 il est écrit une fois $\sqrt{2}$ au lieu de $\sqrt{3}$). On observe que pour démontrer le caractère multiple de 3 de a et b, et en particulier celui de l'entier a, ils renvoient, explicitement ou non, à ce qu'ils ont fait dans leur propre preuve du résultat en jeu.

Concernant la généralisation en jeu dans la dernière question posée aux élèves, nous pouvons lire :


3. $\sqrt{n}$ est rationnel si $n = q^{2k}$??
avec q et $k \in \mathbb{N}$
La décomposition en nombres premiers nous semble être la démonstration la plus facile.

$$\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$$

Soit $n = q^k$ q et $k \in \mathbb{N}$, ??

$$\sqrt{n} = \sqrt{q^k} = q^{\frac{k}{2}}$$

Si $\sqrt{n}$ est rationnel, $q^{\frac{k}{2}}$ est rationnel, donc $\frac{k}{2} \in \mathbb{N}$.

Si $\frac{k}{2} \in \mathbb{N}$, alors $k = 2k'$.

Même si le ressort fondamental pour une généralisation est pointé par l'intermédiaire de la preuve 3 qui est mentionnée, cela ne renvoie pas du tout à ce qui est fait pour traiter la dernière question. En particulier, la notion de nombre premier n'est pas exploitée. L'expression « décomposition en nombres premiers » semble donc ne renvoyer qu'à l'appellation que nous avons employée pour designer la troisième preuve.

L'analyse de l'ensemble des écrits du groupe A amène à s'interroger sur quelques points tout particulièrement : **leur rédaction précise et bien construite est-elle le reflet de leur recherche en général ? Dans quelles circonstances le raisonnement suivi pour démontrer le résultat en jeu dans l'étape opératoire manquante (passage de $\sqrt{2}$ à $\sqrt{3}$) a-t-il émergé ? Dans quelles mesures l'enseignante a-t-elle aidé les élèves de ce groupe pour la construction de cette étape et, plus généralement, dans la réalisation des différentes tâches ?**

II.1.2 Groupe B

Les preuves du groupe B de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$ sont les suivantes :

On veut savoir si $\sqrt{2}$ est rationnel.

Si $\sqrt{2}$ est rationnel alors il s'écrit $\frac{a}{b}$ (fraction irréductible)

Donc $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

$\Leftrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2}$.

$\Leftrightarrow 2b^2 - a^2 = 0$.

On pose $b^2 = B$ et $a^2 = A$ on obtient donc

$2B - A = 0$.

On en déduit que A s'écrit $2B$ donc A est paire.

$A = a^2$ donc a est paire.

Comme a et b sont premiers entre eux alors b est impaire.

a est paire il s'écrit alors $2q$.

$2b^2 - a^2 = 0$.

$\Leftrightarrow 2b^2 = a^2$

$\Leftrightarrow 2b^2 = 4q^2$

$\Leftrightarrow b^2 = 2q^2$ or b^2 est impaire c'est impossible

Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel

On veut savoir si $\sqrt{3}$ est rationnel.

Si $\sqrt{3}$ est rationnel alors il s'écrit $\frac{a}{b}$ (fraction irréductible).

$\sqrt{3} = \frac{a}{b}$.

$\Leftrightarrow 3 = \frac{a^2}{b^2}$

$\Leftrightarrow 3b^2 = a^2$

~~Si 3 ne divise pas a^2 alors a^2 divise b^2 (Thm de Gauss). Or a et b premiers entre eux donc 3 divise a^2 donc a^2 s'écrit 3q~~.

On admet que $a = 3q$.

$3b^2 = (3q)^2$

$3b^2 = 9q^2$.

$b^2 = 3q^2$ or b^2 et q^2 sont premier entre eux donc 3 divise b^2 (Th de Gauss).

Or a et b premiers entre eux donc 3 ne peut pas être le diviseur commun de a et b.

Donc c'est impossible.

On cherche à montrer : si a^2 divisible par 3, alors a divisible par 3.

$a \equiv 0$ mod 3 $\Rightarrow a^2 \equiv 0$ (mod 3).

$a \equiv 1$ (mod 3) $\Rightarrow a^2 \equiv 1$ (mod 3).

$a \equiv 2$ (mod 3) $\Rightarrow a^2 \equiv 4 \equiv 1$ (mod 3).

pour que $a^2 \equiv 0$ (mod 3) il n'y a qu'un seul cas possible : $a \equiv 0$ (mod 3).

Pour $\sqrt{2}$, ce n'est pas exactement la preuve qui est attendue par l'enseignante. Celle-ci n'est en effet pas symétrique quant à la parité des entiers a et b (a pair et b impair au lieu de a et b pairs) ; le caractère irréductible de la fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas géré de la même façon dans la construction de la preuve : il n'intervient plus directement dans l'établissement d'une contradiction. De plus, les carrés des entiers a et b sont ici privilégies à travers l'introduction de notations les désignant spécifiquement (A et B).

Pour $\sqrt{3}$, le caractère irréductible intervient pour aboutir à une contradiction. Mais la preuve n'est pas écrite « d'un seul trait » et ce caractère est mentionné dans ce qui a été rayé et que nous reportons ici :

Si 3 ne divise pas a^2 alors a^2 divise b^2 (Thm de Gauss). Or a et b premiers entre eux donc 3 divise a^2 donc a^2 s'écrit 3q.

Il semble que le théorème de Gauss perturbe le sens de lecture en termes de divisibilité ; il y a ici un mélange des deux sens de lecture possibles de l'égalité $3b^2=a^2$ (cf. §I.1.3.1) :

- d'une part, on a directement 3 divise a^2 par définition de la divisibilité, la conclusion visée dans l'écrit des élèves.
- d'autre part, en perdant de l'information, a^2 divise $3b^2$ et à supposer que a et b sont premiers entre eux on a par application du théorème de Gauss que a^2 divise 3.

Ce mélange apparaît comme non problématique comme si finalement la conclusion dépendait du résultat visé indépendamment du raisonnement suivi pour le valider.
On retrouve ce raisonnement (non rayé cette fois) pour conclure que 3 divise b^2 de l'égalité $b^2=3q^2$.

L'étape opératoire attendue par l'enseignante est momentanément admise (explicitement : « on admet ») et démontrée précisément avec l'outil des congruences par disjonction de cas (exactement comme l'une des aides que nous avons prévues). L'utilisation du résultat en jeu dans cette étape n'apparaît pas pour conclure que b est multiple de 3 ; le fait que 3 est un diviseur de b n'est explicité que dans l'établissement de la contradiction.

Pour la comparaison faite par le groupe B entre leur preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et les trois preuves fournies (preuve fondamentale, par descente infinie et par l'absurde et minimalité) on peut lire :

Notre démonstration se rapproche de la 2 car on a montré la parité de a et b. Nous n'avons pas utilisé les congruence et les ensembles.
Ce n'est pas la 1 car nous n'avons pas utilisé les suite et ni la 3 car on n'a pas décomposé en nombres premiers. La preuve 1 est comme notre démonstrat° pour $\sqrt{3}$.

La comparaison faite par ce groupe est confuse et manque de cohérence. Ils n’ont pas identifié qu’au sein des preuves 1 et 2 le résultat « si le carre d’un nombre est pair alors ce nombre l’est aussi » est démontré. De plus, ils ont repéré la différence relative au caractère symétrique (a et b pairs au lieu de a pair et b impair comme dans leur preuve) mais, curieusement, uniquement pour la preuve 2.

Concernant les preuves de l’irrationalité de $\sqrt{3}$ à écrire à partir des trois preuves fournies, il n’y a que cet écrit pour le groupe B :

Preuve n°1 :
$\sqrt{3} = \frac{a}{b}$.

$3b^2 = a^2$ donc $a^2 \equiv 0 \bmod 3$; montrons qu'alors
$a \equiv 0 \bmod 3$.

On ne peut qu’observer que la preuve commence avec l’étape opératoire où il s’agit de montrer que a et b sont multiples de 3, sans qu’une pensée organisatrice lui soit associée.

Rien n’apparaît dans la production écrite du groupe B relativement à la généralisation (dernière question).

A l’issue de cette lecture des productions écrites du groupe B, certaines questions en particulier émergent quant à la recherche des élèves de ce groupe : **dans quelles circonstances les notations A et B sont-elles apparues dans le travail des élèves ? Le caractère asymétrique rencontré dans l’établissement de la contradiction de leur preuve de l’irrationalité de $\sqrt{2}$ n’a-t-il pas été problématique pour écrire (au sens large) celle de $\sqrt{3}$ (où la contradiction est obtenue**

en lien direct avec le caractère irréductible de la fraction en jeu) ? Le fait d'admettre que l'entier a est multiple de 3 renvoie-t-il à une initiative du groupe ou à une intervention de l'enseignante qui leur aurait, par exemple, donné l'aide prévue pour l'une des tâches suivantes (production de preuves à partir de preuves fournies) ? Dans le deuxième cas mentionné, qu'est-ce qui a été problématique ? L'explication est-elle du côté du contrat ou intrinsèque au travail mathématique des élèves ? Leur rapport au théorème de Gauss, qui apparaît singulier à travers leur écrit, est-il en cause ? Dans quelles circonstances la lecture extra-ordinaire en termes de divisibilité intervient-elle dans leur travail ? Pourquoi les dernières tâches ont-elles été peu, voire non, abordées par ce groupe ? Est-ce par manque de temps, et donc parce que les tâches précédentes auraient posé problème, ou parce que les élèves y ont rencontré des difficultés ?

II.2 Analyse de la transcription du groupe A

Présentons tout d'abord très succinctement chacun des trois élèves : l'élève A1 peut être considéré comme le guide du groupe et il progresse en général mieux que les autres sur le plan mathématique. L'élève A3 est peu actif dans les discussions et semble souvent effacé par rapport à la recherche. L'élève A2 quant à lui occupe une position intermédiaire ; il est le principal interlocuteur de l'élève A1 et il défend souvent son propre point de vue activement.

II.2.1 Itinéraire

L'itinéraire de ce groupe est découpé en huit épisodes :

Etude de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

L'itinéraire débute avec trois épisodes correspondant d'une part à des pistes de recherche qui n'aboutissent pas, avec un mouvement de retour à la première lors du troisième épisode, d'autre part, aux échanges qui ont lieu au sein du groupe avant la première intervention de l'enseignante.

Episode 1 : « $\sqrt{2}$ divise a ! » (A1)

Partant de la définition donnée d'un nombre rationnel, ils écrivent l'égalité a = b$\sqrt{2}$, sans qu'aucune stratégie ne semble être associée à cette démarche ; la fraction $\frac{a}{b}$ correspondante est supposée irréductible.

Tout d'abord, deux avis s'opposent : « a divise $\sqrt{2}$ » et « $\sqrt{2}$ divise a », le deuxième étant soutenu par l'élève A1. Ces avis sont fondés sur une lecture abusive du théorème de Gauss (comme a = b$\sqrt{2}$, en particulier a divise b$\sqrt{2}$, d'où a divise $\sqrt{2}$ puisque a et b sont premiers entre eux) pour le premier, et de la définition de la divisibilité (diviseur non entier) pour le second. L'avis de l'élève A1 l'emportera grâce, semble-t-il, à un argument relatif à l'ordre naturel et non à l'ordre de divisibilité.

Ensuite, à partir de l'intuition, qui devient une quasi-certitude, que $\sqrt{2}$ est irrationnel, une stratégie se dessine avec l'idée qu'il est impossible que « $\sqrt{2}$ divise a » ; une visée émerge alors qui serait de raisonner par l'absurde.

<u>Episode 2</u> : « Faut peut-être mettre au carré » (A1)

La piste de l'épisode précédent s'avérant infructueuse, les élèves parlent d'autre chose avant que l'élève A1 ne soumette l'idée de « mettre des trucs au carré » et, à partir de ce moment là, l'égalité en jeu est $a^2 = 2b^2$.

Cela les amène à des questions de parité, en particulier celle de savoir si a^2 sur b^2 pair implique a et b pairs. Ils essaient d'aborder ce problème assez maladroitement avec des exemples, sans prendre en compte toutes les caractéristiques de l'énoncé en jeu.

Cette deuxième piste est abandonnée.

<u>Episode 3</u> : « On tourne en rond. » (A)

On observe au début de cet épisode un retour à la première piste et donc implicitement à l'objet $a=b\sqrt{2}$. A partir de là, des idées apparaissent dont, en particulier, à nouveau celle de raisonner en termes de parité, ainsi que celle de se ramener à la résolution d'une équation, mais elles ne sont pas exploitées. Le fait de feuilleter leurs cours contribue à cette recherche assez « décousue ».

Cet épisode se termine avec l'intervention de l'élève A1 auprès du groupe voisin afin de savoir s'ils ont trouvé une piste, ce qui n'introduit rien de nouveau semble-t-il dans leur recherche.

<u>Episode 4</u> : « Si tu veux pouvoir travailler sur les entiers, faut, faut avoir ça. » (Enseignante)

L'épisode commence par un échange avec l'enseignante qui, suite à une question de l'élève A1, confirme que « c'est une bonne idée de mettre au carré ». Elle quitte le groupe en leur ayant fait remarquer que a^2 est pair et que cela implique que a l'est aussi.

Une fois l'enseignante partie, les élèves se demandent si le fait que deux entiers soient premiers entre eux implique que leurs carrés le soient aussi. Après y avoir réfléchi à partir d'exemples, les élèves s'interdisent d'utiliser ce résultat car ils ne voient pas comment le démontrer.

<u>Episode 5</u> : « Voilà, voilà, ça y est ! J'ai trouvé, j'ai trouvé ! » (A1)

Il faudra une nouvelle intervention du professeur où la traduction opératoire du caractère pair de l'entier a est donnée pour que l'élève A1 réussisse rapidement à aller au bout du raisonnement.

L'épisode se termine avec une autre intervention de l'enseignante qui demande à l'élève A1 d'expliquer sa preuve à l'élève A2 qui dit n'avoir rien compris.

<u>Episode 6</u> : « D'accord, j'ai compris ! » (A2)

L'élève A1 commence à expliquer sa preuve à l'élève A2 en lui proposant de partir du résultat « a est multiple de 2 ». Ce qui est problématique pour l'élève A2 se situe au niveau de l'établissement de la contradiction : elle ne comprend pas en quoi on aboutit à une impossibilité une fois que l'on a démontré que a et b sont tous les deux pairs. Il faudra que l'élève A1 explique à nouveau ce point pour que l'élève A2 dise avoir compris.

Cet épisode se termine avec une intervention de l'enseignante qui précise l'élément de contrat relatif à l'implication *a² pair* $\Rightarrow$ *a pair* lorsqu'un élève affirme que pour $\sqrt{3}$ « c'est la même chose », sans que cette affirmation renvoie à un travail effectif.

<u>Etude de l'irrationalité de $\sqrt{3}$</u>

<u>Episode 7</u> : « J'sais pas comment rédiger ça. J'ai compris le système. » (A1)

La recherche relative à $\sqrt{3}$ débute avec une intervention de l'enseignante. Dans la discussion qui est menée, l'adaptation à faire pour le passage de $\sqrt{2}$ à $\sqrt{3}$ est gérée avec l'enseignante. Le théorème de Gauss est injecté dans le milieu par les élèves et une pensée organisatrice associée est donnée par le professeur : un raisonnement par l'absurde sous les hypothèses que « 3 ne divise pas a » et que « 3 divise a² ».

Une fois leur professeur partie, les élèves ont en charge la rédaction de la preuve. C'est l'élève A3 qui rédige et l'élève A1 qui mène la réflexion. Dès le début ils se concentrent sur l'implication *3 divise a²* $\Rightarrow$ *3 divise a* à partir des éléments apparus dans leur échange avec l'enseignante. L'élève A1 exprime la difficulté à écrire le raisonnement en jeu et appelle l'enseignante qui le reprend ce qui permet à l'élève A3 de finir la rédaction de leur preuve de l'irrationalité de $\sqrt{3}$. L'épisode s'achève avec une intervention de l'enseignante qui leur distribue la suite de l'activité.

Ajoutons qu'entre les deux premières interventions du professeur il y a eu la récréation.

<u>Comparaison, production et généralisation avec le support de preuves fournies</u>

<u>Episode 8</u> : « On a fait exactement la 2 en fait. » (A2)

L'épisode commence par une lecture silencieuse des documents que l'enseignante vient de leur distribuer.

Seule la question 1 est travaillée collectivement[56] et c'est l'avis de l'élève A2 qui l'emporte : ils associent leur preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ à la preuve 2. Cette conclusion repose sur le lien qui

[56] C'est pour cette raison que nous ne divisons pas cet épisode bien que plusieurs tâches soient ici concernées.

est fait entre considérer une fraction irréductible et prendre le plus petit entier a tel qu'il existe un entier b vérifiant $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

La question 2 ne fait l'objet quasiment d'aucune discussion. Il semble que ce soit d'une part parce qu'ils se sont partagés les trois preuves à écrire, d'autre part, parce que cette tâche ne leur a pas posé de problème.

La question 3 est uniquement abordée par l'élève A1. Il demandera à l'un de ses camarades, ainsi qu'à l'enseignante, de lui donner leur opinion sur ce qu'il a écrit à ce sujet (se reporter à ce qu'il a écrit sur la copie commune rendue (cf. §II.1.1)). Au cours de cet épisode, toute intervention du professeur débouche sur un dialogue entre lui et l'élève A1.

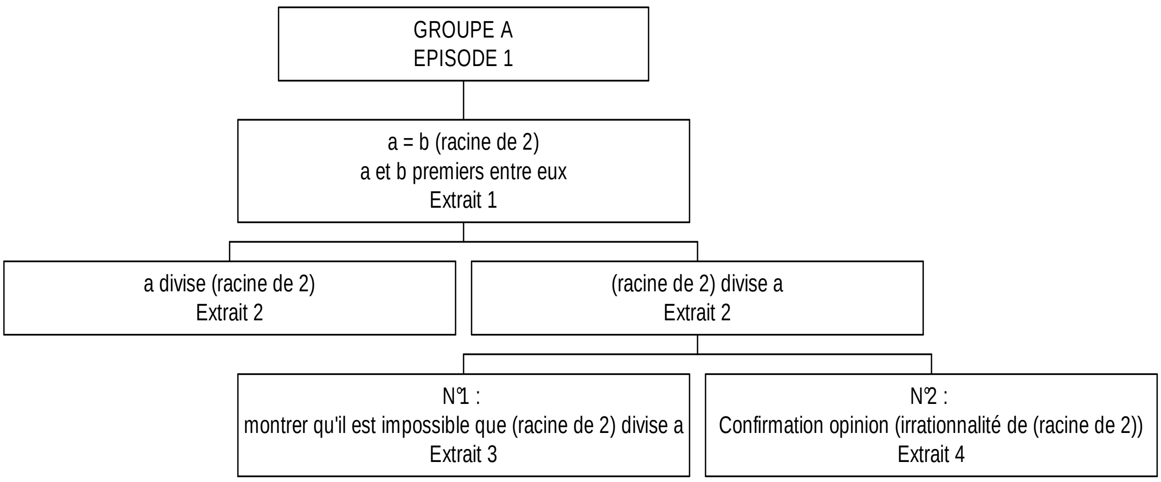
En procédant dans ce qui suit à des zooms, ces premiers éléments d'analyse *a posteriori* vont être étudiés bien plus en détail.

II.2.2 En procédant à des zooms

Etude de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

Episode 1

Nous proposons l'organigramme suivant pour synthétiser ce qui s'est passé lors du premier épisode :



Voici les tous premiers échanges du groupe A :

Extrait 1

A : a égale b racine de 2 /[57]

[57] Le symbole « / » indique que l'intervenant est interrompu par une autre personne.

A1 :	Eh, a et b sont premiers entre eux ?
A :	Non, là on sait rien sur a et b.
A1 :	Oui mais s'il est rationnel normalement c'est de la forme irréductible donc a et b.
A :	Oui.
A :	C'est vrai.
	[Groupe A, Episode1]

Comme nous l'avions prévu dans l'analyse *a priori*, la donnée dans le texte de la définition d'un nombre rationnel injecte automatiquement l'objet fraction dans le milieu des élèves. Mais rien pour l'instant ne permet de supposer que cela s'inscrit consciemment dans le développement d'un raisonnement par l'absurde.

Nous avons de plus confirmation que les rationnels sont envisagés automatiquement par les élèves à travers leur représentant irréductible. A noter que l'énoncé « a et b premiers entre eux » et le mot « irréductible » sont associés spontanément au sein de ce groupe.

Dans l'extrait 2, les deux sens de lecture de l'égalité a = b$\sqrt{2}$ annoncés dans l'itinéraire sont en concurrence :

<u>Extrait 2</u>

A1 :	Donc, a devrait être multiple de racine de 2.
A :	Regarde si tu l'écris comme ça.
A :	Oui.
A :	a divise racine de 2.
A :	Oui.
A :	Or il peut pas diviser racine de 2.
A1 :	Non racine de 2 il divise a.
A :	Ah oui, excuse-moi, racine de 2 il divise a… Ben si c'est, imaginez a c'est 4. Racine de 2 il divise 4.
A1 :	C'est a sur racine de 2 égale b. Donc. Ouais euh, a c'est un multiple de racine de 2 ? Fin euh, racine de 2 divise a.
A :	Oui.
--	
A :	Ouais mais bon eh mais attends mais c'est chaud !
--	
A :	Racine de 2 divise a et euh…ça ça donne un entier b.
A :	Ca j'suis d'accord.
A :	Oui mais bon comment tu trouves a et b ?
A :	T'as raison.
A :	a et b ils sont premiers entre eux c'est obligé.
--	
A :	Donc a il divise racine de 2 puisque a et b sont premiers entre eux donc a il divise pas b et a divise b racine de 2.C'est pas le théorème de Gauss ?
A1 :	Mmm ? Si ça fait penser à Gauss quoi mais euh /
A :	Donc a il divise racine de 2.
A1 :	Non. Non, non non.
A :	Mais si !
A1 :	C'est racine de 2 qui divise.

A :	a il divise b racine de 2, t'es d'accord ? !
A1 :	(Rires), elle va me taper. Mais non parce que c'est a égale /
A :	Oui mais il divise ça !
A1 :	Mais non ! C'est ça qui divise a. Racine de 2 divise a ! C'est pas a qui…a il est tout seul là. C'est pas. T'aurais b égal à racine de 2 a et ben là ça s'rait a euh ça s'rait racine de 2 il divise b et a divise b s'ils étaient pas premiers entre eux.
A :	Mais il divise les deux ! Si tu mets les deux /
A1 :	Non, tu peux pas inverser ! Parce que si tu dis que. En fait ça c'est plus grand que racine de 2 et ça c'est plus grand que b. Et donc a il ne peut pas diviser un nombre plus petit.
	Ben oui.
A1 :	Donc, j'ai raison, comme dab, J'ai toujours raison, (rires).
--	
A1 :	Donc c'est racine de 2 qui divise a.
--	
A :	Oui mais…/
A1 :	Parce que regarde euh quand tu divises a/
A :	Ah oui ! a et b sont premiers entre eux donc c'est racine de 2 qui divise a.
A1 :	Quand tu divises a par racine de 2, t'as un nombre entier donc/
A :	C'est bon j'suis d'accord.
	[Groupe A, Episode 1]

Cet extrait met en évidence l'absence d'une claire conscience que l'arithmétique (enseignée en TS) concerne les entiers. De plus, on observe que ceci n'exclut pas qu'une certaine attention soit portée à la nature des nombres en jeu. L'absence d'une claire conscience du champ concerné par l'arithmétique est identifiée dans cet extrait au niveau de la définition de la relation de divisibilité employée ainsi que dans l'utilisation du théorème de Gauss. Les deux lectures de l'égalité en jeu renvoient à une extension de la définition de la divisibilité. Pour la première lecture ($\sqrt{2}$ divise a), en particulier, la spécificité entière n'est conservée que pour le quotient : « Racine de 2 divise a et euh…ça ça donne un entier b », « Quand tu divises a par racine de 2, t'as un nombre entier donc/ » ; et c'est à travers cette conservation que l'attention portée à la nature des nombres en jeu se manifeste.

La deuxième lecture de l'égalité $a = b\sqrt{2}$ qui apparaît est tout à fait remarquable puisqu'elle correspond au sens de lecture en termes de divisibilité contraire à celui qui vit exclusivement dans l'institution scolaire. Le raisonnement en jeu est le suivant : comme $a=b\sqrt{2}$, <u>en particulier</u> a divise $b\sqrt{2}$, d'où a divise $\sqrt{2}$ d'après le théorème de Gauss puisque a et b sont premiers entre eux. Le théorème de Gauss est mentionné mais n'est pas associé clairement à ce raisonnement par les élèves.

Trois éléments interviennent dans l'argumentation développée pour la première lecture :

- le caractère irréductible de la fraction en jeu : « Mais non ! C'est ça qui divise a. Racine de 2 divise a ! C'est pas a qui…a il est tout seul là. C'est pas. T'aurais b égal à racine de 2 a et ben là ça s'rait a euh ça s'rait racine de 2 il divise b et a divise b s'ils étaient pas premiers entre eux. »
- l'ordre naturel : « En fait ça c'est plus grand que racine de 2 et ça c'est plus grand que b. Et donc a il ne peut pas diviser un nombre plus petit. »,

- la nature des nombres en jeu : « Quand tu divises a par racine de 2, t'as un nombre entier donc/ »

L'inversion en jeu dans la deuxième lecture est vivement rejetée (« Non, tu ne peux pas inverser ! ») : les deux sens de lecture se font donc clairement concurrence. Du côté de l'élève qui défend initialement l'opinion « a divise $\sqrt{2}$ », c'est le caractère irréductible de la fraction qui est directement concerné. Il semble qu'il y ait un retour spontané, non explicite, au sens de lecture habituel : « Mais il divise les deux ! » […] « Ah oui ! a et b sont premiers entre eux donc c'est racine de 2 qui divise a. ». Notons aussi la présence d'un exemple (a=4) au début de l'épisode pour illustrer l'énoncé « $\sqrt{2}$ divise a ».

Il nous faut également souligner que la lecture de cet extrait montre la présence d'éléments renvoyant à une pensée organisatrice constructive, à travers la visée de <u>trouver</u> a et b et que le caractère irréductible de la fraction y est immédiatement associé. Relativement à la composante organisatrice, on note la présence d'un conditionnel (« Donc, a devrait être multiple de racine de 2 ») et la formulation d'une impossibilité (« Or il peut pas diviser racine de 2 ») avant que les deux sens de lecture ne soient en concurrence et que la discussion ait pour enjeu de « trancher ».

Comme cela apparaît dans l'organigramme de l'épisode étudié ici, deux développements sont associés à l'énoncé « $\sqrt{2}$ divise a » ; l'extrait 3 rend compte du premier :

<u>Extrait 3</u>

A :	Racine de 2 il divise a.
A1 :	Non mais racine de 2 il est pas, il est pas entier donc c'est pas possible.
A :	Mais si c'est possible !
A1 :	Ouais mais…
A :	Tu prends 2, 2 sur racine de 2, peut-être ça marche pas mais j'suis bête/
A1 rit	
A :	Mais ça donnera un entier aussi.
A :	Moi j'crois qu'il est irrationnel.
A :	Moi aussi. J'crois hein. On l'a déjà fait.
--	
A1 :	Oui mais dans ce cas là racine de 3 c'est irrationnel aussi. (rires) dès que y'a une racine ça y est c'est fini (rires)
A :	Racine de 2 il divise a.
A1 :	Et le PGCD/
A :	On n'a qu'à faire tu sais les trucs où tu dis soit a machin soit a machin, soit a bidule/
A1 :	Ca c'est le cours, les exercices c'est à l'envers.
A :	Racine de 2 n'est pas rationnel… Eh ! On n'a qu'à faire tu sais les trucs par euh. Les démonstrations où tu dis si racine de 2 rationnel tu prouves que c'est pas possible.
A1 :	Ah oui ! ! Les trucs par l'absurde là!
A :	Ouais voilà.
(Rires).	
L'une cherche dans un cahier.	
A :	Parce qu'en fait faut juste qu'on trouve si c'est possible que racine de 2 il divise a. Et si on trouve que c'est pas possible ben racine de 2 est pas rationnel.
A1 :	Pardon répète s'te plaît.

A :	En fait racine de 2 il divise pas a ; il peut pas diviser a et après ça veut dire que ça ne peut pas être rationnel.
A :	Ah oui.
	[Groupe A, Episode 1]

Une opinion relative à l'irrationalité de $\sqrt{2}$ est ici formulée et son émergence est directement liée à la prise en compte du caractère non entier de ce nombre. Ce caractère entre en scène avec le statut d'évidence : il n'est l'objet d'aucune discussion. A noter qu'on retrouve la présence d'un exemple (a=2) et cela, pour un essai de « mise à l'épreuve » de cette opinion.

C'est la naissance d'une opinion quant à l'irrationalité de $\sqrt{2}$ qui conduit les élèves à clarifier leur visée et en particulier à expliciter qu'elle s'identifie à un raisonnement par l'absurde (« les trucs par l'absurde »), après avoir envisagé d'abord un raisonnement par disjonction de cas (« les trucs où tu dis soit a machin soit a machin, soit a bidule »). Cette visée est alors contextualisée au problème avec l'idée de montrer qu'il est impossible que « $\sqrt{2}$ divise a ».

Ajoutons que quelques répliques de cet épisode se situent déjà au niveau de la généralisation : « Oui mais dans ce cas là racine de 3 c'est irrationnel aussi. (rires) dès que y'a une racine ça y est c'est fini (rires) ».

Le deuxième développement associé à l'énoncé « $\sqrt{2}$ divise a » est le suivant :

<u>Extrait 4</u>

A1 :	Si …racine de 2 égal a sur b. a égal nin, nin nin. Racine de 2 il divise a.
A :	Or a c'est un entier hein.
A1 :	Donc un entier divisé par un… Par un truc racine euh… Ca peut pas faire un entier naturel.
A :	Un entier divisé par un rationnel.
A1 :	Un irrationnel.
A :	Voilà, c'est ça ! Un entier divisé par quelque chose qu'est irrationnel. <u>*Inaudible*</u> si tu le divises par un truc racine tu peux pas revenir dans le monde des entiers <u>*inaudible*</u>.
	[Groupe A, Episode 1]

L'attention portée à la nature des nombres a et b amène à une confirmation de l'opinion du groupe quant à l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Cet extrait permet selon nous d'associer la généralisation de la définition de la divisibilité employée par les élèves à une confusion entre la division euclidienne et la division dans R (ou dans Q).

<u>*Episode 2*</u>

L'organigramme associé à l'épisode 2 est le suivant :

GROUPE A
Episode 2

$a^2 = 2b^2$
Extrait 5

N°1 :
Question de parité : a^2/b^2 pair donc a et b pairs ?
Extrait 6

N°2 :
"Ca veut dire que a^2 est deux fois plus grand que b^2"

L'épisode 2 est associé, rappelons-le, à l'émergence de l'idée d'élever au carré ; l'extrait reproduit ici rend compte de cette émergence :

<u>Extrait 5</u>

A1 : Faut peut-être mettre au carré. Faut peut-être mettre des trucs au carré. J'sais pas.
A : Ah ouais …

[Groupe A, Episode 2]

Dans l'ignorance de la spécificité des objets concernés dans le travail arithmétique, la nécessité d'élever au carré chaque membre de l'égalité $a = b\sqrt{2}$ est inhibée. L'idée d'élever au carré émerge brutalement et de façon non argumentée. Il s'agit peut-être d'une réminiscence du fait qu'une preuve a déjà été rencontrée en classe.

A partir de l'objet $a^2=2b^2$ en jeu dans cet épisode, les élèves abordent une question de parité :

<u>Extrait 6</u>

A : Déjà il est pair.. <u>*inaudible*</u>. a². … Qu'est-ce que je raconte ? Il est pair donc a² sur b² c'est pair <u>*inaudible*</u>. J'sais pas pourquoi j'dis ça mais/ (rires).
A : Si ça vous intéresse. (rires)
A : Et si a² sur b² c'est pair, ça veut dire que…Attends…<u>*inaudible*</u> ça veut dire que <u>*2 divise b*</u>[58] a et b ils sont <u>*inaudible*</u>.
A : C'est pas obligé.
A : Ben si. 9 divisé par 3 c'est 3.
A : Parce que si. Fin si t'as… euh, (elle calcule). Fin c'est pas obligé quoi. J'vois pas comment.
A : Quoi ?
A : J'ai dit qu'ils sont pairs.
A : Pas obligé.
A : Voilà.
Rires

[58] Cette police indique un doute quant à ce qui a été entendu lors de la transcription de l'enregistrement des échanges.

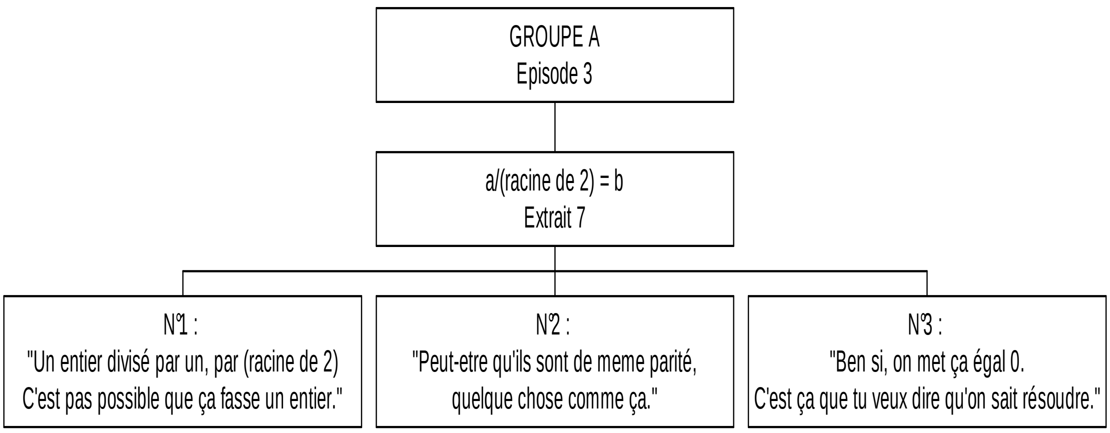
A : Ah ouais, tu divises 10, tu divises quelque chose qu'est pair par quelque chose qu'est pas
A1 : S'il reste 2, s'il reste 2/ - A : 10 divisé par 5 …
A : Hein quoi ?
A1 : Rien rien rien.
[Groupe A, Episode 2]

Un élève affirme que a² est pair et remarque que $\frac{a^2}{b^2}$ l'est aussi en perdant spontanément de l'information (ce nombre est exactement égal à 2). La question au centre de la réflexion devient : a et b sont-ils pairs aussi ? L'argumentation soutenant que cette implication est vraie repose sur l'utilisation maladroite de deux exemples. Le premier exemple ($a^2=9$, $b^2=3$) pourrait correspondre à un raisonnement par contraposée, avec pour négation de « a et b pairs », l'énoncé « a et b impairs » au lieu de « a ou b impairs ». Le choix de b^2 annonce semble-t-il une transformation de la question qui apparaît à travers l'exemple suivant. La question semble se transformer implicitement, sans que l'on sache si cela est contrôlé ou non par les élèves, et elle devient la suivante : si le quotient de deux entiers est pair, ces entiers sont-ils pairs aussi ? Le choix du deuxième et dernier exemple ($a^2=10$, $b^2=5$) (qui devient un contre-exemple) explique alors que l'élève qui défend l'implication initiale n'argumente plus (« Rien, rien, rien »). L'emploi d'exemples tend à ce que les élèves pensent ici que la vérité de l'implication en jeu dépend des valeurs choisies pour a et b : « c'est pas obligé » ; cela clôt le débat. Au-delà de l'emploi d'exemples les élèves semblent démunis pour raisonner sur la question soulevée.

Il faut aussi souligner que l'énoncé « a et b pairs » n'est absolument pas mis en relation avec le fait que les entiers en jeu sont premiers entre eux. La parité est abandonnée à la fin de cet épisode alors que c'est le ressort de la preuve euclidienne classique. Comme nous l'avons explicité dans l'analyse *a priori*, si l'on abandonne la parité, d'autres moyens de résolution sont possibles à partir de l'égalité $a^2=2b^2$.

Episode 3

Nous avons construit l'organigramme suivant pour l'épisode 3 qui, comme nous l'avons indiqué dans l'itinéraire, correspond à un retour à l'objet racine :



L'extrait 7 correspond aux tous premiers échanges de ce troisième épisode :

<u>Extrait 7</u>

A : Un entier divisé par un, un, par racine de 2. C'est pas possible que ça fasse un entier.
A : Si.
A : Ben justement c'est ce qu'on essaye de prouver d'puis tout à l'heure.

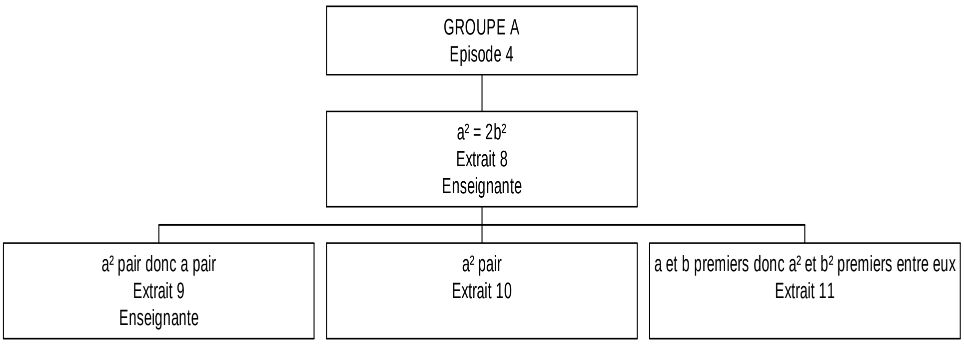
[Groupe A, Episode 3]

Le travail mené après élévation au carré n'ayant pas abouti, il y a un retour à l'objet $\frac{a}{\sqrt{2}}=b$ avec la reformulation de leur opinion fondée sur une attention à la nature des nombres en jeu (a et b sont entiers et $\sqrt{2}$ ne l'est pas (extraits 3 et 4)).

Nous ne retenons aucun autre extrait pour cet épisode car les éléments indiqués dans l'organigramme ne sont pas développés par les élèves.

<u>Episode 4</u>

Pour l'épisode 4, nous avons construit l'organigramme suivant :



Comme indiqué dans l'itinéraire, l'épisode 4 débute avec une première intervention de l'enseignante au sein du groupe :

<u>Extrait 8</u>

P : *Attends, racine de 2 diviseur ça veut rien dire parce que racine de 2 c'est pas un entier il faut forcément que tu travailles avec un entier. Faut forcément travailler avec ça. Voilà, c'est là dessus qu'il faut travailler !*
A1 : C'était une bonne idée de mettre au carré ?
P : *Oui bien-sûr. C'était, C'était forcément une bonne idée puisque … si tu veux pouvoir travailler sur les entiers, faut, faut avoir ça.*
A : Ben/
P : *Donc c'est là dessus qu'il faut travailler.*

[Groupe A, Episode 4]

A travers la question de l'élève A1, la fragilité avec laquelle le traitement opératoire consistant à élever au carré vivait jusqu'à présent dans le travail des élèves réapparaît. L'enseignante explicite la nécessité de travailler avec des entiers et confirme la pertinence de l'idée d'élever au carré.

Cette discussion se poursuit :

Extrait 9

P : *Ben continue. Qu'est-ce que tu peux en déduire ?*
A : 2 divise a^2.
P : *Donc qu'est ce que tu peux en déduire sur a ? Par exemple.*
A : Qu'il est supérieur à *inaudible* .
P *:* *Tu peux en déduire un peu plus que ça.*
A : C'est un multiple de 2.
P : *Voilà ! Ben continue dans cette voie. Suis ta, suis les idées de A1 elles m'ont l'air bonnes.*

[Groupe A, Episode 4,]

L'enseignante modifie davantage le milieu en confirmant l'idée de raisonner en termes de parité et en orientant précisément la recherche : a est pair car a^2 est pair. Il est à noter que la première réponse donnée relativement à l'entier a est relative à l'ordre naturel et non à l'ordre divisibilité comme cela est attendu par l'enseignante.

Comme l'illustre l'extrait 10, seul le caractère pair de a^2 est pris en compte par les élèves une fois l'enseignante partie :

Extrait 10

A : Dis-nous A1 tout ce qui te passe par la tête.
A : Alors attends, a^2 est égal à 2 b^2. a^2 multiple de 2. 2 divise a^2.
--
A : A chaque fois c'est toi qui as les bonnes idées/
A1 : Non mais c'est quand elle pose des questions j'sais lui répondre et pis euh, et puis j'lui donne les bonnes réponses mais c'est tout.
A : Alors a^2 multiple de 2 ça sert à quoi ?

[Groupe A, Episode 4]

Aucune progression n'est faite : les élèves ne parviennent pas à exploiter le caractère pair de a^2 ; ils ne reprennent pas l'indication de l'enseignante et aucune traduction opératoire n'émerge. A travers le discours de A1, on sent bien à quel point il se sent dépendant de l'enseignante.

L'extrait suivant sur lequel nous zoomons précise la suite de la recherche :

Extrait 11

A : N'oublie pas qu'on a a et b premiers entre eux hein. a^2 est premier à b^2 aussi.
A : Pas obligé.
A : Hum, j'en suis pas très sure.
A : Attends on va prendre un exemple. 3 est premier avec 2 donc 9 est premier avec 4.
A : Ouais mais bon…

A : J'sais pas si ça marche *inaudible*
A1 : Regarde 2 et 5 ils sont premiers entre eux. Non, j'ai rien dit.
(Rires)
A : 9 t'as qu'à prendre 9, 9 et 17. Mais moi j'connais pas le carré de 17.
A1 : J'ai une calculatrice (en rigolant).
A : Vas-y fait, fais 17 au carré divisé par 9 non par 81.
A1 : Oui mais c'est deux nombres premiers faudrait prendre/
A : Oui ben c'est ce qu'on a dit, on a dit des nombres premiers.
A : Entre eux.
A1 : Mais non ! Premiers entre eux pas premiers.
A : Ah ouais d'accord.
A1 : 4^2 et j'sais pas et euh/
A : J'sais pas prends 15 et euh 15 et ?
A1 : 15 et 4 j'ai mis.
A : Ben c'est pareil.
A1 : Ou 125 et 16. Ils sont premiers entre eux.
A : J'en sais rien moi.
(Rires)
A : Tu mets 125 divisé par 16 tu verras bien… Non c'est pas comme ça qu'on fait. 16 par 16 c'est 4 2, 2 fois 2/
A1 : Non moi j'crois qu'ils sont premiers entre eux, 16 et 125.
A : Ouais quand on met les trucs au carré/
A1 : Ouais mais on sait pas, c'est pas écrit dans le cours mais on peut pas le démontrer dans le cas général /
A : Oh on s'en fout !
A1 : Donc on n'a pas le droit de l'utiliser. Enfin j'crois pas, j'sais pas peut-être qu'on l'a dit dans le cours.

[Groupe A, Episode 4]

C'est le caractère irréductible de la fraction initiale qui impulse un raisonnement sur les carrés, ce qui est contraire à ce que l'enseignante attend. Le problème posé est de savoir s'ils peuvent en déduire que les carrés des numérateur et dénominateur sont aussi premiers entre eux, ce qui n'intervient pas dans leur preuve finale. On retrouve l'importance du rôle joué par les exemples dans le travail mathématique des élèves ; les couples d'entiers (a, b) considérés sont chronologiquement les suivants (3, 2), (2, 5), (9, 17) et (15, 4). Il semblerait que jusqu'au troisième exemple il y ait une confusion entre nombre premier et nombres premiers entre eux et qu'ainsi ce ne soit pas une coïncidence s'il s'agit de nombres premiers dans les deux premiers exemples. Il est à noter que les élèves passent du deuxième au troisième exemple parce que 2 et 5 ne sont pas jugés premiers entre eux. Est-ce parce qu'ils sont premiers ? Nous n'avons malheureusement pas assez d'éléments pour expliquer ce jugement. Deux interprétations au moins sont possibles : soit cela renvoie à la volonté de prendre des nombres premiers entre eux sans particulariser en choisissant des nombres premiers, soit les primalités intrinsèque (nombre premier) et extrinsèque (nombres premiers entre eux) s'excluent l'une l'autre pour les élèves (ou du moins on peut émettre des doutes quant à la conformité de leur rapport aux notions de nombre premier et nombres premiers entre eux).

Démunis pour démontrer ce résultat, ils s'interdisent de l'utiliser par effet de contrat.

Episode 5

La recherche des élèves dans l'épisode 5 est synthétisée à l'aide de l'organigramme suivant :

GROUPE A
Episode 5

$a^2 = 2b^2$
donc a s'écrit $a = 2k$
Extrait 12
Enseignante

Irrationnalité prouvée
Extrait 13

Cet épisode débute avec une intervention de l'enseignante que nous reproduisons ci-après :

Extrait 12

P : *Alors, est-ce que les idées de A1 aboutissent ?*
A : Non.
P : *Non ? !*
A : inaudible
P : *Mais si elle en avait tout à l'heure.*
A1 : a^2 est multiple de 2 et pis euh/
P : *et a alors, a il est quoi ?*
A : a^2 est multiple de 2.
P : *a^2 est multiple de 2.*
A1 : Ben il est multiple de 2 (hésitant).
P : *Forcément ou pas ? Oui ou non je sais pas j'te demande !*
A : Ca fait a fois a multiple de 2, donc le carré est multiple de 2.
A : Oui.
P : *Tu essaies de m'écrire ça et puis si a est multiple de 2 tu vas peut-être pouvoir l'écrire ! Comment tu l'écrirais que a est multiple de 2 ?*
A : a égale 2k.
P : *Voilà !*
A : inaudible
P : *Attends, avant de dire je vais être bloquée, essaye !*
A1 : Ah oui, ben forcément, oui ben oui ! a est multiple de 2.
P : *Voilà !*
(rires)
P : *Bon ben alors du coup tu vas pouvoir écrire. Ecris-le que a est multiple de 2 ! Qu'est-ce que ça te donne ? !*
A1 : a égale 2q
P : *Voilà.*

[Groupe A, Episode 5]

L'enseignante réintroduit le début de la preuve attendue avec en particulier le passage crucial entre a^2 et a et enrichit le milieu au niveau opératoire : la traduction opératoire du caractère pair est donnée par un élève à sa demande.

Rappelons qu'un élément de contrat important est qu'il n'est pas attendu que le résultat "si le carré d'un entier est pair alors ce nombre l'est aussi" soit démontré par les élèves. Avec cet extrait, nous pouvons émettre un doute quant à la pertinence de cette règle de contrat relativement à la capacité des élèves à démontrer le résultat en jeu et même à le considérer comme allant de soi.

Une fois l'enseignante éloignée du groupe, les discussions reprennent :

<u>Extrait 13</u>

A1 : Après faut travailler encore avec les carreaux ? Euh les carrés.
A : J'en sais rien, donc qu'est-ce qu'on a ?
A : On a a égal 2 q.
--
A1 : Attends, -tends, -tends. J'crois que j'ai une idée.
A : a égal 2q.
--
A1 : Ca veut dire que b il est multiple de 2 aussi !
A : Pourquoi ?
A1 : Parce que.
A : Ben dis-donc tes démonstrations.
(Rires)
A1 : 2 divise b ; b multiple de 2. Et si, Ah non. Voilà, voilà ça y est ! J'ai trouvé, j'ai trouvé !
A : Non.
A1 : Si, si, si, si, si j'ai compris.(rires) Et puis que si a est multiple de 2 et b est multiple de 2 a sur b ça va pas être une fraction irréductible. Donc/
A : Pas forcément.
A : Je peux savoir d'où ça sort ça ? !
A : Oh, là…Calme-toi.
A1 : Ah oui c'est vrai.
(rires)
A1 : J'ai trouvé, Madame, j'ai trouvé.

[Groupe A, Episode 5]

Cet extrait nous permet d'avoir à nouveau confirmation de la fragilité avec laquelle le fait d'élever au carré vit dans la recherche des élèves.

Contrairement à la dernière intervention de l'enseignante (extrait 9), les élèves intègrent dans leur travail tout ce qui a été apporté, directement ou non, par l'enseignante. Et, nous constatons que la traduction opératoire du caractère pair est l'élément déclenchant pour l'élève A1 qui, très rapidement, développe le reste de la preuve attendue sans rencontrer le moindre obstacle ; l'apparition de la contradiction est lumineuse…

<u>Episode 6</u>

Comme cela a été précisé dans l'itinéraire, l'épisode 6 correspond au moment où, à la demande de l'enseignante, l'élève A1 explique sa preuve à l'élève A2 ; la construction d'un organigramme ne nous semble pas nécessaire ici.

Nous avons choisi de zoomer sur l'extrait suivant pour avoir le détail de ce qui est problématique pour l'élève A2 :

<u>Extrait 14</u>

A1 :	T'as compris jusqu'à là que a est multiple de 2/
A2 :	Oui, ça j'ai compris.
A1 :	T'as a est multiple de 2, d'accord ? ? donc que a^2 est égal à $2b^2$/
A2 :	Non mais j'ai compris que b était multiple de 2.
A1 :	Ben voilà… Donc a multiple de 2 donc a égal 2q et b égal 2q', t'es d'accord ? Les deux sont multiples de deux. Quand tu fais a sur b, et ben cette fraction est réductible puisque tu peux la réduire par 2.
A2 :	Et alors ?!
A1 :	Donc c'est pas possible parce que euh, x, euh si racine de 2 s'écrit a sur b il faut que a et b bien ils soient premiers entre eux. T'es d'accord ?
A2 :	Ben non ces deux là ils sont premiers entre eux maintenant.
A1 :	Mais non a égal 2q et b égal 2q'.
A2 :	Oui !
A1 :	Donc et ben a et b ils pas premiers entre eux.
A2 :	Ca fait q sur q'
A1 :	On s'en fout de q sur q'.
A2 :	Ben si.
A1 :	-tends, regarde. Ah !
A2 :	Attends mais c'est la même chose !
A1 :	Chut ! Tu me laisses parler, tu me laisses parler OK ? Bon. Tu dis, est-ce que ça va si racine de 2 il peut s'écrire a sur b irréductible (elle insiste sur ce mot). D'accord ? C'est bon me regarde pas comme ça.
(Rires)	
A1 :	Le problème, tu veux savoir si racine de 2 il peut s'écrire avec a sur b avec a et b irré enfin/
A :	Ils sont premiers entre eux.
A1 :	Premiers entre eux. Voilà. PGCD de a b égal 1, d'accord ? Voilà. Or on a fait tout un bidouillage, on a trouvé que a égal 2q et b égal 2q'. Or on a dit que PGCD égal 1 donc là ils ont 2 en commun donc c'est pas possible, donc racine de 2/
A2 :	D'accord, j'ai compris !

[Groupe A, Episode 6]

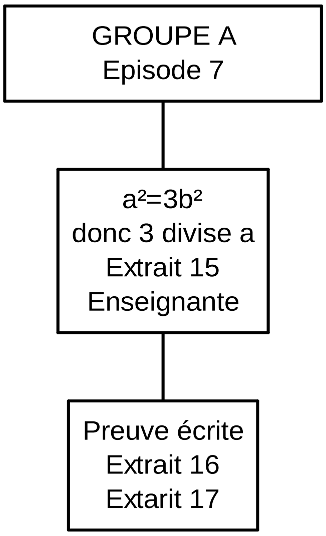
Comme cela apparaît clairement dans cet extrait, ce qui est problématique pour l'élève A2 c'est l'identification de la contradiction. Pour cet élève, le fait de simplifier la fraction initiale par 2 les ramène au point de départ : « Attends mais c'est la même chose ! ». Il semble donc que cet élève pense en termes de rationnel : les fractions sont équivalentes ; elle ne « voit » pas que le raisonnement porte sur la représentation du nombre en jeu et sur les entiers en jeu dans cette représentation.

L'explication de l'élève A1 semble suffisamment claire. Soulignons que cet élève met en relief la pensée organisatrice de cette preuve en dissociant spontanément l'étape opératoire aboutissant à démontrer que a et b sont pairs du reste de la preuve : « on a fait tout un bidouillage ». D'ailleurs cela rend compte selon nous du niveau de compréhension avec lequel cet élève s'est approprié la preuve développée.

<u>Etude de l'irrationalité de $\sqrt{3}$</u>

<u>Episode 7</u>

Avec l'épisode 7 commence le travail sur $\sqrt{3}$; l'organigramme retenu est le suivant :



Comme indiqué dans l'itinéraire, le début de l'étude de $\sqrt{3}$ a lieu avec l'enseignante :

<u>Extrait 15</u>

P : *Alors pour racine de 3 ça va marcher comment ?*
A : Je sais pas.
P : *Je sais pas.*
A1 : On a le droit de dire euh pour euh a et b/
P : *Voilà !*
A1 : Que a et b sont/
P : Voilà !
A1 : PGCD égal 1. Donc forcément 3 il divise a.
P : *Car alors attends c'est quel théorème que tu vas essayer de m'utiliser?*
A2 : Gauss.
P : *Alors Gauss il te dit quoi exactement ?*
A2 : Si a divise 3 b et a et b premiers entre eux a divise 3.
A1 : Oui mais bon/
P : *Oui, oui effectivement tu peux le dire comme ça. a divise 3 b², a est premier avec/*
A1 : Mais j'sais pas j'ai pas encore lu le truc alors/
P : *Oui effectivement c'est une manière de le dire qui va fonctionner. Mais euh a divise 3 euh c'est pas tout à fait c'que tu voulais tout au début/*
A: Oui.
P : *3 divise a.*
A : Oui.
P : *Donc il vaudrait mieux le faire dans l'autre sens : si 3 divise a² est-ce que c'est possible que 3 ne divise pas a ?… Pourquoi c'est pas possible ?*
A : Parce que c'est a fois a /
P : *Si 3 ne divise pas a qu'est ce qui se passe ?*

A : Ben euh, 3 ne divise pas a².
P : Pourquoi ?
(rires)
A : Parce que a² c'est a fois a.
P : Oui non mais euh. Donc tu as 3 divise a fois a. Si 3 ne divise pas a, comment ils sont à ce moment-là ? Y'a pas un théorème du cours ?
A : Le théorème de Gauss.
P : Voilà ! Parce que, pourquoi est-ce que si 3 divise a².
A : Ah oui, d'accord.
P : Voilà ! Et alors du coup…Du coup ça marche pas. Parce que s'il est premier avec a, il faut qu'il divise a inaudible *là vous allez pouvoir me le trouver. »*
A : Ah oui, d'accord.
P : *Et du coup ça va marcher pareil.*
A : Mmm.
P : Bon ben alors allez-y, faites-moi ça correctement. Vous m'écrivez votre démonstration avant la récréation, vous avez cinq minutes pour l'écrire.
[Groupe A, Episode 7]

L'enseignante intervient sans qu'il y ait eu d'échange entre les élèves au sujet de $\sqrt{3}$: elle centre la recherche sur l'étape opératoire à combler (démontrer que si le carré d'un nombre est multiple de 3 alors ce nombre est lui-même multiple de 3).

Cet extrait met particulièrement bien en évidence, nous semble-t-il, l'association privilégiée qui est faite entre le caractère irréductible de la fraction $\frac{a}{b}$ et le théorème de Gauss. On constate en effet que l'élève A2 suit un raisonnement qui aboutit à une conclusion (a divise 3) autre que celle annoncée (3 divise a) ce qui signifie sans doute qu'il ne l'avait pas mené préalablement avant de répondre « Gauss » à la première question de l'enseignante (qui d'ailleurs ne lui a pas été adressée). On retrouve avec l'emploi de ce théorème l'inversion spontanée du sens habituel en termes de divisibilité déjà rencontrée. Soulignons que cette lecture extra-ordinaire est d'abord validée par le professeur qui reprécise rapidement le « sens » de lecture attendu (le résultat visé est 3 divise a et non a divise 3) au niveau des conclusions en jeu.

Au cours de cette discussion il nous semble qu'un compromis se fait spontanément : dans la preuve de l'implication en jeu qui se dessine ici, l'élément technologique (théorème de Gauss) a été importé par les élèves, alors que la pensée organisatrice est celle de l'enseignante (un raisonnement où il est supposé au départ que 3 ne divise pas a (raisonnement par contraposée) et que 3 divise a² (raisonnement par l'absurde)).

Les extraits 16 et 17 rendent compte de la façon dont les élèves s'approprient les éléments apportés lors de cette discussion :

Extrait 16

A : Ah c'est parce que 3 est premier.
A1 : Oui, oui oui mais je sais pas comment dire/
A : Tu mets euh… Si a² et 3, euh si 3 divise pas a², ils sont premiers entre eux, d'accord ?

A1 :	Non si a /
	[Groupe A, Episode 7]

Extrait 17

A1 :	Or 3 divise a² qui est égal à a fois a. Si 3 ne divise pas a alors d'après Gauss 3 devrait diviser a puisqu'il divise a² tu piges mais j'sais pas comment dire/
	[Groupe A, Episode 7]

Ces extraits témoignent à la fois de la maîtrise avec laquelle l'élève A1 en particulier s'est approprié le raisonnement en jeu dans la discussion que les élèves ont eu avec l'enseignante au début de cet épisode (l'élément « 3 est premier » est précisé à l'initiative des élèves) et de sa complexité à travers la difficulté exprimée à le formuler. Cette difficulté amènera les élèves à interroger leur professeur mais, même si au cours de l'échange avec ce dernier rien de nouveau n'est apporté, rien n'apparaît comme problématique par la suite et la rédaction de leur preuve est achevée (cd. § II.1.1).

Comparaison, production et généralisation avec le support de preuves fournies

Episode 8

Rappelons que les trois tâches qui ont pour support trois preuves données de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (comparaison de leur preuve de l'irrationalité $\sqrt{2}$ aux trois preuves données, production de preuves de l'irrationalité de $\sqrt{3}$ et généralisation) interviennent dans un même épisode car seule la comparaison est travaillée collectivement.

Les extraits sur lesquels nous zoomons précisent ce qui apparaît dans leur production écrite.

Irrationalité de $\sqrt{2}$: Comparaison de leur preuve aux trois preuves fournies

Il est intéressant d'observer comment les élèves ont sélectionné, pas à pas, la preuve 2 (par l'absurde et minimalité) lors de la comparaison. Initialement, les trois preuves sont rejetées par un élève, sans qu'aucune explication n'apparaisse. Ensuite, une sélection est faite avec argumentation et nous identifions quatre temps : la preuve 1 est rejetée, des ressemblances sont identifiées avec la preuve 2, la preuve 1 est à nouveau considérée, la preuve 2 est finalement la seule candidate retenue.

La preuve 1 (descente infinie) est la première considérée :

Extrait 18

A :	Nous c'est aucune des trois hein ?
A :	Si, ça ressemble à la une.
A :	Ouais mais c'est pas ça. C'est pas la une exactement…Parce que là ils disent pas que a et b est irra/ est irréductible.
A :	Ouais , ouais, ouais.
A :	Donc c'est pas ça.
	[Groupe A, Episode 8]

Cette preuve est ici clairement rejetée exclusivement parce que la fraction n'est pas supposée irréductible.

L'extrait suivant met la preuve 2 en scène :

Extrait 19

A : Ce serait plutôt peut-être la 2 ?
A : non
A : Oui parce qu'eux ils disent que a_0/
A : On a pas parlé de truc plus petit nous.
A : Ben oui on a pas parlé d'ensemble machin mais bon comme on a dit que a sur b c'était irréductible et là ils disent que a_0 sur b_0 ben c'est le plus petit. Fin ça ressemble.
A : *inaudible.*
A : Non.
A : Bon on s'en fout on fait l'autre question.

[Groupe A, Episode 8]

Apparaît ici l'embryon du « verdict » final des élèves, mais celui-ci n'est pas retenu ; il est cependant très vite repris. De plus, de nouveaux éléments de comparaison interviennent :

Extrait 20

A : Nous on a fait la moitié de la preuve 2 en fait.
A : Preuve par l'absurde.
--
A : On a fait un peu un mélange des deux quoi. Non c'est pas tout-à-fait pareil parce qu'on n'a pas dit ouais 2k plus 1 machin truc. Pour dire que a et truc sont pairs on a pas fait, a et b sont pairs on n'a pas fait ce qu'ils ont fait, … enfin pas tout-à-fait… Donc en fait non. Non parce que voilà quoi.
--
[…]
--
A : On dit quoi ? On dit qu'euh, on dit qu'elle ressemble à la preuve numéro 2 ?
A : Non.
A : Si elle ressemble/
A : Si elle ressemble à celle-là parce qu'on a dit que a. Là ils disent a_0 sur b_0 c'est irréductible.
A : Raisonnement par l'absurde.
A : Plus petit.
A : *inaudible*.
A : Ouais mais elle vient de le dire à côté ouais ça ressemble.

[Groupe A, Episode 8]

Le raisonnement par l'absurde est clairement explicité. Mais, comme on le lit dans leur production finale, l'attention est portée également sur l'étape opératoire : les élèves n'identifient pas que dans la preuve 2, contrairement à leur preuve, l'implication « a^2 est pair donc a est pair » est démontrée ; ils observent simplement qu'il réside à ce niveau une différence.

Dans un troisième temps, la preuve 2 n'a plus l'exclusivité au titre de candidate pour une ressemblance avec leur propre preuve :

<u>Extrait 22</u>

A : Car euh, attends, -tends, je réfléchis euh, car euh, a_0 sur b_0 correspond à notre fraction irréductible.
--
A : Je dit oui euh preuve numéro 2 car ils supposent euh, ils utilisent un raisonnement par l'absurde.
A : Oui non mais là aussi. On dit que là ! Tu sais pas lire ? !
A : Preuve par l'absurde.
A : Oui mais là aussi c'est absurde. Regarde.
A : Non mais !
A : *<u>inaudible</u>*.
A : Non mais non mais parce que on a posé, on a posé a sur b égal, fin euh, irréductible donc c'est comme là ils ont fait a_0 b_0 quoi, on a mis la même disposition au début.
A : *<u>inaudible</u>*.
(rires)
A : Car le euh euh, leurs a_0 sur b_0 correspondent a sur b car euh. …On s'en fout
A : On s'en fout on n'est pas en français hein !
--
A : Tu rédiges comme tu peux, tu vois ce que je veux dire. C'est ça qui ressemble.

[Groupe A, Episode 8,]

Le raisonnement par l'absurde est également identifié dans la preuve 1 mais, rappelons-le, cela n'apparaît pas dans le nom que nous avons utilisé pour la désigner, contrairement à la preuve 2. Cela contribue à renforcer le lien établi entre leur preuve et la preuve 2 puisqu'il permet de différencier les preuves 1 et 2.

Enfin, la preuve 2 est définitivement l'élue :

<u>Extrait 23</u>

A2 : On a fait exactement la 2 en fait. Eh on a fait exactement la 2 en fait.
A : Tu crois ?
A2 : Ouais. J'en suis sure même.
A1 : Non mais non parce que là on n'a pas démontré/
A2 : Si, si, si, si, si.
A1 : On a pas démontré qu'euh…
A2 : On n'a pas démontré quoi dis-moi ?
A1 : On a pas démontré que a et b sont pairs.
A2 : On a fait pareil, pareil.
A1 : On n'a pas fait pareil, exactement.
A2 : Attends, mais si c'est juste pour ça…
A1 : Oui c'est juste pour ça sinon.

[Groupe A, Episode 8]

La preuve 2 est retenue par l'élève A2 et, comme cela apparaît ici nettement, c'est le niveau organisateur qui est privilégié. Cet extrait permet également d'émettre un doute quant à la conclusion que les élèves ne se sont pas rendus compte que l'implication non démontrée dans leur preuve l'est dans la preuve 2 en particulier.

Précisons pour finir que la preuve 3 n'est mentionnée qu'une fois par un élève qui dit que leur preuve ressemble aussi à la dernière (475) ce qui est immédiatement écarté sans argumentation (la preuve 2 est déjà « la favorite »).

Irrationalité de $\sqrt{3}$: Productions de trois preuves avec le support des trois preuves fournies

La lecture de la transcription confirme que l' « écriture » des trois preuves de l'irrationalité de $\sqrt{3}$ n'a pas été problématique pour ce groupe d'élèves. Néanmoins, les rares échanges qui ont eu lieu au sujet de cette tâche révèlent le caractère superficiel de la réussite des élèves (cf. l'extrait donné ci-après) :

<u>Extrait 24</u>

A : Vous avez fait la preuve numéro trois du 2 ?
A2 : Moi j'ai fait la une si tu veux la lire.
A1 : Ah oui mais j'ai pas, j'ai refait une autre méthode moi j'ai pas/
A2 : Oui moi aussi hein.
--
A2 : D'façon c'est pas pareil a et b, eh ! Pour racine de 3 c'est pas pareil puisque racine de 3 on n'a pas prouvé qu'il est pair. Avec le truc des pairs/
A : Oui je sais.
A2 : Ca a aucun rapport.

[Groupe A, Episode 8]

Les élèves ont réussi à écrire les preuves 1 (descente infinie) et 2 (par l'absurde et minimalité) d'une part parce que le niveau organisateur n'a semble-t-il pas été problématique d'autre part parce qu'ils ont su extraire de ces preuves l'étape consistant à démontrer que les entiers en jeu sont multiples de 3 et y injecter ce qu'ils avaient développé dans leur propre preuve de l'irrationalité de $\sqrt{3}$. Néanmoins, cet extrait montre que les élèves n'ont pas identifié le raisonnement en termes de parité comme un cas particulier d'un raisonnement en termes de divisibilité ; le caractère pair n'est pas traduit par « divisible par 2 ».

Généralisation

La réflexion autour d'une généralisation n'est menée que par l'élève A1. Les échanges relatifs à ce point sont les suivants :

<u>Extrait 21</u>

P : Alors vous me dites si l'une, si votre preuve ressemble à l'une des trois.
A1 : Pour le 3, ce serait pas plus facile de faire avec euh, comme la troisième, parce que comme racine de n c'est n puissance un demi *<u>inaudible.</u>*
P : Oui, oui effectivement on pourrait euh, oui oui sans doute que la dernière effectivement euh, le plus simple ce serait peut être de regarder ça.

[Groupe A, Episode 8]

Extrait 25

A1 : T'es d'accord ou pas ?
A : Parce que tu veux dire que la racine s'en va avec le 2. Et donc ça fait q à la puissance k.
A1 : Ouais. Parce que comme/
A : Racine de n c'est n puissance un demi et ben il fait exactement le même raisonnement qu'toi.
A : Oui non mais non là ils te demandent juste/ Oui ben. T'es d'accord avec moi que c'est celui-là le plus facile.
A : Oui !
A : Oui ben c'est c'que j'dis ; ils demandent juste ça.
--
A1 : Faut juste expliquer le raisonnement, le raisonnement.
A : Tu m'as dit qu'y'avait pas…
A1 : Ils demandent pas une démonstration mais expliquez le raisonnement/
A : Ben fais un schéma, fais un schéma.
A1 : Mais comment tu fais un schéma ?
A : Ben c'est toi qui est une dessinatrice.
(rires)
--
A1 : Un schéma comment faire un schéma ?
P : Alors vous me refaites la même chose pour racine de 3, hein, c'est bon vous avez tout fait ?
A1 : Fin ça c'est c'que j'pense.
P : Oui. Et donc est-ce que tu peux me faire un squelette de démonstration. Pas la faire mais m'expliquez un p'tit peu comment tu f'rais quoi. Hein tu, tu dis la décomposition en nombres premiers donc me dire euh. Me faire le squelette quoi, c'est-à-dire si…
A : *Inaudible*
P : Qu'est-ce que tu comprends pas ?
A1 : Faudrait que ça ce soit un entier.
P : Eh bien en fait c'que je voudrais c'est euh, si vous vouliez généraliser laquelle, laquelle des démonstrations/
A : La troisième.
P : La troisième. Est-ce que vous pourriez me faire un squelette ; c'est-à-dire comment vous l'écririez, voyez parce qu'ici elle est complètement écrite.
A : Vous voulez qu'on l'écrive donc/
P : Soit vous me l'écrivez complètement soit au moins me mettre euh, me mettre les points qui vous paraissent essentiels.
A : Ben on l'écrit en vrai/
P : Comme vous voulez.
A1 : n soit à une puissance qui fasse que euh cette puissance fois un demi ça fasse un nombre. Entier.
--
A1 : Regarde, j'ai pas fini encore mais dis-moi c'que t'en penses.
--
A1 : Vas-y lis c'que j'ai fait. J'ai pas fini mais bon/
--
A1 : Tu comprends c'que je veux dire ou tu comprends pas ?
A : Attends, -tends, -tends.
--
P : C'est bien ça qu'on te demande de montrer. Que si racine de n est rationnel forcément k sur 2 appartient à N. C'est bien ça qu'on te demande de montrer.
A1 : C'est logique/
P : On te dit racine de n rationnel. Ah ! c'est logique.

A1 :	Ben ça se voit ! (rires)
P :	*J't'apporterai un jour j'ai un article où j'ai trouvé un truc tout c'que disent les profs de maths quand ils veulent pas faire une démonstration parce qu'ils savent pas la faire et alors par exemple ils disent ça se voit très bien, c'est un bon moyen d'éviter de faire une démonstration. D'accord ? Mais c'est bien ce qu'on te demande, ce qu'on te demande c'est, c'est bien de montrer ça, c'est que racine de n rationnel ça implique que n est un carré et toi tu es en train de me dire ça se voit.*
A1 :	Ca me semble logique
A :	divisibilité.
P :	*Alors pourquoi ça te paraît logique ?*
A1 :	Parce qu'euh, euh, si je veux que ce nombre là, parce qu'à ce nombre là c'est racine de n, parce que racine de n c'est n puissance un demi et j'ai posé que n est égal à q puissance k.
P :	*Pourquoi il est égal à q puissance k ?*
A1 :	Non mais, j'dis que n il peut s'écrire comme ça.
P :	*Ben Pourquoi ?*
A1 :	Parce que (rires), parce que c'est un nombre.
P :	*C'est pas toujours vrai ! Par exemple 15 il s'écrit pas comme ça ! Ou alors avec k égal 1 mais bon quel est l'intérêt à ce moment là ?*
--	
(rires)	
P :	*Si tu veux utiliser cette chose là, il va peut être effectivement falloir parler de la décomposition en nombres premiers.*
A1 :	Ah voilà c'est ça que je voulais dire, c'est ça, (rires)
P :	*Donc qu'est-ce qui se passe dans la décomposition en nombres premiers, donc écris-moi à ce moment là, euh, n s'écrit comment ? Ecris-moi la décomposition en nombres premiers, on l'a fait ça en cours quand même, de l'écrire de manière générale….Alors qu'est-ce que va se passer, si n n'était pas un carré, comment serait forcément, tu vois y'a quand même un, un problème là. Sur ma décomposition en nombres premiers comment tu vois qu'un nombre est un carré ou pas par exemple ? Comment ça se voit ? …Ca c'est une bonne question, comment on voit sur la décomposition en nombres premiers qu'un nombre est carré ou pas carré ? Parce que, comme finalement c'que tu veux montrer c'est/*
A1 :	Ben tous les exposants ils sont euh fois deux, ben ils sont tous des multiples de 2.
	SONNERIE…
P :	*Par exemple, voilà ! C'est comme ça qu'on le voit. Alors si ils sont pas tous des multiples de 2 qu'est-ce que va se passer ?*
	FIN
	[Groupe A, Episode 8]

Ces échanges nous permettent d'émettre l'hypothèse que l'élève A1 raisonne sur l'implication triviale de l'équivalence en jeu ici ($\sqrt{n}$ rationnel si n est un carré). Pour l'enseignante, comme elle l'exprime elle-même, c'est l'autre implication qui est en jeu. Telle que la question est présentée aux élèves (« On peut se demander pour quelles valeurs de n le nombre $\sqrt{n}$ est rationnel… A votre avis ?»), il est légitime de chercher une condition suffisante pour que $\sqrt{n}$ soit rationnel et, pour un élève de TS, étant donnée la culture d'enseignement, il est loin d'être naturel de se demander si elle est aussi nécessaire.

Dans le cadre de la synthèse, nous reviendrons sur les différentes analyses qui concernent le groupe A. Nous nous intéressons maintenant au groupe B.

II.3 Analyse de la transcription du groupe B

II.3.1 Itinéraire

De même que pour le groupe A, nous présentons très succinctement chaque élève du groupe B par rapport au rôle qu'il y joue. L'élève B1 est dans l'ensemble celui qui est mathématiquement le plus compétent mais a tendance à ne pas approfondir ou mener un raisonnement qui ne le convainc pas lui-même s'il estime avoir répondu à l'attente de l'enseignante. L'élève B2 est moins « solide » sur le plan mathématique mais semble être réellement soucieux de la validité mathématique indépendamment de l'attente de l'enseignante. L'élève B3 semble, quant à lui, avant tout attentif à paraître compétent, comme si en particulier il n'oubliait pas que leur recherche est enregistrée, mais reste celui qui a le plus de difficultés.

Voici à présent l'itinéraire du groupe :

II.3.1.1 Etude de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

Episode 1 : « Y'en a marre maintenant, j'suis sûr qu'on a vu » (B1)

Dès le début, la recherche des élèves de ce groupe est guidée par la conviction que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel et par la volonté de démontrer qu'il est impossible que ce nombre s'écrive sous la forme d'une fraction. De plus, dès le début, des éléments de généralisation apparaissent. Mais la recherche est très tôt parasitée par le fait que l'élève B1 est sûr que ce problème a déjà été traité en classe. Leur travail de groupe, de ce fait, va consister à plusieurs reprises à prospecter dans leurs cahiers et manuel.

Les trois épisodes suivants correspondent à des pistes explorées puis abandonnées par les élèves qui sont attentifs à la nature des nombres en jeu dans leur travail.

Episode 2 : « Regarde on fait que 2 est égal à $\sqrt{2}$ fois $\sqrt{2}$ » (B1)

La première piste consiste à décomposer 2 en faisant apparaître le nombre $\sqrt{2}$; cette piste est abandonnée parce que les élèves sont attentifs à la nature des nombres en jeu et veulent se ramener à des nombres entiers.

De même que dans l'épisode 1, le cas de $\sqrt{3}$ est mentionné.

Episode 3 : « Faut qu'on fasse une équation » (B1)

Une deuxième piste explorée naît semble-t-il de la prospection dans leurs documents : elle consiste à se ramener à la résolution d'équations du type ax+by=d (a, b et d entiers et d multiple du pgcd de a et b). Partant de l'objet $\sqrt{2}\,$b–a = 0, ils ont en tête d'utiliser la technique enseignée en TS pour résoudre une équation que B3 nomme « équation de Bézout ». De même que la première, cette piste est rapidement abandonnée car les élèves sont vigilants quant à la nature des nombres en jeu.

Jusqu'à l'épisode 8, qui est le dernier avant la première intervention de l'enseignante, le travail du groupe est cependant inspiré par l'idée d'utiliser la technique routinière enseignée pour résoudre le type d'équations mentionné précédemment.

Episode 4 : « On peut pas utiliser le théorème de Gauss si c'est pas entier » (B2)

Leur recherche est réinitialisée sans que l'objet en jeu en soit explicité (à supposer qu'il y en ait précisément un à ce moment de leur recherche) ; peut-être ont-ils à l'esprit l'équation de l'épisode précédent ? : l'idée d'utiliser le théorème de Gauss émerge une fois le caractère irréductible de la fraction mentionné et celle-ci conduit les élèves dans une nouvelle impasse.

Episode 5 : « Ben déjà tu peux mettre au carré » (B3)

L'élève B3 a l'idée d'élever au carré et la met en œuvre à partir de l'égalité $\sqrt{2}\,b–a=0$. Il se trompe dans ses calculs, oubliant le double produit. L'élève B2 lui indique son erreur.

L'élève B1, qui n'a pas suivi l'idée d'élever au carré, amène le groupe à prospecter à nouveau dans ses documents. Une discussion s'engage confirmant l'élève B3 dans son idée d'élever au carré.

Finalement l'élève B1 s'approprie cette idée, mais cette fois à partir de l'égalité $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ ce qui les amène à un nouvel objet l'égalité : $2b^2– a^2=0$.

Episode 6 : « 1 et $\sqrt{2}$ ça marche mais seulement $\sqrt{2}$ il ne va pas. » (B2)

Suite au travail opératoire de l'élève B1, l'objet en jeu est maintenant l'égalité $2b^2– a^2=0$ qui est vu comme une équation à résoudre. L'idée directrice est d'utiliser pour la résoudre la technique enseignée pour résoudre les équations associées à la tâche emblématique. Les élèves cherchent pour commencer une solution particulière, d'abord en cherchant une solution « évidente », ensuite en essayant d'utiliser l'algorithme d'Euclide car les solutions trouvées ne les satisfont pas. Ils se retrouvent de nouveau en situation de blocage.

Episode 7 : « Mais je sais ! On peut poser grand B qui est égal à b^2 et grand A qui est égal à a^2.» (B2)

L'épisode commence avec la proposition de l'élève B2 d'introduire des notations auxiliaires pour désigner les carrés ; c'est donc à présent l'égalité $2B – A = 0$ qui est en jeu.

L'élève B1 rejète le lien qui avait été fait dans des précédents épisodes avec le théorème de Bézout car ici le second membre est égal à 0. En consultant leur manuel relativement à ce théorème, l'élève B3 formule une visée en lien avec le caractère irréductible de la fraction (il y a un paragraphe intitulé « Notion de fraction irréductible » à la même page que celle où le théorème de Bézout est mentionné dans la partie cours).

La prospection dans leurs documents se poursuit et on observe un retour à l'idée de résoudre l'équation en assimilant cette tâche à la tâche emblématique car pour les élèves il n'est pas spécifié dans le cours que le second membre doit être non nul. L'élève B2 s'interroge cependant sur la visée sous-jacente.

Episode 8 : « tu multiplies par 2 bien-sûr t'as le droit. » (B3)

L'élève B2 propose de multiplier par deux l'égalité 2B – A = 0 car pour lui les coefficients 1 et 2 de cette équation posent problème : ils sont premiers entre eux. Mais on ne sait pas très bien pourquoi ceci crée pour cet élève un problème. Les deux autres élèves ne comprennent visiblement pas ce besoin mais ils n'obtiendront pas d'explication satisfaisante car un nouvel épisode commence avec la première intervention de l'enseignante.

Episode 9 : « Ben oui mais ça, c'est de là qu'on est parti. » (B2)

L'enseignante intervient pour la première fois : d'une part la piste jusqu'à présent suivie par les élèves (résolution de l'équation) est rejetée, d'autre part le caractère pair de A est pointé et la recherche est orientée sur ce que l'on peut en déduire sur a sans qu'aucune information supplémentaire ne soit donnée.

Une fois l'enseignante partie, les élèves pensent être dans une impasse.

Episode 10 : « ça j'en suis sûr on n'est plus très loin. » (B1)

A partir de l'égalité A=2B qui est reprise, ils en reviennent à la lecture donnée par l'enseignante, c'est-à-dire au caractère pair de A, sans arriver à l'exploiter à ce moment de leur recherche. C'est l'énoncé A et B premiers entre eux qui devient l'objet des discussions, avant que leur recherche ne soit réinitialisée à l'initiative de l'élève B1. La première idée qui émerge est d'utiliser le théorème de Gauss en lien avec le fait que « a » et « b » sont supposés premiers entre eux (nous pensons qu'il s'agit de A et B) ; ce théorème n'est cependant pas utilisé dans la suite de leur raisonnement qui est le suivant : A est pair donc B est impair puisqu'ils sont premiers entre eux, d'où b est impair. L'enseignante intervient auprès du groupe à ce moment là.

Episode 11 : « Si petit a est pair, il va s'écrire comment ? » (P)

Cet épisode débute avec la deuxième intervention de l'enseignante où la traduction du caractère pair de l'entier a sous la forme « 2q » est introduite dans le milieu des élèves. Et, une fois l'enseignante partie, cet élément est intégré dans leur raisonnement et semble leur permettre d'aboutir. Une fois une preuve achevée, l'élève B1 appelle le professeur qui lui confirme que ce problème a déjà été traité en classe ; elle quitte le groupe en les invitant à étudier le cas du nombre $\sqrt{3}$.

Episode 12 : « Ouais mais le problème c'est pourquoi ils sont premiers entre eux grand a et grand b ? » (B2)

Débute la phase de rédaction. Le raisonnement par l'absurde est explicité.

L'élève B2 qui rédige met l'accent sur l'énoncé implicitement utilisé dans leur preuve (si deux nombres sont premiers entre eux alors leurs carrés le sont aussi) dont la vérité est discutée au sein du groupe. Même si cela n'est pas problématique pour les autres, cet élève fait appel à l'enseignante.

Episode 13 : « Oui mais on a besoin de ça. Pourquoi elle dit qu'on n'a pas besoin ? » (B2)

L'enseignante aborde la question posée par l'élève B2 en proposant deux éléments opératoires distincts pour prouver le résultat intermédiaire « un nombre premier p qui divise a^2 divise a » d'une part via la décomposition en facteurs premiers, d'autre part via le théorème de Gauss. Du coté de la dimension organisatrice, c'est alors un raisonnement par l'absurde qui est suivi sous les hypothèses que p divise a^2 mais ne divise pas a. A la fin, comme au début de cet échange, le professeur affirme qu'ils n'ont cependant pas besoin de ce résultat. Mais, même si l'élève concerné acquiesce, le problème resurgit au sein du groupe. Le malentendu relatif à la preuve en jeu persiste lors de la deuxième intervention de l'enseignante. La sonnerie clôt les discussions.

II.3.1.2 Etude de l'irrationalité de $\sqrt{3}$

Episode 14 : « Racine de 3 fois q c'est pas un entier. » (B1)

L'élève B1 propose par écrit une preuve par l'absurde à l'enseignante : de $3b^2=a^2$ il est directement déduit $3b^2=9q^2$ puis, après simplification, la racine carrée est prise et la contradiction identifiée porte sur la nature de l'objet a qui étant égal à $q\sqrt{3}$ ne peut pas, selon lui, être entier.

L'enseignante quitte le groupe en redéfinissant leur recherche : par l'intermédiaire du travail de l'élève B1, elle pointe l'implication à démontrer pour justifier le passage de la première à la seconde ligne (si le carré d'un entier est multiple de 3 alors cet entier l'est aussi) en confirmant qu'ils peuvent utiliser le théorème de Gauss mentionné par cet élève pour cette démonstration.

Episode 15 : « C'est ça le théorème de Gauss. » (B2)

Des éléments de preuve sont développés pour l'étape opératoire manquante ; le théorème de Gauss joue à la fois un rôle central et perturbateur. Au cours de ce développement, les élèves perdent de vue l'objet pour lequel la traduction opératoire du caractère multiple de 3 a été initialement exploitée par l'élève B1 ; une certaine confusion règne au sein de la recherche qui est plusieurs fois relancée alors que l'on pourrait penser que les élèves ont abouti.

Episode 16 : « Regarde en fait on a 3 grand B est égal à 3 grand Q.» (B1)

L'élève B1 réinitialise une fois de plus la recherche : de l'égalité $\sqrt{3}$ b=a, il déduit l'égalité 3B=3Q, en introduisant les notations B=b^2, A=a^2 puis A=3Q. C'est le caractère multiple de 3 de a^2 qui est ici traduit dans le travail opératoire et non le caractère a multiple de 3. De même que dans l'épisode 14, B1 réintroduit ensuite l'objet racine et cherche une contradiction relativement à la nature des nombres.

L'enseignante intervient et, voyant qu'ils ne progressent pas, leur propose d'admettre l'étape manquante.

Episode 17 : « Mais j'écris exactement c'que y'a d'écrit » (B2)

L'épisode commence avec la distribution de l'aide prévue (forme avec congruences) ; B1 et B3 commencent individuellement à travailler à partir de celle-ci.

B2, chargé de rédiger leur preuve, interroge l'élève B1 auteur du brouillon dont il s'inspire pour la production écrite commune.

Episode 18 : « Non je comprends pas, je comprends pas ce que ça implique sur a^2 en fait.» (B2)

Ils travaillent à partir de l'aide qui leur a été distribuée pour démontrer que si a^2 est multiple de 3 alors a l'est aussi. Comme l'a demandé l'enseignante au début de cet épisode, l'élève B1 explique ce qu'il a fait au groupe. Les différents échangent montrent que le calcul des congruences est problématique au moins pour les élèves B2 et B3. De plus, la pensée organisatrice sous-jacente à l'aide n'est pas claire pour tous, en particulier pour l'élève B2 comme le remarque l'élève B1, et ce malgré les explications de l'enseignante qui intervient une deuxième fois au cours de cet épisode. Ils finissent malgré tout par aboutir ensemble, et la suite de l'activité leur est distribuée.

II.3.1.3 Comparaison de leur preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ avec trois preuves données

Episode 19 : « C'est un truc par l'absurde et puis c'est tout ! »

Il semble que les élèves de ce groupe s'approprient la question « Votre preuve est-elle l'une des trois preuves données ? Expliquez votre réponse » en pensant, peut-être par effet de contrat, que leur preuve doit correspondre à l'une des trois preuves proposées : cette partie de l'activité suscite des discussions où sont cherchées des ressemblances, comme des différences, de diverse nature. Néanmoins, c'est un élément de nature organisatrice qui est finalement retenu, comme dans le groupe A : le raisonnement par l'absurde.

II.3.1.4 Production de preuves de l'irrationalité de $\sqrt{3}$ à partir de preuves données

Episode 20 : « En fait, pair c'est divisible par 2. Là ça devient nettement plus clair ! »

Leur difficulté à adapter les trois preuves données pour prouver que $\sqrt{3}$ est irrationnel les conduit à penser que cela n'est pas possible. Comme l'élève B1 le met en lumière à la fin de ce travail en groupe, ce qui leur a posé essentiellement problème c'est de traduire la dichotomie pair / impair en termes de divisibilité afin de faire le lien avec celle de nombre divisible par 3. Ils ont en effet associé à l'écriture 3B=A la propriété A impair par analogie avec l'interprétation faite (A pair) de l'égalité 2B=A , dans le cas de $\sqrt{2}$.

II.3.2 En procédant à des zooms

II.3.2.1 Etude de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

Episode 1

Dès l'épisode 1, comme le montrent les extraits reproduits ci-après, le groupe d'une part est convaincu que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, d'autre part généralise cette propriété :

Extrait 1

B1 : Racine de 2 c'est pas rationnel.

B3 : « Est-il rationnel ou irrationnel. »… Ben oui normalement c'est pas rationnel.

B1 : Racine de 3 non plus d'ailleurs.

B3 : Allez comment tu veux l'étudier ?

B2 : (Rires). J'en ai aucune idée.

B1 : Ben, faut démontrer que ça s'écrit pas a sur b et pis c'est tout.

[Groupe B, Episode 1]

Extrait 2

B2 : Non mais de toute façon les racines aux carrés c'est pas rationnel.

B3 : Ben si.

B2 : Sauf euh les carrés parfaits.

B1 : Ben non… J'suis sûr que tu en trouves un qui est/

B3 : Y'en a qui sont rationnels.

B2 : Et ben racine de 9 c'est rationnel.

B1 : C'est normal ça fait 3.

B2 : Ben oui, donc j'te dis à part les carrés parfaits.

[Groupe B, Episode 1]

La conviction que le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel est donc le point de départ de la recherche des élèves, avant même qu'un travail mathématique n'ait été développé. A partir de l'égalité $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, cette conviction permet ensuite la formulation d'une visée en termes d'écriture impossible. De plus, les élèves identifient les candidats pour la généralisation sur laquelle il est proposé de réfléchir dans la dernière question (non abordée dans leur production écrite).

Episode 2

Dans cet épisode, nous avons choisi de zoomer sur l'extrait 3 qui illustre bien la nature des échanges relatifs à la première piste mentionnée dans l'itinéraire :

Extrait 3

B1 : Regarde on fait que 2 est égal à racine de 2 fois racine de 2.
B3 : Ouais.
B1 : 2 s'écrit euh.
B3 : Ouais exact. Ben 2 s'écrit 2.
B1 : Ben ça s'écrit 2 sur 1. Ca s'écrit, nin nin nin.
B3 : Attends mais à ce moment là racine de 2 ça s'écrit 2 sur racine de 2.
B1 : Oui.
B3 : Bon t'es d'accord ?
B1 : Hein, quoi ?
B2 : Racine de 2 ça s'écrit 2 sur racine de 2.
B1 : Ouais. Bon et ?
B3 : Ben il faut que b soit/
B1 : On s'en fout.
B2 : Que b soit…
B3 : Soit différent de 0. Il faut que b soit un entier aussi non ?
B1 : Oui ben oui.
B3 : Ouais donc c'est la merde. Ben si racine de 2 tu multiplies en haut et en bas par racine de 2.
B1 : Ca changera rien parce que t'auras toujours une racine quelque part. T'auras 2 racine de 2 sur 2.
B3 : Ah ben oui.
B2 : Mais comment on étudie/Etudier la rationalité c'est s'intéresser à la question x est-il rationnel ou irrationnel ? Le problème c'est qu'on sait qu'il est irrationnel.

[Groupe B, Episode 2]

Les élèves, comme le montre cet extrait, cherchent à faire intervenir des égalités impliquant $\sqrt{2}$. C'est d'abord l'égalité $2=\sqrt{2}\times\sqrt{2}$. Elle conduit facilement à l'égalité : $\sqrt{2}=2/\sqrt{2}$ qui est une écriture quotient sur le modèle de l'égalité $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$. On voit ici comment l'attention que les élèves portent, dès le début, contrairement à ceux du groupe A, à la nature des nombres en jeu intervient dans l'abandon de la piste suivie : le nombre choisi pour valeur de b doit être entier (à noter que les élèves sont aussi vigilants au choix d'un nombre non nul pour diviseur). Cette attention amène ensuite les élèves à exprimer la nécessité de se débarrasser de l'objet racine.

Soulignons que la fin de l'extrait montre que l'absence de doute quant à l'irrationalité du nombre étudié peut être un élément qui perturbe la recherche des élèves. Ils ont à rentrer dans un raisonnement hypothetico-déductif par l'absurde et ont visiblement du mal à faire la différence entre la valeur épistémique de l'énoncé : « $\sqrt{2}$ est rationnel » qui est la valeur « Faux » et la valeur logique qui va lui être attribuée dans la démonstration par l'absurde : la valeur « Vrai », pour reprendre la distinction entre valeur épistémique et valeur logique introduite par R. Duval. Ici la formulation reste relativement floue, l'élève B2 exprimant seulement qu'il y a un problème mais cette difficulté interviendra de façon récurrente au cours de la recherche et la nature du problème sera clairement identifiable dans les échanges.

L'extrait 4 issu de ce même épisode montre qu'encore une fois, leur pensée va au delà du cas étudié, en envisageant l'extension à l'objet $\sqrt{3}$:

<u>Extrait 4</u>

B2 :	De tout façon à la rigueur, si on arrive à montrer que racine de 2 il est irrationnel c'est la même démonstration pour racine de 3.
B3 :	Exact.
B2 :	Enfin, en théorie.
B3 :	Ben pour racine de 3. Oui, oui, ben de toute façon ça revient au même. Mais euh.

[Groupe B, Episode 2]

Mais cette fois-ci, ce n'est plus simplement l'énoncé qui est en jeu dans l'extension, c'est aussi la preuve de la validité de cet énoncé. Comme dans l'épisode 1, c'est l'élève B1 qui formule la généralisation. Et il nous semble intéressant de marquer la différence des réactions des deux autres élèves, symptomatique de leur comportement tout au long de la séance. B3 confirme immédiatement la généralisation comme si elle allait de soi, tandis que B2 est plus sceptique et, tout en acquiesçant *a priori*, introduit une réserve par sa réponse « Enfin, en théorie ».

Episode 3

Dans l'épisode 3, rappelons-le, apparaît un nouvel objet : l'équation : $\sqrt{2}$ b– a = 0. C'est l'élève B3 qui, manipulant l'égalité de départ, arrive à cet objet et le propose aux autres comme un objet intéressant. L'extrait 5, sur lequel nous zoomons, correspond à la fin de cet épisode, relativement court :

Extrait 5

B3 : Ce que tu fais racine de 2b moins a égal 0 mais là ça va revenir strictement au même. Mais euh, comme tu sais que b est différent de 0, tu prends pour b égal 1. Tu vas avoir moins a égal racine de 2 un truc comme ça j'sais pas. Faut partir à mon avis de ça. Faut partir de ce truc là et puis euh.

B1 : Faut qu'on fasse une équation.

B2 : Et a et b ils sont, a et b ils sont premiers entre eux puisque c'est une fraction irréductible.

B3 : En plus et regarde. C'est exactement la même forme que l'équation de , de , de Bézout.

B1 : Ouais à mon avis si elle a écrit ça au tableau c'est pas un hasard[59].

B3 : Ah, ouais ? Donc si t'as racine de 2 moins a égal 0, de là tu peux, tu peux utiliser la technique qu'on connaît avec l'algorithme d'Euclide et/

B1 : Ouais mais le problème c'est que le truc apparemment *inaudible* des nombres entiers.

B3 : Ben eh, racine de 2.

B1 : Racine de 2 il est pas entier.

B3 : Ah ouais… Là ça coule.

--

B1 : Non, non,non, arrête ta piste elle est pas bonne.

B2 : De quoi de quoi, de quoi ?

B1 : Ta piste elle est pas bonne.

[Groupe B, Episode 3]

Dans cet extrait, les échanges concernent essentiellement B1 et B3. On voit que l'objet proposé par B3 branche les élèves sur le monde des équations et plus particulièrement sur le type d'équation diophantienne qui est impliqué dans la tâche que nous avons qualifiée d'emblématique et routinière dans le chapitre 5. Ce branchement est le fait de B1, B3 s'étant d'abord lancé dans des transformations, en prenant b=1, dont la raison ne semble pas évidente. Mais dès que B1 parle d'équation, il embraye en reconnaissant dans l'objet considéré ce qu'il appelle, en hésitant « équation

[59] Relativement à la constitution des groupes pour l'expérimentation, l'enseignante avait écrit au tableau une équation du type ax+by=c.

de Bézout », faisant sans doute un amalgame avec l'identité de Bézout, lien peut-être favorisé par l'intervention de B2. Plus tard B3 fait aussi le lien avec l'algorithme d'Euclide utilisé pour obtenir les coefficients u et v dans l'identité de Bézout au+bv=1, lorsque a et b sont premiers entre eux, et une solution particulière dans la résolution de la tâche emblématique quand il n'en existe pas d'évidente. On a l'impression qu'il se sent ainsi prêt à appliquer la technique standard décrite dans le chapitre précédent. On notera que les élèves se sentent alors confortés dans leur approche par le fait qu'une équation de ce type figure au tableau, inscrite au début de la séance par le professeur. Pour les élèves, ceci ne peut être le fait du hasard ou d'une heureuse coïncidence. Ils en font une lecture contractuelle. Mais assez vite cependant, B1 interrompt B3, en faisant remarquer que dans la tâche emblématique, les coefficients de l'équation sont entiers ce qui n'est pas le cas ici. B2 a l'air de travailler de façon plus isolée. Sa première intervention dans cet extrait ne semble pas en rapport évident avec ce qui précède et la seconde et dernière semble une intervention de raccord, comme si ayant suivi son fil un moment, la déclaration de B1 : « ta piste n'est pas bonne » l'incitait à rentrer à nouveau dans le jeu collectif.

Episode 4

Dans cet épisode, la recherche redémarre sur une nouvelle base. C'est B2 qui lance ce redémarrage en revenant à sa déclaration précédente : « a et b sont premiers entre eux ». Ceci, comme le montre l'extrait sélectionné, les branche sur le théorème de Gauss qui intervient donc ici véritablement pour la première fois dans le travail des élèves (il a été mentionné une première fois lors de l'épisode 1 à l'occasion de la lecture par l'élève B1 du titre « Théorème de Gauss et nombre premiers » de leur manuel mais sans plus) :

Extrait 6

B2 : a et b. a et b ils sont premiers entre eux, on peut pas utiliser Gauss ? B3 : Le problème c'est que, le problème c'est que/

B3 : Oui c'est à ça que j'pensais mais on a dit que racine de 2 il doit être entier, non il doit pas être entier ?

B1 : Si mais peut-être qu'on peut pas *inaudible*

B3 : D'ailleurs on commence comme ça en supposant que racine de 2 est entier. Racine de 2 il est pas entier.

B1 : Ben non … On peut essayer de bidouiller ça.

B2 : Ben oui. On peut pas utiliser le théorème de Gauss si c'est pas entier.

[Groupe B, Episode 4]

Comme cela avait été le cas dans le groupe A, on voit comment l'information que deux nombres sont premiers entre eux appelle le théorème de Gauss dont c'est l'une des hypothèses. Mais, de même que dans l'épisode précédent, et contrairement au groupe A, il y a dans ce groupe une conscience claire que le théorème de Gauss concerne les entiers. B3 semble essayer de s'en sortir en revenant aux hypothèses faites dans le raisonnement par l'absurde (avec une confusion entre l'hypothèse : « $\sqrt{2}$ est rationnel » et l'hypothèse « $\sqrt{2}$ est entier », mais il est une fois de plus gêné par le fait qu'il sait que $\sqrt{2}$ n'est pas entier. B1, et c'est un trait de comportement constant au fil de la séance, est prêt à se lancer dans des bidouillages d'écriture, mais conformément à sa position dans le groupe, B2 va disqualifier cette attitude et la piste de Gauss sera momentanément au moins abandonnée.

Episode 5

L'objet en jeu était jusqu'à présent l'égalité $\sqrt{2}$ b–a=0. Avec l'épisode 5, l'idée d'élever au carré émerge enfin, comme un moyen de surmonter les difficultés rencontrées. Malheureusement, dans un premier temps, assez normalement, la mise au carré porte sur le premier membre de l'égalité, ce qui ne permet pas d'éliminer la racine. L'extrait suivant montre comment est gérée ce premier passage au carré.

Extrait 7

B3 : Ben déjà tu peux mettre au carré, regarde, tu mets tout au carré.
B1 : Ca se passera pas comme ça.
B2 : Ben oui vas-y.
B3 : Ben oui mais si tu mets tout au carré tu pourras plus savoir.
B2 : Ben si on aura quand même des racines de 2 si tu mets au carré.
B3 : Ah non ! Parce que tu vas avoir/
B2 : Ben si, 2ab ça fait euh, ta racine de 2 elle reste.
B3 : Ben non puisque tu mets racine de 2 au carré, racine de 2 fois racine de 2 ça fait 2b et a² au carré ça fait 1. Ca fait 2b moins a égal 0.
B2 : N'importe quoi ! C'est un, tu mets au carré. C'est a moins b au carré que tu développes.
B3 : Ah oui tu veux dire/
B2 : Donc ça fait a², a² moins 2 ab plus b².
B1 : C'est quelle page rationnel et irrationnel?

[Groupe B, Episode 5]

Dans cet extrait, l'échange se situe cette fois entre B2 et B3, B1 semblant préférer chercher dans ses documents. On pourrait penser que la mise au carré est sous-tendue par la visée d'éliminer $\sqrt{2}$, mais ce premier échange montre bien que ce n'est pas aussi clair. Parce qu'il oublie le double produit, B3 pense que $\sqrt{2}$ va effectivement disparaître mais cela semble lui poser problème plus que le satisfaire. Et B2 qui repère tout de suite l'erreur semble vouloir le rassurer en lui montrant que $\sqrt{2}$ ne disparaîtra pas. On a l'impression qu'au moins pour B3, on ne peut raisonner sur la nature de ce nombre s'il n'est plus explicitement présent dans les écritures manipulées et que l'idée d'élever au carré était simplement une idée de calcul possible. on a ici l'impression que pour cet élève il est impossible de s'interroger sur la nature de ce nombre s'il n'est pas dans le travail opératoire.

A la suite de cet extrait, l'élève B1 pose une question qui amène le groupe à prospecter dans ses documents, leur manuel en particulier et la discussion suivante émerge rapidement :

<u>Extrait 8</u>

B1 : Eh déjà on a triché parce qu'on est parti sur le fait que c'était irrationnel. Faut partir sur le fait qu'on sait pas.

B3 : Ouais ben oui de toute manière c'est ça qui faut montrer. A mon avis faut que tu /

B2 : Attends, si.

B3 : Partes du fait qu'on ne sait pas et ensuite on arrive à démontrer que c'est.

B1 : <u>*inaudible.*</u>

B2 : Ouais mais non, je vois pas, je vois pas où il est le problème d'arithmétique en fait dedans c'est ça le problème.

B1 : Si parce que/

B3 : Ben justement une fois que tu arrives à cette équation là, ça devient un problème d'arithmétique puisque t'es obligé d'utiliser le théorème de Gauss, le théorème de Bézout alors qu'euh/

B2 : Oui mais ensuite/

B3 : Le tout c'est de démarrer.

B2 : Ca donnera quoi, ça donnera quoi le résultat de l'utilisation des théorèmes si racine de 2 il est irrationnel ? Tu sais c'que ça va faire toi ?

B1 : Théoriquement on sait pas que c'est irrationnel donc ça compte pas ce que tu sors.

B2 : Non ben si. Nous on le sait que c'est irrationnel mais faut le démontrer.

B1 : On n'est pas censé le savoir.

B2 :	Oui on n'est pas censé le savoir, on n'est pas censé le savoir mais euh, le théorème de Gauss il va marcher avec les nombres entiers pas avec les, les nombres ***rationnels***[60].
B3 :	Ben non ça marche, ben justement c'est là où ça cloche mais il faut trouver quoi mais tu vois/
B2 :	Ouais mais il est irrationnel.
B1 :	Faut traffiquer les enfants.
B3 :	Fin déjà on est parti sur une bonne piste.
	[Groupe B, Episode 5]

Cet extrait illustre bien le problème récurrent que pose aux élèves le fait de savoir que $\sqrt{2}$ est irrationnel. On voit ici que c'est un problème pour chacun des élèves. Cet extrait montre aussi une conception de l'arithmétique comme un domaine où il faut utiliser des théorèmes arithmétiques (théorèmes de Gauss et Bézout en particulier), enfin comme un champ qui porte sur les entiers. Cette discussion n'aboutit pas mais, sans doute en « traffiquant » comme il le dit, B1 élève au carré l'égalite $a=b\sqrt{2}$ et constate que $\sqrt{2}$ disparaît. Ensuite, comme il l'explique, il lui suffit de remettre tout du même côté pour se retrouver avec l'équation $2b^2-a^2=0$ et « c'est terminé ». B3 dit que c'est ce qu'il voulait faire mais que B2 voulait faire l'expression conjuguée. B2 répond que ce n'était pas son intention, qu'elle lui avait simplement montré qu'il se trompait dans son calcul, mais B3 revient sur son idée, explicitant que si on multiplie par l'expression conjuguée, on obtient exactement ce qu'a obtenu B1.

Episode 6

Les trois élèves se retrouvent donc avec cette équation entre entiers et pensent pouvoir la résoudre comme ils résolvent l'équation habituelle. Ils commencent donc par la recherche d'une solution particulière. B1 pense tout de suite à la solution évidente a=b=0 puis il veut continuer et c'est là que la situation devient problématique, comme le montre l'extrait suivant :

Extrait 9

B1 :	C'est nul de ce côté-là *inaudible.*
B3 :	Ben on l'avait déjà fait ça en classe, attends.
B1 :	Non.
B2 :	Non c'était égal à 1. Non c'est égal à d, c'est ça, c'est ça le théorème de Bézout.
B3 :	C'est égal à d hein c'est pas égal à 1.Ben regarde b est non nul.
B2 :	C'est possible oui.
B1 :	Ah, c'est raté.

[60] Police qui témoigne d'un doute à l'écoute de l'enregistrement audio.

--

B2 : Théorème de Bézout.

B3 : Attends, Ouais c'est égal à 1.

B2 : Ouais.

B1 : Ah non ! Parce que j'suis con j'ai pris une solution qui est égale à 0/

B3 : J'suis sûr normalement tu peux te débrouiller pour que quand c'est égal à 0.

B2 : Ben tu prends 1 et euh racine de 2.

--

B1 : T'es trop intelligente.

B2 : Ben c'est ça hein

B3 : Pourquoi 1 et racine 2 ?

B1 : Non parce que ça fait pas 0.

B3 : Exact.

B2 : 1 et racine de 2 ça marche mais seulement racine de 2 il va pas.

B3 : On sait pas si, on sait pas si. Donc c'est pas entier donc euh.

--

B2 : Mais le problème c'est qu'il faudrait enlever la racine.

B1 : Moi j'suis sûr qu'on peut trouver une solution avec *inaudible.*

B3 : Lequel ?

B2 : Ben dresse l'algorithme d'Euclide peut-être.

B1 : Avec des a et des b *inaudible.*

B3 : Non ça c'est normal que y' ait des a et des b. Normalement t'as des inconnues. Mais c'est pas égal à 0. Et en plus ils sont au carré.

B1 : Pis, de toute façon ça fera jamais 0.

B3 : …Un peu la merde quoi mais euh.

[Groupe B, Episode 6]

Le fait de partir de la solution (0,0) perturbe la démarche de B1 comme l'on pouvait s'y attendre. B2 semble repérer que le second membre n'est pas usuel, mais n'arrive pas à se décider sur ce qu'il devrait y avoir, ayant à la fois en tête l'écriture ax+by=d attachée à la tâche emblématique et l'identité de Bézout où le second membre est égal à 1. Finalement quand l'élève B1 voit dans le fait d'avoir choisi la solution nulle la source de son problème, B2 lui propose immédiatement une autre solution : 1 et $\sqrt{2}$. Le désaccord de B1 et B3 est alors sans doute lié au fait qu'ils interprètent ceci comme a=1 et b=$\sqrt{2}$. B2 est sûre de son calcul mais, comme l'on pouvait s'y attendre de sa part, au vu de ce qui précède, elle repère très vite que cette solution ne convient pas puisque $\sqrt{2}$ n'est pas entier. Puisqu'ils ne trouvent pas de solution évidente satisfaisante, assez naturellement ils pensent à utiliser l'algorithme d'Euclide mais, bien sûr, cela ne va pas de soi et c'est à ce moment que les élèves, outre le problème du 0, semblent repérer le problème lié au fait que l'équation n'est pas du premier degré comme c'est le cas dans la tâche emblématique.

Episode 7

L'épisode 7, rappelons-le, est celui où l'introduction de nouvelles notations va permettre de se ramener au premier degré. L'extrait 10 précise, comme les épisodes précédents le laissent supposer, pourquoi l'élève B2 introduit des notations supplémentaires pour désigner les carrés :

Extrait 10

B2 : Mais si je sais ! On peut poser grand B qui est égal à b² et grand A qui égal à a². C'est pas pareil, on peut pas faire comme ça ?
B1 : Si on peut faire comme ça mais euh je vois pas à quoi ça nous ça nous arrange.
B3 : Grand B qui est égal à b², pour quoi faire ?
B1 : Si ça la facilite/
B3 : Non, non.
B1 : Ben si ça la facilite.
B2 : Ben comme ça, comme ça B il est égal à 1 et A il est égal à 2.

[Groupe B, Episode 7]

C'est visiblement le souci de l'élève B2 de résoudre le problème posé par la difficulté à trouver une solution particulière entière qui motive l'introduction de ces notations. Grâce au changement d'inconnues induit, la solution ($\sqrt{2}$, 1) que B2 avait proposée puis rejetée fait place à une solution acceptable, la solution (2, 1). Ce n'est donc pas la volonté de se ramener à une équation du premier degré comme on aurait pu le penser à l'issue de l'épisode précédent. B3 se rallie aussitôt à cette proposition tandis que B1 a un peu plus de mal à suivre. Mais si le problème des solutions particulières non entières est réglé, celui du 0 du second membre demeure et les élèves y sont très vite confrontés. Et ceci les conduit à aller chercher dans leurs documents ce qui concerne Bézout. Cette incursion dans leurs documents les ramène à la notion de fraction irréductible qui figure dans le cours juste après et à la dimension organisatrice de leur travail, comme le montre l'extrait suivant.

Extrait 11

B3 : Ben, ça c'est exactement ce qu'on cherche.
B1 : Ah ben non on est stupide.
B3 : Sauf que là c'est/
B1 : C'est déjà irréductible.

B3 : Ben irréductible euh, ben justement c'est la même chose, tu fais exactement c'qu'ils t'indiquent pour montrer que c'est un truc irréductible. Si tous les éléments montrent que c'est pas possible et bien ça veut dire que c'est pas rationnel.

B1 : *inaudible* je sais que ça à l'air hyper facile mais c'est harchi dur.

[Groupe B, Episode 7]

Mais ceci reste flou et de toutes façons ne permet pas l'avancée toujours bloquée au niveau opératoire. Ils poursuivent leur lecture ce qui ramène la discussion sur le fait de savoir si d peut être nul ou non. Finalement, repérant l'information : a, b et d donnés dans Z, ils en déduisent qu'*a priori* la valeur 0 pour d n'est pas exclue. S'engage alors la discussion entre B2 et B3 qui termine cet épisode, reproduite dans l'extrait 12.

Extrait 12

B2 : Et nous il faut qu'on montre qu'elles sont pas dans Z.

B3 : Ben il faut d'abord les calculer.

B2 : Oui non mais/

B3 : Tu calcules toutes les solutions/

B2 : D'accord on calcule les solutions mais à la fin faudrait qu'on arrive à ce qu'elles soient pas dans Z ou pas ?

B3 : Ben déjà calculons les solutions. Ben oui. Et après et après c'est autre chose.

[Groupe B, Episode 7]

Il est très intéressant d'observer le besoin qu'éprouve l'élève B2 de préciser l'objectif relativement auquel le travail opératoire va se développer, avant même que ce développement n'ait été amorcé, alors que pour l'élève B3, ces deux dimensions sont ici déconnectées l'une de l'autre. On sent chez B2 poindre une inquiétude, même si elle reste encore confuse. Elle nous semble interprétable de la façon suivante. Si l'on résout l'équation par les techniques habituelles, on va nécessairement trouver des solutions entières pour les inconnues. Comment concilier ceci avec le fait que l'on veut aboutir à une impossibilité, c'est-à-dire montrer qu'il n'y a pas de valeurs entières possibles pour a et b ? Ceci bien sûr témoignerait d'un glissement implicite des A et B aux a et b, et aussi de l'oubli du fait que l'impossibilité peut porter non pas sur l'existence de la fraction mais sur son irréductibilité, mais un tel glissement est ici tout à fait possible.

$\boxed{\text{Episode 9}}$

L'épisode 9 correspond, rappelons-le, à la première intervention de l'enseignante dans le travail du groupe. L'extrait 13 correspond au début de cette intervention :

<u>Extrait 13</u>

P Alors comment vous vous en sortez ?

B2 : Très mal.

B1 : On a mis au carré.

P D'accord. D'accord donc tu as ?

B3 : On a trouvé ça ouais.

P Oui. Alors ça te donne quoi ? Ca va te donner quelque chose sur A.

B2 : 1 et 2.

P Oui mais encore faut-il. Pourquoi c'est 1 et 2 ; je comprends pas c'que tu veux dire.

B2 : On peut pas trouver une solution particulière pour cette équation et on sait qu'euh.

--

P Des solutions, des solutions y'en aurait une infinité.

B2 : Ben oui.

[Groupe B, Episode 9]

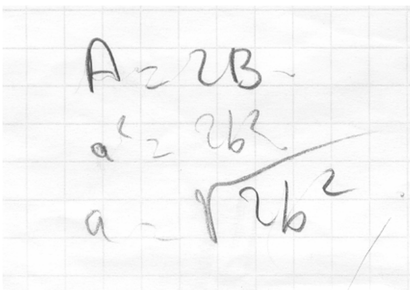
Le début de cette intervention montre clairement que enseignante et élèves ne sont pas sur la même longueur d'onde. L'enseignante lit l'égalité obtenue comme donnant l'information que A est pair et questionne les élèves en ce sens en demandant ce qu'ils ont obtenu sur A. Les élèves voient dans cette égalité une équation à résoudre et, à la question posée, B2 répond en donnant la solution particulière trouvée.

L'enseignante, dont la réticence vis-à-vis de l'approche développée par les élèves est lisible dans sa dernière intervention de l'extrait, avec notamment l'emploi du conditionnel, va ensuite pousser à une autre lecture, en posant comme objet de discussion, non plus l'égalité des élèves mais l'égalité A=2B et en demandant avec insistance ce que l'on peut déduire sur A de cette égalité. C'est finalement B2 qui fournira la réponse attendue. L'enseignante les quittera alors après leur avoir demandé de déduire du caractère pair de A « quelque chose » sur a. L'extrait 14 correspond aux premiers échanges suivant ce départ. Nous donnons aussi l'extrait de brouillon associé.

<u>Extrait 14</u>

B2 : Grand A égal 2B. Donc petit a égal racine de 2 <u>B</u>/b. Ouais mais c'est con parce qu'on revient à la racine.

B1 :	Attention à ce qu'elle a dit, a² égal 2B/b.
--	
B3 :	Ouais mais ça revient au même.
B1 :	On retombe sur le truc de tout à l'heure.
B2 :	Ben ouais.
	[Groupe B, Episode 9]



L'orientation de recherche indiquée par l'enseignante conduit les élèves à réintroduire l'objet racine carrée : l'objet A a été introduit par eux pour désigner le carré de l'objet a et un retour à ce dernier suscite naturellement d' « opérer de façon inverse » en prenant la racine. De cette façon, l'indication fournie par l'enseignante ne peut être exploitée par les élèves qui pensent que cela fait « reculer » leur recherche puisqu'ils se retrouvent à nouveau avec des radicaux.

Episode 10

Dans l'extrait 15 c'est l'égalité A=2B qui est en jeu, dans la continuité de l'épisode précédent :

Extrait 15

B1 :	Comme 2 est premier ça veut dire que A/a et B/b sont premiers entre eux.
B2 :	Oui mais 1 c'est pas un nombre premier.
B1 :	Pourquoi tu mets 1 là-dedans toi ?
B3 :	Où tu vois 1 ? A/a égal 2 B/b.

B2 : Ben oui mais euh tu sais très bien qu'il faut faire, tu veux utiliser quoi ? En disant que 2 est premier.

B1 : Ben utiliser le théorème de Gauss.

B2 : Et ben oui et ben il faut que 1 et 2 ils soient premiers entre eux. Et est-ce que 1 et 2 ils sont premiers entre eux ?

B1 : Quels 1 et 2 ?

B3 : Où tu vois 1 toi ?

B1 : Y'a A/a et B/b.

[Groupe B, Episode 10]

Cet extrait voit de nouveau apparaître le théorème de Gauss visiblement porté par l'égalité mais montre un rapport de l'élève B1 au théorème de Gauss relativement flou. L'élève B1 semble en effet penser que ce théorème va lui permettre de déduire du fait que 2 est premier que A est premier avec B, ce qui est assez surprenant. Quant à l'élève B2, elle semble interpréter A et B premiers entre eux au niveau de la solution particulière (2,1) trouvée. Ceci l'amène à se demander si 1 et 2 sont premiers entre eux. B3 qui se situe au niveau de l'égalité voit lui un coefficient 2 mais pas de coefficient 1 et ne comprend rien à cette discussion. Après quelques essais infructueux de B1 pour utiliser Gauss, ce dernier propose d'abandonner momentanément la démonstration pour lancer des idées. La première est que A et B sont premiers entre eux et B2 avance cette fois une nouvelle raison pour le justifier, à savoir que la fraction est irréductible.

L'extrait 16 donne la suite du raisonnement suivi par les élèves :

Extrait 16

B2 : A/a et B/b sont premiers entre eux.

B1 : On peut même dire que A/a il est pair.

B2 : Donc B/b il est forcément impair

B1 : Pourquoi ? Ah ben oui.

B2 : B/b est forcément impair parce que comme ça ils sont/

B3 : Pourquoi B/ b il serait forcément impair ?

B1 : Parce que réfléchis deux nombres pairs sont jamais premiers entre eux.

B3 : Exact.

Rires.

B1 : Toi même tu l'aurais pas trouvé.

B2 : Je ne l'aurais pas sorti aussi vite.

--

B2 : Mais b^2 il est impair or un carré c'est positif, euh, c'est pair un carré.

B1 :	Ah non non non.
B2 :	Ah non 3 fois 3. Merde c'est vrai.
B1 :	Donc ça veut dire que B/b est impair.
	[Groupe B, Episode 10]

Cet extrait rappelle le raisonnement suivi par les élèves donné dans l'itinéraire et montre semble-t-il une tentative de B2 pour faire émerger une contradiction de la conclusion obtenue : B impair. Malheureusement cette contradiction serait basée sur la propriété fausse que tout carré est pair (peut-être induite par l'exposant) et B1 voit immédiatement l'erreur et dans la foulée B2 trouve un contre-exemple. L'épisode se termine cependant sur un acquis : B est impair.

Episode 11

L'épisode 11 est, rappelons-le celui où, avec une aide supplémentaire de l'enseignante, les élèves vont enfin aboutir.

L'extrait 17, qui correspond au début de l'épisode, montre en particulier comment apparaît la traduction opératoire du caractère pair de a.

Extrait 17

B2 :	Grand B est impair donc petit b est impair.
P	*Et alors qu'est-ce qui se passe ? Donc tu as petit a qui est forcément pair petit b qui est forcément impair ben regarde c'que ça donne. Remplace petit a par euh si petit a est pair il va s'écrire comment ?*
B1 :	2a.
B2 :	2q.
B1 :	Euh 2q.
P	*Ben regardez c'que ça donne, vous remplacez là-dedans petit a.*
B2 :	Et l'autre b c'est 2q plus 1.
P	*Ben regardez. C'est pas le même, c'est pas le même.*
B2 :	Ah oui 2, 2.
P	*Occupez-vous de petit a donc regardez comment petit a s'écrit, qu'est-ce que ça vous donne là et puis euh essayez de voir ce que ça va donner.*
--	
B2 :	Ecris petit a égal 2q.
B1 :	Ouais.
B2 :	Et tu remplaces euh dans laquelle.
--	

B2 : Dans celle là ou dans celle-là, j'sais pas, dans laquelle ?

B3 : Pour l'autre ce sera 2q' plus 1.

--

B2 : Elle a dit qu'on devait d'abord s'occuper de a.

[Groupe B, Episode 11]

Une fois que les élèves ont formulé que a est pair puisque A l'est et b impair puisque B l'est, l'enseignante va les aider à opérationaliser cette information. L'écriture, une fois sollicitée, est rapidement produite par B1 et B2, preuve qu'il s'agit d'une connaissance mobilisable à défaut d'être disponible, et B2 assez raisonnablement propose un traitement symétrique de a et b. L'enseignante, sans rejeter cette suggestion, les oriente cependant vers le traitement dissymétrique correspondant à la réponse attendue en leur demandant de s'occuper de a. L'élève B3, une fois l'enseignante partie, reprend l'idée de B2 mais néanmoins l'influence de l'enseignante l'emporte. Après un certain nombre de manipulations d'écriture, impliquant les A, B et les a, b, les élèves achèvent enfin une preuve :

Extrait 18

B1 : Ah ben oui ! tiens ça veut dire que b^2 est pair.

B3 : Faux. Donc il est irrationnel.

B1 : Egal à $2q^2$ or b^2 impair donc impossible.

B3 : Putain on a trouvé !

B1 : Ouais ben là c'est qu'un coup de bol.

B3 : Ah non j'y crois pas.

B1 : Ok, là tu peux écrire maintenant.

B2 : Attends deux minutes.

B1 : Arrête c'est bon !

B2 : J'veux juste voir un truc.

B3 : C'est trop beau c'est ça.

[Groupe B, Episode 11]

Ce n'est pas la preuve attendue par l'enseignante qui émerge car les élèves ont, dès l'introduction des notations A et B, privilégié un raisonnement sur les carrés. La contradiction est liée à ces derniers et non aux entiers eux-mêmes. Et, comme l'élève B2 y pense déjà dans cet épisode, cette preuve utilise le fait que A et B sont premiers entre eux.

Episode 12

L'épisode 12 est associé à la rédaction. Contrairement à ce que l'on pouvait penser à l'issue de l'épisode précédent, elle ne va pas de soi.

Les élèves débutent donc la rédaction ; c'est l'élève B2 qui rédige :

<u>Extrait 19</u>

B2 : Si racine de 2 est rationnel alors il s'écrit a sur b.

B3 : Ouais. - B2 : On est d'accord.

B2 : Donc j'dis on admet que racine de 2 est rationnel. D'accord ça va comme ça ?

B3 : Non ça me plaît pas ça.

B2 : Mais on fait dans l'absurde, tu sais on fait par/

B3 : Récurrence ? - B1 : par l'absurde.

B1 : Récurrence Ok ! (en rigolant).

B2 : Non mais vous savez pas ! J'peux pas dire. C'est pas de la récurrence.

B3 : Ben tu pars du fait que. Non ! mais bon.

B2 : Ben on est parti du fait que racine de 2 il s'écrivait a sur b vous êtes d'accord ? On est parti de là.

B3 : De toute manière ils te le donnent.

B2 : Non ils nous le donnent pas !

B1 : Bon d'accord.

B3 : x égal a sur b.

B1 : Non tu fais si/

B3 : x égal a sur b et x c'est un nombre rationnel. On prends x égal racine de 2 donc de toute manière ça ils te le donnent.

[Groupe B, Episode 12]

Le raisonnement par l'absurde est explicité pour la première fois. B2 semble hésiter sur la façon dont doit démarrer sa rédaction et ceci suscite encore une fois la discussion avec B3 sur le statut des énoncés. L'intervention de B3 mentionnant le raisonnement par récurrence peut sembler ici tout à fait étrange si l'on pense au travail mené par le groupe. Ce terme fait sans doute pour lui référence à un mode de raisonnement emblématique de l'arithmétique, ce qui l'amène à l'évoquer mais on s'interroge sur son rapport à cette forme de raisonnement.

Le passage à l'écrit les amène ensuite à s'interroger sur la validité de l'énoncé : « si deux nombres sont premiers entre eux alors leurs carrés le sont aussi ». La discussion est reproduite dans l'extrait 20 :

Extrait 20

B2 : Ouais mais le problème c'est pourquoi ils sont premiers entre eux grand a et grand b?

B1 : Parce que A/a et 2 sont forcément premiers entre eux.

B2 : Parce que petit a et petit b ils sont premiers entre eux mais petit a² et petit b² on n'en sait rien.

B3 : Ben si si a et b sont premiers entre eux leurs carrés sont forcément premiers entre eux aussi.

B2 : 2 au carré 4 au carré, ils sont premiers entre eux ? 4 et 16 ils sont pas premiers entre eux. C'est pas bon.

B1 : Ouais mais 2 et 4 ils sont pas premiers entre eux.

B3 : Déjà 2 et 4 ils sont pas premiers entre eux.

B2 : Bon alors.

B3 : 2 et 3 et leurs carrés aussi, non j'suis désolé hein. Leurs carrés sont forcément premiers.

B1 : Pas forcément mais bon.

B3 : Vas-y trouve-moi un exemple, trouve-moi un contre-exemple ! Franchement j't'assure.

B1 : Espèce de sale gosse (rires) … Non Ouais si il a raison. (Rires). Ben si c'est normal. Non il a raison hein, par contre l'inverse, la réciproque elle est sûrement fausse.

B3 : Ouais ben oui, j'pense, je sais pas. J'en sais rien en fait.

B2 : Madame ?

B1 : Mais arrête ! On avait trouvé j'en ai marre !

B2 : Non mais non mais c'est peut-être possible mais moi j'suis pas sûre.

[Groupe B, Episode 12]

Encore une fois, c'est B2 qui soulève ce point critique de leur raisonnement. La réponse de B1 est difficilement compréhensible, vu que le fait que A soit pair est le premier pas de la preuve. Cette situation n'est pas sans rappeler ses errements de l'épisode 10 quand il essayait d'utiliser le théorème de Gauss. B3, lui, considère cette implication comme évidente. B2 cherche un contre-exemple mais n'en trouve pas. B1 se range à l'avis de B3 tout en concédant que la réciproque, elle, est sûrement fausse. Il supporte mal visiblement ce qu'il considère comme un retour en arrière. Mais on voit B2 rester dans le doute malgré ses protestations et elle finit par faire appel à l'enseignante.

Il est à souligner que les élèves sont convaincus qu'un exemple ne suffit pas et qu'il est accordé au contre-exemple un rôle conforme à la rationalité mathématique. De plus, la distinction avec la réciproque est faite spontanément.

Episode 13

Dans cet épisode, comme nous l'avons indiqué dans l'itinéraire, l'enseignante répond à la question de B2 en proposant deux pistes : le théorème de Gauss et la décomposition en facteurs premiers qu'elle les aide à développer, en particulier la première. Elle redit également qu'en fait ce résultat ne sert pas vraiment ici. Nous avons choisi de zoomer sur l'échange qui suit le départ de l'enseignante où l'élève B2 revient immédiatement sur l'utilisation dans leur preuve du fait que A et B sont premiers entre eux :

Extrait 21

B2 : Ouais mais y'a un truc qui va pas.

--

B2 : Y'a un truc qui va pas.

B3 : Quoi ?

B2 : Pourquoi B/b il serait impair ? Fin pourquoi j'veux dire.

B1 : Parce que si ils sont premiers entre eux , y'en a forcément un. Ils ne peuvent pas être de même parité.

B2 : Oui mais on a besoin de ça. Pourquoi elle dit qu'on a pas besoin ?

B1 : Bon tu vois la fenêtre là ?

B3 : Tu sautes.

B1 : Non tu m'énerves.(en rigolant).

--

B2 : Pourquoi on a pas besoin je comprends pas. Il faut que a et b soient premiers entre eux pour que grand a et grand b soient premiers entre eux pour voir que B/b il est impair.

P Non !

B2 : Ben si pour voir que B/b il est impair.

P Ben c'est petit a et petit b qui sont premiers entre eux a priori puisque ta fraction est irréductible au départ.

B1 : En plus voilà.

P Donc tu le sais au départ. En fait le raisonnement il faut le faire, vous l'avez fait, regarde c'est joli c'que vous avez écrit vous avez fait un raisonnement sur petit a et petit b vous n'avez pas fait un raisonnement sur grand a et grand b.

B2 : Ben on a commencé pour, on a du dire que A/a était pair, grand A il était pair.

P Grand a est pair donc petit a^2 est pair.

B2 : Petit a et petit b ils sont premiers entre eux.

P Oui.

B2 : Donc il est impair forcément.

P Mais regarde tes raisonnements c'est bien sur a et b que tu les fais.

B2 : Oui, d'accord mais c'est pas comme ça que je voulais l'écrire.

P C'est sur petit a et petit b que tu raisonnes en fait. Grand a et grand b c'est des notations, que tu peux trouver commodes, mais c'est quand même sur petit a et petit b que tu raisonnes.

[Groupe B, Episode 13]

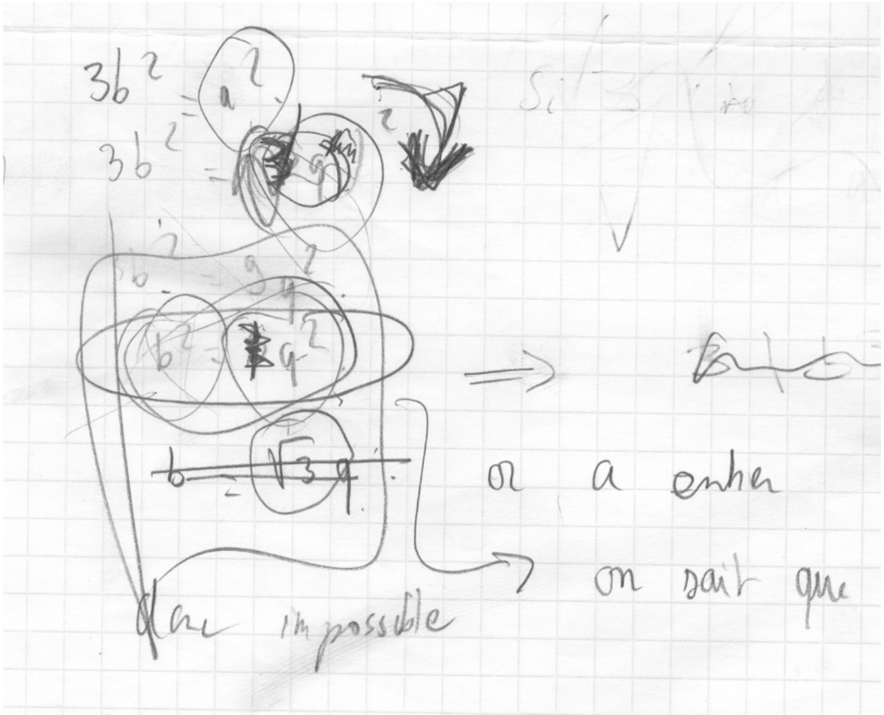
B2 continue donc à se poser des questions, non cette fois sur la validité de l'implication mais sur ce qui fait dire à l'enseignante que c'est inutile alors que pour elle c'est un élément central puisque c'est des deux propriétés A est pair d'une part, A et B sont premiers entre eux d'autre part, qu'ils ont déduit B impair et donc b impair, ce qui les conduit à une contradiction. L'enseignante n'a visiblement pas reconstitué à partir de ce qu'ils lui ont donné à voir de leur travail cette partie du raisonnement et ne voit donc pas le rôle que jouent A et B qu'elle perçoit comme de simples notations dans le raisonnement. Elle se situe donc dans un raisonnement en termes de pair / impair qui à partir du moment où l'on admet que si A est pair, a l'est aussi, peut se passer de cet intermédiaire. En effet, a et b étant premiers entre eux par hypothèse, b est impair et le jeu d'écriture faisant intervenir a et b montre que ceci est impossible. D'où le malentendu dans la communication entre enseignante et élèves.

Nous comprenons que c'est lors de cet échange que l'élève B2 fait l'adaptation conduisant à la preuve écrite. Dans celle-ci en effet, le raisonnement a été réorienté sur les entiers eux-mêmes : leur preuve n'utilise plus le caractère premiers entre eux du couple (A ; B).

II.3.2.2 Etude de l'irrationalité de $\sqrt{3}$

Episode 14

Avec l'épisode 14 commence le travail sur $\sqrt{3}$. La partie du brouillon de l'élève B1 où apparaît la preuve qu'il propose à l'enseignante est la suivante :



De façon évidente, et tout à fait implicitement, l'élève B1 utilise pour écrire la deuxième égalité le fait que a est multiple de 3 en l'ayant visiblement directement traduit de façon opératoire par a=3q. Et, comme cela s'était produit suite à une intervention de l'enseignante lors de l'étude de $\sqrt{2}$ (épisode 9), le passage du carré à l'objet suscite la réintroduction de l'objet racine. Mais cette fois contrairement à ce qui s'était passé dans l'épisode 9, la réapparition de la racine carrée n'est pas vue comme un obstacle au raisonnement. B1 dit : « Sauf que là je suis bloqué » mais très vite reprend : « Ah ben non ». L'argument qui est alors avancé est que q étant un entier, $\sqrt{3}$ ne peut être un entier, comme le précise bien B1 à la fin de l'extrait 22 suivant. En fait comme il dit et, sur son brouillon, écrit a à la place de b (c'est b qui est égal à q$\sqrt{3}$ et c'est bien cette expression qui est entourée), son raisonnement est au départ difficile à suivre pour le lecteur. Le groupe passe à la rédaction mais cette fois-ci c'est B3 qui aimerait qu'ils vérifient avant. B1 cependant, sûr de lui, appelle l'enseignante et l'échange correspond à l'extrait 25 que nous avons sélectionné.

L'enseignante, en fait, elle, va s'intéresser à un passage antérieur de la preuve : le passage de la première ligne à la deuxième ligne (rappelons qu'elle souhaite voir ce passage cette fois démontré):

<u>Extrait 22</u>

P *[…] Donc là par exemple quand tu passes de là à là il y a quelque chose à dire ? Pourquoi tu écris ça ?*

--

B1 : Ben comme euh. Théorème de Gauss voilà.

P *Voilà ben tu me le dis clairement comment tu l'emploies.*

B1 : Ben 3 et a ils sont /

P *3 quoi ?*

B1 : 3 ne divise pas a. donc…

B3 : Ben oui.

B1 : Là c'est 3 qui divise pas a donc ils sont premiers entre eux.

P *Alors si 3 ne. Hein, donc tu l'écris y'a quelque chose à écrire pour passer de là à là, que tu viens de me commencer, mais je veux que ce soit écrit, et puis après quand tu passes là tu arrives à ça, tu en déduis quoi ?*

--

P *Pour passer de là à là tu vas me faire ton raisonnement, tu m'as dit c'est le théorème de Gauss. Alors tu me le l'écris. Une fois que tu arrives là, qu'est-ce qui fait que c'est impossible ?*

B1 : Eh ben euh.

P *Ca veut rien dire ? !*

B1 : Ben 3 fois/

P *Alors, alors tu vas obtenir quoi là ?*

B1 : Ben 3 ne divise pas a^2…Là je vois pas quoi (rires)

P *Alors il faut pas que tu bloques, il faut que tu me l'écrives correctement.*

B1 : J'pouvais pas faire ça ?

P *Non ! C'est pas du. Si tu veux adapter ton raisonnement tu vois bien que. Dès que tu passes aux racines tu peux plus, si tu veux travailler sur les entiers, il va bien falloir que tu travailles sur des entiers, par sur racine de 3, racine de 3 tu te demandes ce que c'est.*

B1 : Ben si a il est pas entier, c'est terminé non ?

P *Je vois pas pourquoi ça prouverait que a n'est pas un entier ça.*

B1 : Parce que q il est forcément entier, racine de 3 fois q c'est pas un entier.

[Groupe B, Episode 14]

Ayant à produire une justification, on voit de nouveau B1 se tourner vers le théorème de Gauss mais, une fois de plus, il n'arrive pas à s'en sortir et à adapter par exemple le raisonnement mené avec l'aide de l'enseignante dans l'épisode 13 quand il s'est agi d'utiliser le théorème de Gauss pour prouver que si p premier divise a^2, alors il divise forcément a. La confusion de l'ensemble de la réponse montre selon nous que le théorème de Gauss n'est cité par B1 que parce que ce dernier pense ainsi satisfaire l'attente de l'enseignante. N'aboutissant pas, il revient à sa solution et c'est face aux réticences de l'enseignante, explicite le raisonnement qui conduit à la contradiction trouvée, un raisonnement qui semble nous ramener aux tous premiers épisodes de la recherche.

Episode 15

La situation ne se clarifie guère dans cet épisode, comme nous l'avons indiqué dans l'itinéraire, peut-être faut-il voir là aussi l'effet d'une certaine lassitude. Les élèves essaient de démontrer l'étape opératoire manquante, en réponse à la demande de l'enseignant. C'est un long épisode où nous avons sélectionné deux extraits qui montrent bien les difficultés rencontrées par les élèves.

Extrait 23

B2 : Alors pourquoi t'as écrit que $3b^2$ égal a^2 ? Ah d'accord.

--

B2 : Pourquoi t'es passé…si 3/

B3 : Ben si 3 divise a/

B1 : Il divise pas.

B3 : Non il divise pas a.

--

B2 : Oui.

B1 : Bon on continue. Tac, tac, ça.

B2 : Non si il divise pas a, ça veut dire que 3 et a^2 ils sont premiers entre eux. Puis a et b ils sont pas premiers entre eux.

B1 : Qu'est ce qu'elle raconte elle ?

B2 : C'est quoi le théorème de Gauss ? Tu le connais ?

B1 : Ben oui ! J'viens de te le citer.

B2 : Non, c'est pas bon ce que t'as dit.

--

B1 : Bon toi madame qui doute tout le temps y'en a marre maintenant.

B2 : Non vas-y j'te dis c'est pas ça.

B1 : Parce que a il est premier donc que ça divise pas/

B : Ben vas-y toi, si c'est pas ça.

B : Ouais si t'es si maligne.

B2 :	Regarde, t'imagines que si 3 il divise pas a, donc tu me dis que si 3 il divise pas a, alors b et a ils sont premiers entre eux.
B1 :	Oui bon j'ai oublié car 3 est premier OK ? Voilà c'est terminé maintenant.
B2 :	Non si ça et ça, si 3 et a sont premiers entre eux alors a² divise b².
B1 :	Ouais plutôt.
B2 :	C'est ça le théorème de Gauss.
--	
B2 :	Or, or quoi ben or, a et b ils sont premiers entre eux.
B1 :	Voilà alors ça s'écrit 3q. Donc 3 divise a.
	[Groupe B, Episode 15]

Comme on le voit, c'est encore une fois le théorème de Gauss qui est sollicité et le rapport de B1 et B3 avec ce théorème est toujours aussi flou. C'est en fait B2 qui conduit l'échange, en proposant un raisonnement, sous une forme assez elliptique, il faut l'avouer, ce qui ne facilite pas la compréhension de B1 et B3. Ce raisonnement est le suivant : il est supposé par l'absurde que 3 ne divise pas a et, 3 étant premier, cela signifie que ces deux entiers sont premiers entre eux donc que a^2 et 3 le sont aussi ; à partir de l'égalité $3b^2=a^2$, la conclusion est que a^2 divise b^2 en utilisant le théorème de Gauss, ce qui est impossible puisque a et b sont premiers entre eux. On notera qu'il ne s'agit en rien de l'adaptation de la démonstration faite avec l'aide de l'enseignante à l'épisode 13. En effet, cette adaptation aurait conduit au raisonnement suivant, déjà rencontré dans l'analyse du groupe A : si 3 ne divise pas a, étant premier, il est premier avec a ; or 3 divise $a^2=axa$, donc d'après le théorème de Gauss, 3 divise a. On retrouve donc le sens de lecture inhabituel en termes de divisibilité de l'égalité $3b^2=a^2$ qui était apparu spontanément dans le groupe A, avec perte de l'information (a^2 divise le produit $3b^2$).

On peut penser à ce moment là que tout est terminé et que les élèves vont pouvoir avancer dans leur preuve. C'est ce qui se produit dans un premier temps. Les élèves reprennent la notation $a=3q$ et arrivent à $b^2=3q^2$. B1 pense alors avoir terminé car b ne peut pas s'écrire 3q puisque a et b sont premiers entre eux. L'échange, à ce moment, concerne B1 et B3. On voit qu'il y a ici un glissement de l'écriture $b^2=3q^2$ à l'écriture $b=3q$. Bien sûr ce glissement pourrait être justifié sur la base du travail déjà effectué, à condition de remplacer q par q', par une lecture en terme de divisibilité : 3 premier divise b^2, donc il divise b et b peut donc s'écrire 3q', ou en reprenant le raisonnement fait à partir de l'écriture $3b^2=a^2$, juste avant. Mais on ne peut être sûr ici qu'il ne s'agit pas d'un glissement plus formel de la part de B1, comme celui qui peut-être lui a permis de passer aussi rapidement de la succession : $2b^2=a^2$, $a=2q$, $2b^2=4q^2$à la succession : $3b^2=a^2$, $3b^2=9q^2$ au début de l'épisode 14. On peut se demander si ceci ne va pas poser problème, vu la vigilance de B2, dans le passage à l'écrit qui débute alors.

Etonnamment, B2 commence par demander si c'est a ou a^2 qui s'écrit 3q, question à laquelle, tout aussi étrangement, B1 répond que c'est a^2, avant de revenir à l'écriture $b^2=3q^2$ et, à la fin du raisonnement qu'il explique de façon assez peu claire, B2, comme l'on pouvait s'y attendre, demande des éclaircissements. Un quiproquo va s'installer car B2 part, pour vérifier les calculs de $a^2=3q$ et donc bien sûr ne trouve pas comme B1. Finalement la situation s'éclaircit avec le passage de l'enseignante et l'on revient à a=3q.

Mais une fois de plus, B2 va remettre cette écriture en cause, comme le montre l'extrait suivant :

<u>Extrait 24</u>

B3 : Ok ben là on a, on a à peu près sauf que là c'est $3q^2$ non ? puisque que c'est du a^2. C'est $3q^2$, ça fait $9q^2$. Pourquoi t'as, t'as… $3b^2$ égal $9q^2$, c'est bien ça c'est bien là où on est. Regarde B2. Jusque là tout est bon, c'est juste là en fait. C'est $3b^2$ il va être égal à $9q^2$.

B2 : Non non non non mais c'est ça là, c'est ça là qu'est pas bon. Parce que regarde.

B3 : Où ça ?

B2 : Si 3 ne divise pas a^2 alors a^2 divise b^2 d'accord ça c'est le théorème de Gauss.

B3 : Mm.

B2 : Or a et b ils sont premiers entre eux, d'accord, donc 3 il divise a^2, c'est le théorème de Gauss ça.

B3 : Ouais.(timidement).

B2 : D'accord ?

B3 : Ouais.

B2 : Donc si 3 il divise a^2 ça veut dire que a, que a^2 il s'écrit comment ?

B3 : B1.

B3 : Mm ?

B2 : C'est ça. Tu vois c'est pour ça.

B1 : Ah y'en a marre.

B3 : Ah ouais parce que ah oui.

--

B3 : Ouais ben euh.

B2 : Donc, écris, écrivez le théorème de Gauss parce que si ça se trouve c'est moi qui l'ai mal écrit.

[Groupe B, Episode 15]

B2 repart sur le théorème de Gauss mais cette fois en ne faisant pas le passage de a à a^2 qui avait marqué le début de la première utilisation qu'elle avait elle-même produit. D'où la conclusion : 3 divise a^2 qui s'impose à elle comme la seule conclusion que l'on puisse obtenir en appliquant le théorème de Gauss à l'égalité. Les deux autres élèves ne voient rien à opposer à ce raisonnement et le découragement semble proche. L'enseignante doit le sentir car elle leur suggère d'arrêter de chercher à justifier le passage de $3b^2=a^2$ à $3b^2=9q^2$ pour avancer à partir de cette deuxième égalité qui se retrouve donc une fois de plus validée. B1 et surtout B3 semblent prêts à poursuivre dans la voie indiquée par l'enseignante mais B2 qu'ils ont chargée de la rédaction a plus de mal à abandonner. L'égalité $b^2=3q^2$ semble retrouvée par B3 par simplification, mais l'égalité $a^2=3q^2$ surgit alors étrangement et les discussions recommencent.

Episode 16

L'extrait 25 informe dans quelles mesures la recherche est réinitialisée par l'élève B1 dans l'épisode 16 :

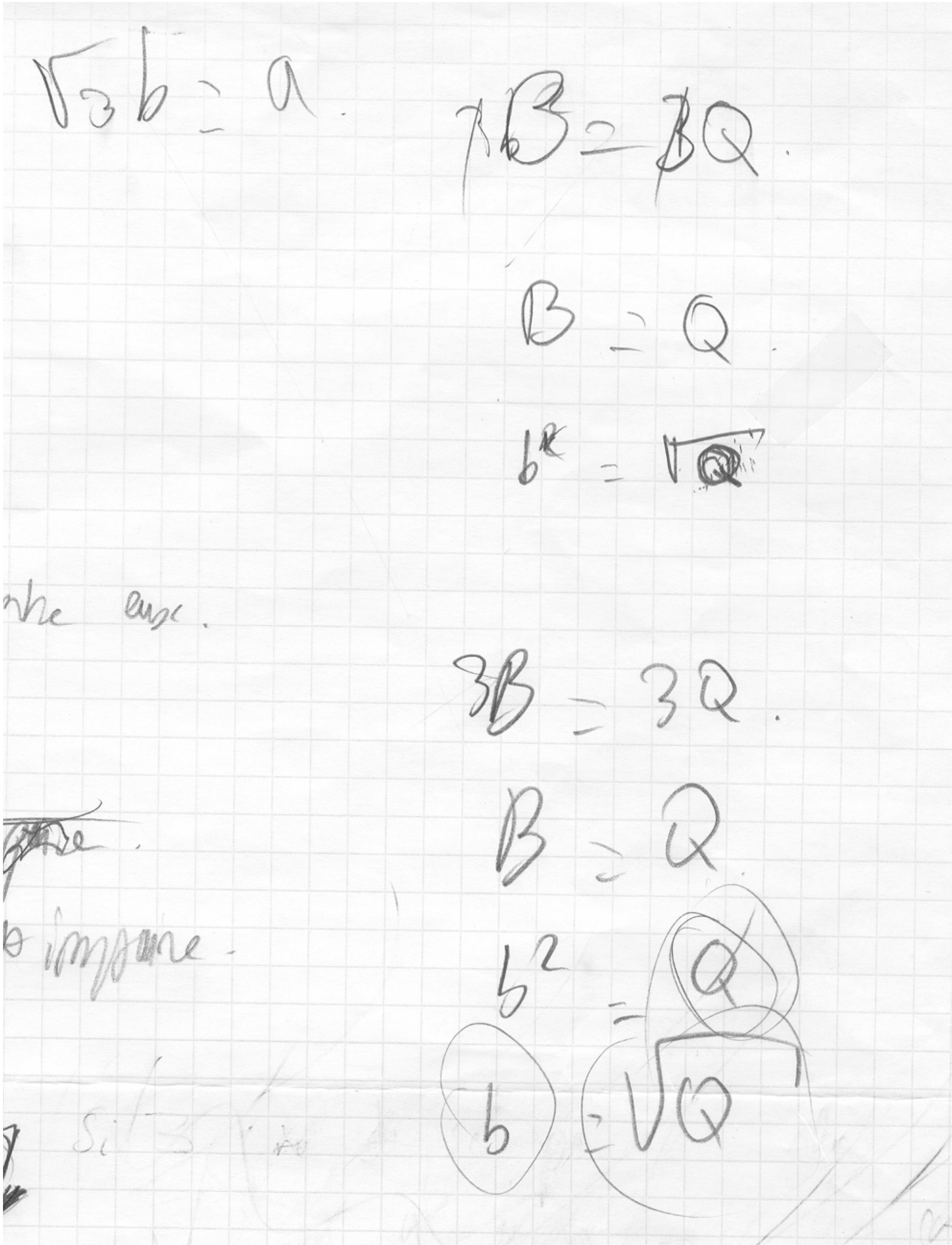
Extrait 25

B3 : Alors le diviseur commun ça peut pas être 3.
B1 : Oui j'ai compris ce que tu voulais dire.
B3 : Leur diviseur commun ça peut pas être 3.
B1 : Oui je sais.
--
B1 : Ouais mais à ce moment là ici c'est faux.
B3 : Pourquoi ici c'est faux ?
B1 : Parce qu'à ce moment là y'a plus de 3 ici.
--
B3 : Attends là t'es à $3b^2$ égal $9q^2$.
B1 : Y'a pas du 9q normalement y'a que 3.
B3 : Ah…Et c'est là que t'as sauté une étape.
B1 : Ouais.

[Groupe B, Episode 16]

Comme cela sera confirmé avec les zooms opérés dans l'épisode suivant, les élèves prennent en compte dans leur raisonnement, de même que cela a été localement fait dans leur preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, le caractère irréductible de la fraction initiale : a et b étant premiers entre eux, en admettant que 3 divise a, 3 ne peut être un diviseur de b. Mais, au lieu d'en conclure qu'ils aboutissent à une contradiction, ayant sans doute perdu au fil des discussions la visée de leur raisonnement, ils n'arrivent pas à s'en sortir. B1 pense qu'une erreur a été commise. I et il va s'arranger, par un changement de notation, en introduisant B et Q pour que b n'apparaisse pas comme étant multiple de 3.

Le brouillon de l'élève B1 et l'extrait 25 montrent cette transformation et précisent les éléments de preuve développés ensuite par cet élève :



$\sqrt{3}b = a.$

$\cancel{\sqrt{3}}B = \cancel{\sqrt{3}}Q.$

$B = Q.$

$b^2 = \sqrt{Q}$

...nhe eux.

$3B = 3Q.$

$B = Q$

$b^2 = Q$

$b = \sqrt{Q}$

...impaire.

<u>Extrait 26</u>

B1 : C’est forcément entier. Ca ça doit être entier ? Ca veut dire que ça, racine de <u>Q</u>/q, ça c’est.

B3 : Pas forcément non.

B1 : Attends ah ben non.

B3 : Non justement.

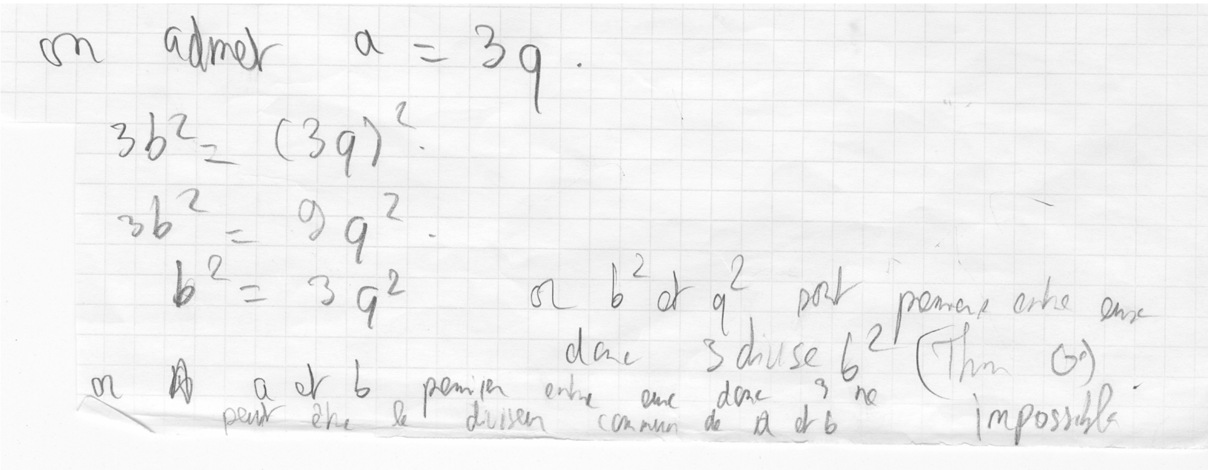
[Groupe B, Episode 16]

L’élève B1 visiblement a réinvesti l’idée d’utiliser des notations spécifiques aux carrés qu’ils avaient utilisée pour l’étude de $\sqrt{2}$, à l’initiative de l’élève B2. La lettre B introduite correspond sans aucun doute à b^2. Pour la lettre Q, les choses sont moins claires mais on peut penser qu’il a cherché à exprimer le caractère multiple de 3 de l’entier A, le carré de a.

Comme cela s’est déjà produit, le passage du carré à l’entier suscite la réintroduction de l’objet racine et une argumentation déjà maintes fois rencontrée portant sur la nature des nombres en jeu. Le doute de l’élève B3 puis l’intervention de l’enseignante arrêtent cette voie. L’enseignante leur demande la structure du raisonnement, un raisonnement que d’après elle ils avaient fait devant elle, sans s’occuper du passage qu’elle qualifie de technique du début.

$\boxed{\text{Episode 17}}$

La situation se débloque enfin et le brouillon de l’élève B1 à partir duquel l’élève B2 rédige la suite de leur preuve de l’irrationalité de $\sqrt{3}$ est le suivant :


on admet $a = 3q$.
$3b^2 = (3q)^2$.
$3b^2 = 9q^2$.
$b^2 = 3q^2$ or b^2 et q^2 sont premiers entre eux
donc 3 divise b^2 (Thm G)
or ~~A~~ a et b premiers entre eux donc 3 ne peut être le diviseur commun de a et b impossible

L'élève B3 reprend le raisonnement à haute voix :

<u>Extrait 27</u>

B3 : 3b² égal a² donc euh…

--

B2 : Qu'est ce qu'on avait fait après ? Comment c'est qu'on fait ça maintenant ?

B3 : Ben une fois qu'on est arrivé là, on a dit qu'euh, qu'est-ce qu'on avait fait ? Ben on a dit que a est égal à 3q. b² et q² sont forcément, sont premiers entre eux.

--

B3 : Or, bon comme b² et q² sont premiers entre eux, 3 divise b² tout à fait, or, donc leur diviseur commun ne peut pas être 3 c'est ça ? 3.

--

B3 : 3 ne peut être un diviseur commun …

--

B3 : Ben voilà.

[Groupe B, Episode 17]

Cet échange montre une fois de plus le rapport problématique de ces élèves au théorème de Gauss. Sous l'hypothèse que b² et q² sont premiers entre eux, le théorème de Gauss privilégie un sens de lecture en termes de divisibilité qui conduirait à la conclusion que b² divise 3 et non l'inverse ici énoncé qui se « lit » directement sur l'égalité $b^2=3q^2$.

Un peu plus tard, dans cet épisode, l'élève B2 interroge très légitimement l'élève B1 au sujet de sa première affirmation : « b² et q² sont premiers entre eux » :

<u>Extrait 28</u>

B2 : Mais pourquoi b² et q² ils sont premiers entre eux ?

B3 : Ben ça c'est euh/

B1 : Parce que 3 peut pas diviser b.

B2 : Pourquoi ?

B3 : Ben ça justement c'est ce qu'on a admis. Ca fait partie de la première partie qu'on a pas expliquée.

[Groupe B, Episode 17]

On le voit, la justification n'est pas celle à laquelle on pouvait s'attendre : parce que a et b sont premiers entre eux, donc b et q aussi et b^2 et q^2 aussi. La justification apportée par l'élève B1 à l'élève B2 rejoint ce qui est apparu dans l'analyse de l'épisode précédent : a et b étant premiers eux, 3 ne peut être un diviseur de b s'il est déjà diviseur de a. Elle reprend en fait ce qui correspond à la dernière étape de leur justification et ne répond en rien à la question posée. B2 ne proteste pas et la rédaction est enfin achevée.

II.3.2.3 Comparaison de leur preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ avec trois preuves données

Episode 19

Avec l'épisode 19, c'est la comparaison des preuves qui débute. L'extrait 28 donné ci-après rend compte de la recherche de ressemblances et différences par les élèves entre leur preuve et les trois fournies ; la façon dont cette recherche est menée nous a conduite à délimiter cet extrait en intégrant quasiment toute la transcription de l'épisode 19 :

Extrait 29

B1 : Nous *inaudible*
B2 : Nous on a la 1 aussi, parce qu'on a supposé ça.
B3 : Alors laquelle on a ?
B2 : On s'est arrêté, nous on a ça pareil.
--
B2 : ça non c'est pas pareil.
--
B1 : Nous on a la 2.
--
B3 : Ouais c'est c'qu'on a fait à peu près.
--
B1 : J'pense qu'on a la 2, on a montré que a et b sont pairs alors qu'ils sont pas censés l'être.
B2 : Ouais.
B1 : Donc on a la 2.
B3 : Où tu vois qu'ils montrent que c'est pair par contre. Ah ouais montrons que.
B1 : Donc on a la 2.
B3 : Sauf qu'eux ils utilisent/
B2 : Eh nous on n'a pas parlé d'ensemble.
B3 : Non on n'a pas, on n'a pas.
B1 : On a montré que c'était pair ça revient au même.

B2 :	Alors ça on a pareil, ça on a pareil là on est parti de là.
--	
B3 :	Ah eux ils ont carrément…ah ils avaient pas pensé aux congruences en fait.
--	
B2 :	Là on a fait la parité de ça sauf qu'on a pas utilisé les congruences.
--	
B1 :	On a soit la 1 soit la 2…
B2 :	Ouais c'est tout, on a.
B1 :	En fait on a fait un petit mixte des deux.
B3 :	Ouais un mixte des trois en fait.
B2 :	Non des deux. Parce que la 3 j'vois pas…
B3 :	Un peu quand même parce qu'on est passé par les carrés.
B1 :	Ils passent toutes par des carrés.
B3 :	Ben oui donc y'a un petit peu des trois aussi.
B1 :	Ben non *inaudible*
B2 :	Non parce qu'on s'est pas servi d'exposant.
B3 :	Ouais c'est vrai aussi.
B1 :	Donc on est dans la 1 ou la 2.
B3 :	Ok.
--	
B1 :	Mais je crois qu'on a la 2.
B2 :	Mm.
B3 :	La 2 je pense aussi parce que…ah mais quoique si dans la 1ère aussi ils montrent que a et b sont pairs…Attends.
B1 :	Faut les relire calmement sans se prendre la tête.
--	
B3 :	Moi je verrais plus la 1 quand même que la 2.
B2 :	*inaudible*
(à P)	
P :	*Vous me, sur la feuille que vous me rendrez. A compléter.*
B3 :	On aura pas le temps, il reste plus que 5 minutes.
--	
B1 :	Ben dans la 2, ça j'en suis sûr.
B3 :	Ben pourquoi dans la 2 ?
B1 :	Parce qu'on prouve que les deux, les deux ils sont impairs.
B3 :	Ben là aussi, ah oui mais là on trouve que a et b sont pairs.
B2 :	Se rapproche hein je dis qu'elle se rapproche.

B3 :	Notre démonstration elle se rapproche comme de la 1 comme de la 2.
B1 :	Beaucoup plus de la 2, parce que nous à la fin je pense pas qu'on ait *inaudible*, on n'a pas parlé de suite non plus d'ailleurs.
B3 :	On n'a pas parlé de suite ouais mais euh, on n'a pas parlé non plus d'ensemble d'entiers naturels, et euh d'ensemble vide. Un plus petit élément que l'on. On a pas parlé de a0. Ah si on a fait grand a et grand b mais.
B2 :	Se rapproche de la 2. Car euh/
B3 :	Car déjà on a. Tu l'as toujours la feuille ?
B1 :	On l'a fait par l'absurde. On est d'accord.
B2 :	Oui on l'a fait par l'absurde.
B1 :	Donc c'est la 2.
B2 :	Oui mais supposons par l'absurde, c'est pareil…
--	
B1 :	On l'a fait par l'absurde.
B2 :	Oui d'accord mais euh pourquoi/
B1 :	Tu dis que c'est une preuve par l'absurde.
B2 :	Car on a montré la parité.
B3 :	On a montré la parité.
B1 :	C'est un truc par l'absurde et puis c'est tout.
--	
B3 :	Par contre un truc qu'on n'a pas utilisé c'est les congruences.
B2 :	Ouais.
B3 :	Et puis on n'a pas utilisé de a_0 et b_0.
B2 :	Non, c'est pas grave.
	[Groupe B, Episode 19]

L'élève B1 semble vouloir traiter cette tâche au plus vite et se montre assez autoritaire. Dès le départ, il associe leur preuve à la preuve 2 sans argumenter puis en reconnaissant une idée commune : celle consistant à montrer que a et b sont pairs pour arriver à une impossibilité. La reconnaissance se situe donc plutôt au niveau de la structure du raisonnement, de sa visée globale. Mais, comme font remarquer les autres élèves, les démonstrations diffèrent substantiellement au niveau des instruments utilisés pour satisfaire cette visée globale. Ceci conduit aussi à admettre une certaine proximité avec la preuve 1 où l'on montre aussi la parité de a et de b. Une certaine communauté en vient même à être vue avec la preuve 3 parce que, effectivement, toutes les trois comportent le passage au carré qui permet de ramener le traitement du problème dans le champ de l'arithmétique. Mais visiblement pour les élèves, cette proximité là est insuffisante. Pour trancher entre la preuve 1 et la preuve 2, l'argumentation est plus complexe et différents arguments apparaissent : le fait qu'ils n'aient pas utilisé de suites conduit à rejeter la preuve 2 mais, de la même façon, le fait de ne pas avoir utilisé d'ensembles conduit à rejeter la 2. Un moment l'introduction de notations nouvelles indépendamment de leur signification est un argument utilisé au bénéfice de la preuve 2 mais, finalement, ce qui emporte l'adhésion, c'est l'argument de B1 qu'ils ont raisonné par l'absurde. On retrouve là l'argument qui a aussi été déterminant pour le groupe A et, comme pour ce groupe, le fait que l'expression par l'absurde soit explicité, n'est sans doute pas neutre dans l'identification de cette communauté de méthode de raisonnement.

Il y a donc, tout au long de cet épisode, une recherche des élèves qui met en jeu différents critères, qui pèse le pour et le contre, aucune démonstration n'étant suffisamment proche, pour finalement privilégier la dimension organisatrice.

II.3.2.4 Production de preuves de l'irrationalité de $\sqrt{3}$ à partir de preuves données

Episode 20

Pour ce dernier épisode, il est intéressant d'étudier l'évolution dans la recherche des élèves du lien entre les notions de nombres pair et impair et celle de nombre divisible par 3. C'est ce que nous permettent les épisodes choisis.

Dans un premier temps, l'élève B3 n'identifie aucun lien :

Extrait 30

B3 : Mais c'est pas les mêmes toute manière pour racine de 3, parce qu'on montre pas que a et b sont pairs. On utilise pas ça.

--

B3 : C'est un problème de divisibilité.

B2 : Donc alors on fait la première.

B3 : Racine de 3.

B2 : preuve 1 pour racine de 3.

B3 : Mais ça marche pas, ça marchera jamais…Puisque c'est un problème de divisibilité donc c'est pas montrons que a et b sont pairs, c'est un problème de divisibilité pour racine de 3 on a pas du tout fait de la même manière.

[Groupe B, Episode 20]

Comme on le voit dans cet extrait, au départ, il y a l'affirmation d'une impossibilité, liée au fait que la distinction pair, impair n'est pas vue comme une distinction basée sur la divisibilité. On retrouve le fait déjà observé de la non disponibilité de l'association : pair/ impair à multiple de 2/ non multiple de 2, que l'on avait précédemment repérée à travers la non spontanéité de l'association : a pair et a multiple de 2. On avait bien vu dans les deux groupes qu'il s'agissait là, au sens de A. Robert d'une connaissance mobilisable sur une intervention de l'enseignante mais non disponible. Ici le phénomène va en quelque sorte plus loin : ce n'est pas une traduction opératoire qui est en jeu, c'est la catégorisation même du problème.

Ensuite, l'élève B1 associe la notion de nombre impair au cas de $\sqrt{3}$ en opposition à celle de nombre pair qui renvoie à l'étude de $\sqrt{2}$:

<u>Extrait 31</u>

B3 : Mais ils montrent pas que a et b sont pairs c'est ça qui me, qui me trouble.

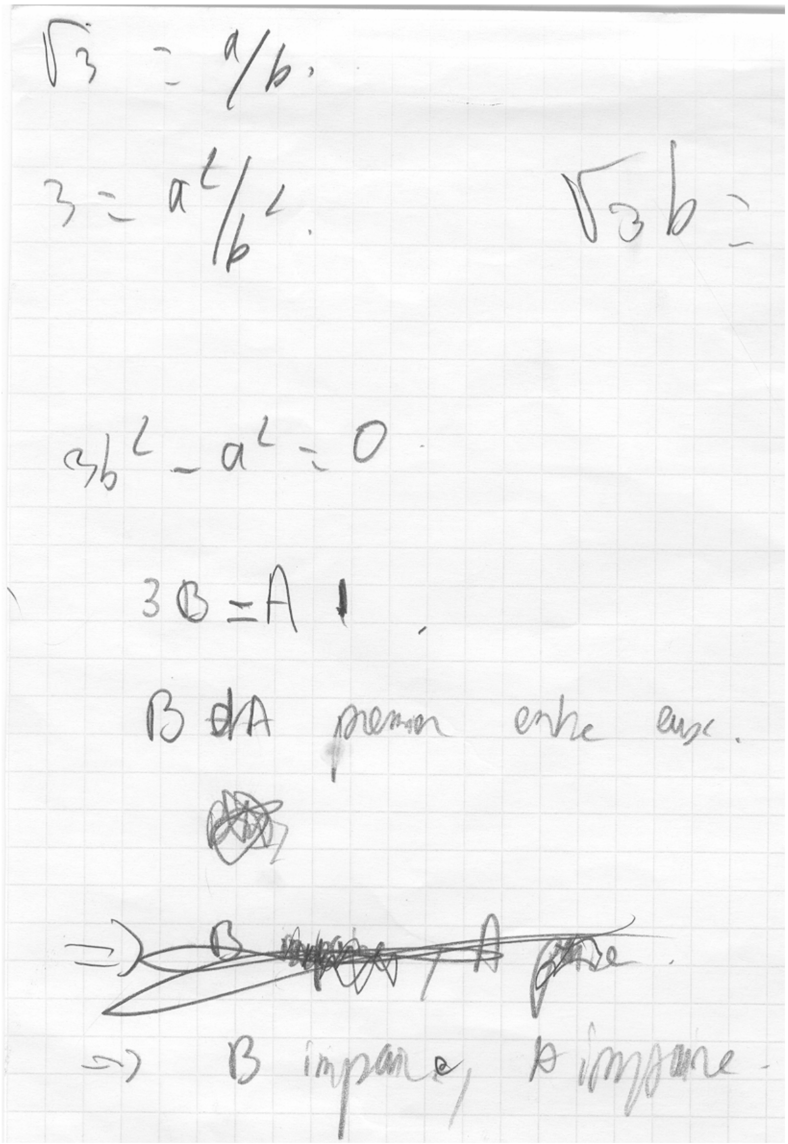
B1 : Normal les deux ils sont impairs.

B3 : Ah ben oui, c'est assez logique ouais.

B1 : Donc on fait comme si les deux ils étaient impairs et puis c'est tout.

[Groupe B, Episode 20]

L'extrait de son brouillon correspondant au début de la recherche relative à $\sqrt{3}$ confirme cette association.



C'est l'élève B2, qui va identifier la première à la fin de ce court épisode le travail d'adaptation à faire, en l'exprimant très clairement dans le langage des congruences qui était présent, rappelons-le, dans l'aide qu'ils ont reçue :

<u>Extrait 32</u>

B1 : Ben le problème c'est que je pense pas qu'on puisse transposer le truc aussi facilement.

B3 : Ben c'est ça qui me paraît, puis en plus/

B2 : Ben sauf que tu mets a² est égal à 0 modulo 3 comme on a montré tout à l'heure.

[Groupe B, Episode 20]

B1 a son tour, va comprendre le problème, peu de temps avant que la sonnerie indiquant la fin de l'ensemble de la recherche ne retentisse, en utilisant lui le langage de la divisibilité et, en explicitant, ce que n'avait pas fait B2 l'association entre parité et divisibilité par 2 :

Extrait 32

B1 : Faut pas montrer qu'ils sont pairs faut montrer qu'ils sont divisibles par 3.

[…]

B1 : Parce qu'en fait tu vois là y'a une grosse connerie là, en fait c'est pair c'est divisible par 2. Là ça devient nettement plus clair. Donc en fait c'est ça faut montrer que a et b sont divisibles par 3. Voilà !

[Groupe B, Episode 20]

Nous proposons maintenant à présent une synthèse de cette expérimentation en considérant simultanément les groupes A et B.

III. SYNTHESE

Dans le cadre de l'étude écologique menée dans la partie 2, ce chapitre et le précédent rendent compte de la phase de notre recherche où s'est organisée la confrontation avec la contingence didactique de la classe. Comme nous le précisions en introduction, la spécificité de ce chapitre par rapport au précédent se situe à deux niveaux. Tout d'abord, l'expérimentation menée définit un espace d'observation beaucoup moins contraint institutionnellement que celui envisagé dans le chapitre 7 à travers l'épreuve d'entraînement au baccalauréat et l'expérimentation a été de plus construite de façon à pouvoir étudier le rapport d'élèves de TS à la rationalité mathématique dans des conditions qui se situent un peu aux limites de la culture d'enseignement concernée. Ensuite, nous ne nous intéressons plus seulement à un produit fini : des productions écrites d'élèves, mais aussi au processus de production lui-même.

Pour chacun des deux groupes étudiés, nous avons, après avoir analysé la production écrite remise à l'enseignante à la fin des deux heures de recherche, précisé l'itinéraire suivi. Puis, dans un troisième temps, nous avons procédé à des « zooms » localisés à partir de l'analyse des éléments mentionnés précédemment. Que retenir de l'ensemble des analyses ? C'est ce que nous allons essayer de préciser dans cette synthèse.

En premier lieu, ces analyses ont clairement mis en évidence le « fossé » existant entre la vision de la rationalité mathématique des élèves que nous fournit l'étude de l'écrit synthétisant cette séance de recherche d'une part et celle que nous fournit l'étude du processus de production de cet écrit d'autre part. Comme nous allons le préciser dans la suite, l'exemple du groupe A illustre ce décalage de manière particulièrement forte : leur production écrite qui est très bien construite et très policée dissimule une recherche effective relativement erratique dans l'étude de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$. Nous reprenons ci-après chacune des tâches en jeu : production d'une preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, passage à l'étude de $\sqrt{3}$, comparaison de leur preuve de $\sqrt{2}$ à trois preuves fournies (par descente infinie, par l'absurde et minimalité, en utilisant la structuration autour des nombres premiers), production de preuves de l'irrationalité de $\sqrt{3}$ et généralisation à partir du support des preuves fournies.

Etude de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

La preuve naturellement attendue par l'enseignante pour l'irrationalité de $\sqrt{2}$ est la preuve euclidienne classique ; cette preuve a en effet déjà été rencontrée en classe. Contrairement à l'image donnée par les productions écrites, l'étude de la recherche des élèves montre clairement que lorsque l'« écriture » de cette preuve passe sous leur responsabilité, les choses deviennent problématiques. De plus, la diversité des résolutions possibles pointée par l'analyse mathématique émerge comme nous allons le détailler.

Comme nous le prévoyions *a priori,* le texte fourni aux élèves introduit naturellement l'objet fraction dans le travail des élèves. Nous avons eu confirmation que les rationnels sont envisagés automatiquement par les élèves à travers leur représentant irréductible. Certains éléments d'analyse *a posteriori* conduisent d'ailleurs à se demander si cet automatisme n'est pas vu par certains comme une véritable obligation. Mais il faut aussi souligner que cette introduction de l'objet fraction irréductible, induite par l'énoncé et l'usage, n'est pas d'emblée associée consciemment à la mise en acte d'une visée, et en particulier d'une visée de raisonnement par l'absurde. Et l'on voit bien par ailleurs, à plusieurs reprises dans les corpus, comment, lorsque cette visée devient consciente, la conviction que se sont forgée les élèves que $\sqrt{2}$ est irrationnel, perturbe la mise en œuvre du raisonnement hypothético-déductif ici nécessaire. Celle-ci impose en effet de distinguer clairement entre la valeur épistémique de l'énoncé : « $\sqrt{2}$ est rationnel » qui est la valeur « Faux » et sa valeur logique au moment où il est engagé dans la preuve, à savoir la valeur « Vrai » qu'on lui attribue pour aboutir ensuite à une contradiction. Et ceci leur semble particulièrement difficile. On sent bien que l'entrée dans le raisonnement par l'absurde serait pour eux plus facile si un doute subsistait sur la valeur épistémique de l'énoncé, rendant l'opposition de valeurs moins flagrante.

L'élévation au carré, quant à elle, n'est pas non plus quelque chose d'automatique et ce traitement opératoire apparaît même relativement tardivement dans la recherche des élèves. La situation est cependant différente selon les groupes. Dans le groupe A, l'émergence du traitement opératoire initial ne s'inscrit pas apparemment dans le fil d'un développement mathématique ; l'idée d'élever au carré intervient initialement de façon brutale et non argumentée, telle une réminiscence. Elle est ensuite abandonnée puis reprise et ce n'est qu'après intervention de l'enseignante que le travail se stabilisera sur l'égalité associée, sans retour cette fois à l'objet racine. Au sein de ce groupe, malgré une attention évidente portée à la nature des nombres en jeu, nous avons ainsi observé l'absence d'une claire conscience du champ concerné par l'arithmétique enseignée à ce niveau. Le groupe B, quant à lui, est très vite attentif à la nécessité de travailler sur des entiers et l'élévation au carré naît véritablement de leur travail mathématique. On observe malgré tout un retour à l'objet racine suite aux interventions de l'enseignante qui propose aux élèves de déduire de l'égalité portant sur les carrés de a et b, des propriétés de ces nombres eux-mêmes, ce qui correspond au passage crucial de a^2 à a dans la preuve attendue. Il semble en effet alors naturel aux élèves de réintroduire l'objet racine pour répondre à la demande de l'enseignante qui pointe les objets et non leurs carrés. Une preuve du groupe B, sans cette intervention de l'enseignante qui n'a que partiellement connaissance de la recherche des élèves, aurait sans doute privilégié un raisonnement sur les carrés jusqu'au bout (rappelons qu'ils introduisent des notations spécifiques pour désigner les carrés), utilisant le résultat énonçant que *si deux nombres sont premiers entre eux alors il en est de même de leurs carrés* : a^2 étant pair, b^2 serait alors impair d'où une contradiction lorsque l'on traduit opératoirement le caractère pair de a. Rappelons que, pour le groupe A également, le passage de a^2 à a est suscité par l'enseignante ; sans l'intervention de cette dernière, le groupe aurait privilégié un raisonnement sur les carrés (épisode 4).

Un autre phénomène est, nous semble-t-il, frappant dans cette première phase de leur recherche : pour les deux groupes, la traduction opératoire du caractère pair d'un nombre a par l'égalité a=2q est visiblement une connaissance mobilisable mais non disponible. Dans les deux groupes, cette traduction opératoire, essentielle à la mise en œuvre du raisonnement, n'entre en effet dans le milieu que suite à une intervention de l'enseignante. Cette intervention n'a pas besoin d'être lourde comme le montre le corpus mais elle est nécessaire, Cette connaissance rendue disponible fait alors rapidement progresser la recherche des élèves et l'exemple de l'élève A1 est frappant à ce niveau.

L'analyse de la recherche des élèves relative à l'étude de $\sqrt{2}$ met enfin bien en évidence l'influence de certaines caractéristiques de la culture d'enseignement sur leur recherche et les raisonnements qui la sous-tendent. Le fait d'envisager d'emblée la fraction a/b comme irréductible en est une première manifestation qui relève de la culture numérique au sens large et non de la seule culture arithmétique, mais nous voudrions nous centrer ici sur deux objets qui sont au cœur de l'arithmétique qui est enseignée en terminale S et dont l'influence sur la recherche menée a été bien plus importante que nous ne l'avions prévu, et s'est effectuée sous des formes partiellement au moins inattendues. Il s'agit du théorème de Gauss d'une part et de la tâche emblématique de résolution d'équations diophantiennes, étudiée de manière détaillée dans le chapitres 5. Pour les deux groupes, comme cela se confirme avec l'analyse de l'étude de l'irrationalité de $\sqrt{3}$, la présence simultanée d'une égalité comportant un produit et une relation de primalité entre deux des entiers intervenant respectivement dans les deux membres de l'égalité, semble amener à un branchement quasi automatique sur le théorème de Gauss. Et ce branchement automatique tend à bloquer des interprétations de l'égalité en termes de divisibilité qui, *a priori*, pouvaient paraître plus directes et naturelles, écartant notamment les élèves des preuves attendues. Mais il faut aussi souligner que le rapport des élèves observés à ce théorème reste relativement flou ; nous reviendrons sur ce point dans la suite. Pour le groupe B, cette utilisation privilégiée du théorème de Gauss semble de plus favorisée par une certaine conception de l'arithmétique (« problème d'arithmétique = utiliser un théorème » ; les théorèmes de Gauss et Bézout étant les deux théorèmes clefs), et elle contribue à l'attention qu'ils portent au fait de travailler avec des entiers. La tâche emblématique, quant à elle, intervient fortement dans le début de leur recherche (de l'épisode 3 à l'épisode 8). Les élèves en particulier transforment l'égalité initiale pour essayer de se ramener à cette tâche et l'on voit bien comment le fait de substituer l'équation $a-b\sqrt{2}=0$ à l'égalité $a=b\sqrt{2}$,va compliquer le travail opératoire à mener lorsque les élèves se décident à passer au carré, et ralentir leur recherche. Comme dans le cas du théorème de Gauss, l'objet emblématique n'est pas non plus très nettement cerné puisque les élèves pensent pouvoir appliquer la technique de résolution apprise aux équations : $a-b\sqrt{2}=0$ puis $a^2-2b^2=0$ avant d'introduire, dans ce contexte, les notations A et B pour désigner les carrés de a et de b.

Il faut souligner enfin le rôle important joué par les exemples dans les raisonnements suivis par les élèves, que ce soit pour tenter de tester un résultat général énoncé ou utilisé par l'un d'eux ou pour argumenter ; le concept de contre-exemple semble maîtrisé.

Passage à l'étude de $\sqrt{3}$

Pour le passage à une preuve de l'irrationalité de $\sqrt{3}$, les deux groupes se distinguent de façon marquée. En effet, alors que pour le groupe A l'étape opératoire seule est objet des discussions, pour le groupe B, la progression est difficile dans son ensemble. En particulier, au début de cette partie de la recherche, le passage de a^2 à a se fait spontanément mais suscite la réintroduction de l'objet racine, comme cela avait été le cas, rappelons-le, lors de l'étude précédente. De plus, l'enseignante va juger nécessaire de distribuer à ce groupe l'aide prévue relative à l'étape opératoire (initialement prévue pour les tâches suivantes). Cela révèle des difficultés à utiliser l'outil des congruences. Et, même s'ils ont su à certains moments travailler en supposant que a est multiple de 3, la pensée organisatrice sous-jacente à cette aide n'est pas claire pour tous (élève B2 en particulier).

Malgré cette différence, des éléments communs sont à souligner. L'étape opératoire est pointée par l'enseignante pour les deux groupes. De plus, dans les deux cas, l'élément technologique théorème de Gauss est injecté par les élèves, la pensée organisatrice associée étant apportée par l'enseignante. Le cas de l'exemple du groupe A illustre bien le compromis qui se fait ainsi entre l'apport des élèves et la volonté de l'enseignante de faire progresser leur recherche. L'analyse de l'utilisation de ce théorème par les élèves des deux groupes a permis de mettre à jour un traitement opératoire original, ne vivant pas dans l'institution scolaire : il s'agit de la lecture originale en termes de divisibilité explicitée dans l'analyse mathématique. Cette lecture semble très naturellement suscitée chez les élèves, comme nous l'avons souligné plus haut, par certaines caractéristiques du contexte. Elle pourrait, comme nous l'avons montré dans l'analyse a priori et pointé à plusieurs reprises dans l'analyse des observations, conduire à des preuves différentes de celles attendues mais tout à fait valides. On voit bien cependant que ces preuves ont des difficultés à émerger, que les conclusions à tirer en termes de divisibilité sont facilement inversées ou remises en cause (d'une part, il peut y avoir des réticences, même si elles restent implicites, à déduire de l'égalité : $a^2=3b^2$, lorsque a et b sont premiers entre eux, que a^2 divise 3, alors que, dans les raisonnements usuels, le nombre 3 a généralement le statut de diviseur, et ceci peut avoir contribué aux glissements observés au niveau des conclusions, d'autre part, pour résister à l'objection selon laquelle, 3 étant plus petit que a^2, il est impossible que a^2 divise 3, il faut un raisonnement particulièrement sûr, ce qui n'est visiblement pas encore le cas pour ces élèves). Quand les preuves finissent par s'imposer, comme c'est le cas pour le groupe B avec la preuve exacte de l'implication correspondant à l'étape opératoire (épisode 15), c'est laborieusement. Malgré ces difficultés, comme nous l'avons cependant déjà souligné, assez étrangement, cette lecture tend à prédominer sur la lecture attendue d'une égalité comme $a^2=3b^2$, à savoir justement que 3 divise a^2.

Comparaison de leur preuve de $\sqrt{2}$ aux trois preuves fournies

Les deux groupes privilégient la preuve 2 (par l'absurde et minimalité) dans cette tâche de comparaison. Rappelons tout d'abord que le fait que l'expression par l'absurde soit explicitée dans le document fourni aux élèves n'est sans doute pas neutre dans le choix effectué. Néanmoins, on voit bien que, même si la présence de cette expression les conforte dans leurs suppositions, les comparaisons qu'ils effectuent, les arguments qu'ils invoquent, ne se réduisent pas à la reconnaissance de cette proximité organisatrice. Il est, de ce point de vue, remarquable que la conclusion du groupe A repose sur le lien que les élèves font entre considérer une fraction irréductible et prendre le plus petit entier a tel qu'il existe un entier b vérifiant $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Et la recherche du groupe B, quant à elle, met en jeu différents critères *a priori* pertinents, pèse le pour et le contre, aucune démonstration n'étant suffisamment proche, pour finalement privilégier la dimension organisatrice. Du côté opératoire, les élèves des deux groupes ont identifié une différence mais nous avons des éléments pour penser qu'ils ne se sont pas rendus compte que l'implication non démontrée dans leur preuve l'est dans la preuve 2 en particulier. Ainsi, nous pouvons émettre un doute quant à la pertinence de la règle de contrat en jeu (il n'est pas attendu que le résultat "si le carré d'un entier est pair alors ce nombre l'est aussi") relativement à la capacité des élèves à démontrer le résultat en jeu et même à le considérer comme allant de soi.

Production de preuves de l'irrationalité de $\sqrt{3}$ et généralisation avec le support des preuves fournies

Le groupe A a réussi à écrire trois preuves correspondant à celles fournies en particulier en injectant au niveau de l'étape opératoire ce qu'ils avaient fait dans leur propre preuve, dissociant ainsi les niveaux organisateur et opératoire. Certains éléments ont néanmoins montré que traduire la dichotomie pair / impair en termes de divisibilité afin de faire le lien avec celle de nombre divisible par 3 est problématique, comme pour le groupe B.

Concernant la généralisation, seul l'élève A1 travaille véritablement sur la dernière question, même si des éléments de généralisation apparaissent dans les deux groupes dans les échanges relatifs aux autres tâches, parfois même dès le début de la séance. Nous avions conclu en émettant l'hypothèse que cet élève raisonne sur l'implication triviale de l'équivalence en jeu ici ($\sqrt{n}$ rationnel si n est un carré) alors que pour l'enseignante, comme elle l'exprime elle-même, c'est l'autre implication qui est en jeu. Telle que la question est présentée aux élèves (« On peut se demander pour quelles valeurs de n le nombre $\sqrt{n}$ est rationnel… A votre avis ?»), il est légitime de chercher une condition suffisante pour que $\sqrt{n}$ soit rationnel et, pour un élève de TS, étant donnée la culture d'enseignement, il est loin d'être naturel de se demander si elle est aussi nécessaire.

Nous avons jusqu'ici, dans cette synthèse, insisté plutôt sur ce que nous avait appris l'observation de l'intimité du fonctionnement des deux groupes d'élèves qui n'était nullement directement visible dans leur production écrite. Ceci nous a conduits à mettre l'accent sur le caractère non linéaire de la recherche des élèves, sur les fragilités de leur raisonnement, sur la complexité du paysage qui s'offre à l'observateur dès lors justement que les moyens d'observation lui permettent de rentrer dans cette intimité du fonctionnement cognitif de l'élève. Ceci nous conduit aussi à souligner le décalage qui peut exister entre la vision que nous donnerait une gestion collective en classe d'une démonstration comme celle de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, efficacement pilotée par l'enseignant, et ce qui nous est donné à voir ici, quand ces mêmes élèves se retrouvent pleinement responsables de la production de cette démonstration.

Mais il y a d'autres points, tout aussi essentiels, que nous avons jusqu'ici passés sous silence. Le premier est, sans aucun doute, l'engagement de ces élèves dans la tâche difficile qui leur est proposée. Nous avons souligné dans l'introduction qu'il s'agissait là d'une tâche marginale par rapport à leur culture, à travers les différentes facettes qu'elle propose. Et on voit ces deux groupes d'élèves (et ils sont bien représentatifs de l'ensemble de la classe) s'engager immédiatement dans le travail mathématique et s'acharner à essayer de résoudre les problèmes posés pendant deux heures. Parfois le découragement point, fa ce aux difficultés rencontrées, mais l'humour est là, et la recherche repart. On voit aussi les rôles différents et complémentaires que jouent chacun des élèves dans le travail du groupe, avec chacun son propre rapport aux mathématiques, et la façon dont le caractère collectif de ce travail de recherche nous rend visibles des phénomènes qui auraient été plus difficilement repérables dans le cadre d'une résolution individuelle, même à haute voix. Le travail collectif aide certainement à l'engagement des élèves dans ce travail et à sa réussite mais on voit bien aussi comment les consensus cherchés révèlent impitoyablement la fragilité des connaissances et comment le besoin de comprendre qu'affichent des élèves comme B2 par exemple influence la dynamique de la recherche, obligeant à revenir sur des points que d'autres aimeraient considérer comme acquis. On voit aussi la difficulté du travail de l'enseignante qui, tout en laissant le maximum de responsabilité aux élèves, doit lorsque c'est nécessaire aider l'avancée du travail du groupe, saisir en un instant des modes de raisonnements complètement inattendus et entrevoir où ils pourraient mener pour guider efficacement et discrètement à la fois le travail de l'élève. Et c'est à travers tout ceci que nous pouvons sans aucun doute comprendre, un peu mieux que nous ne l'avons pu jusqu'ici, ce que peut être l'écologie du raisonnement arithmétique en terminale S aujourd'hui.

CONCLUSION GENERALE

A l'articulation entre analyses épistémologique et didactique, l'objectif visé dans notre recherche était d'identifier les potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique et d'étudier l'écologie de celles-ci en classe de terminale scientifique, classe où ce champ a été réintroduit en 1998 dans le cadre de l'enseignement de spécialité. La réintroduction de l'arithmétique dans les programmes de l'enseignement secondaire définit selon nous en effet un contexte curriculaire singulier qui induit inévitablement des questions didactiques et notamment les suivantes qui sont au cœur de notre problématique : *l'arithmétique des programmes actuels de terminale favorise-t-elle réellement ce type de travail et, si oui, quelles en sont les spécificités ? L'arithmétique enseignée actuellement à ce niveau le permet-elle effectivement ?*

Même si de nombreuses recherches didactiques ont abordé depuis plus de vingt ans des questions relatives à la rationalité mathématique, nous n'avions pas directement réponse à ces questions, comme nous l'avons expliqué en introduction. En particulier, nous ne disposions pas au début de la recherche d'éléments suffisamment consistants pour une étude des potentialités offertes par l'arithmétique vis à vis de la rationalité mathématique. Face à cette lacune, notre recherche s'est naturellement orientée dans un premier temps vers un travail de nature épistémologique.

Ce premier travail, qui a constitué un préalable à la réflexion didactique et permis l'émergence d'un outil d'analyse, a été ensuite complété tout aussi naturellement par une étude de l'écologie des potentialités révélées par l'analyse épistémologique dans le contexte curriculaire envisagé ici. Cette partie de la recherche, qui a exploité l'outil d'analyse élaboré lors de l'analyse épistémologique, a été menée suivant deux axes principaux : via l'analyse du champ réellement exploité par l'institution scolaire et via celle de travaux d'élèves. Et, pour chacune de ces analyses, nous avons choisi deux types contrastés de corpus si l'on considère les contraintes institutionnelles auxquelles ils sont assujettis. Pour l'analyse du champ réellement exploité par l'institution scolaire, c'est-à-dire la dimension institutionnelle de l'analyse, nous avons ainsi choisi d'analyser d'une part la partie arithmétique des sujets de baccalauréat depuis la réintroduction de l'arithmétique en terminale, d'autre part des ressources destinées aux enseignants. Pour l'analyse de travaux d'élèves, qui nous apparaissait comme un complément indispensable de l'analyse institutionnelle, nous avons cette fois choisi, pour contraster les corpus, d'une part d'analyser des copies d'élèves issues d'une épreuve d'entraînement au baccalauréat, d'autre part de préparer, en collaboration avec une enseignante animatrice à l'IREM Paris 7, une activité de recherche sur une question de rationalité et d'observer son déroulement dans la classe de cette enseignante. Les deux types de corpus envisagés pour ce deuxième axe de l'étude écologique ont permis également d'avoir accès à deux types de production différents qui sont respectivement : un produit fini réalisé pour l'enseignant et un processus de recherche où le produit fini correspondant devient un outil d'analyse du processus.

Nous rendons compte à présent des résultats auxquels nous sommes parvenue à l'issue de chacun de ces différents temps de recherche, en les mettant en regard avec ceux des temps qui le précèdent le cas échéant, et nous terminerons en précisant les perspectives qui nous semblent aujourd'hui offertes par cette recherche.

ANALYSE EPISTEMOLOGIQUE

La fonction de l'analyse épistémologique a été de nous aider à comprendre les spécificités du raisonnement en arithmétique et de nous aider à nous interroger sur les potentialités qu'offre ce domaine pour le développement de la rationalité mathématique des élèves de terminale scientifique. Nous l'avons fondée sur l'analyse détaillée d'un certain nombre d'exemples mathématiques historiques (certains furent au XVIIème siècle décisifs pour le renouveau de la discipline à cette époque, chez Fermat par exemple) et actuels.

Nous avons éprouvé le besoin de distinguer deux dimensions au sein du raisonnement en arithmétique, la *dimension organisatrice* et la *dimension opératoire*. La première est coextensive à la « visée » du mathématicien (c'est-à-dire son « programme », explicite ou non). La seconde est relative à l'ensemble des traitements développés pour permettre la mise en œuvre des différentes étapes de la mise en acte de la « visée ». Nous avons cherché à préciser les formes sous lesquelles ces dimensions peuvent vivre en arithmétique ainsi que la façon dont elles sont susceptibles de s'articuler.

Du côté organisateur, nous avons présenté en détail différentes formes organisatrices : la descente infinie et la récurrence, la disjonction de cas, la recherche exhaustive et une méthode propre aux anneaux factoriels que nous avons appelée « jeu d'extension-réduction ». Nous avons regroupé dans une même catégorie la descente infinie et la récurrence parce qu'elles constituent deux modes d'exploitation dans le raisonnement de la propriété de bon ordre de l'ensemble N, ce qui n'implique aucunement que nous les considérions comme équivalentes sur le plan didactique. Même si nous les avons distinguées en tant que formes organisatrices, la recherche exhaustive et la disjonction de cas ont été également rapprochées car elles illustrent toutes deux une même démarche globale : ramener la résolution d'un problème à l'étude d'un nombre fini de cas. La dernière catégorie retenue, quant à elle, fonctionne de façon plus implicite dans le travail arithmétique ; elle repose sur les propriétés des anneaux factoriels. Nous avons choisi l'appellation « jeu d'extension-réduction » afin de désigner le principe fondateur de cette méthode qui se retrouve dans d'autres champs des mathématiques, tels l'analyse ou l'algèbre linéaire.

Du côté opératoire, nous avons proposé une arborescence explicitant différents pôles au sein de cette composante qui nous ont servi à structurer l'analyse. Ceci nous a permis de prendre en compte conjointement dans l'analyse du travail opératoire, les formes de représentations des objets employées, la structure de Z privilégiée, l'utilisation de théorèmes-clefs et les différentes manipulations algébriques. En nous inspirant de la notion de praxéologie issue de la théorie anthropologique et de la structuration qu'elle propose autour du quadruplet (type de tâche, technique, technologie, théorie), nous avons, pour chacun de ces pôles, après l'avoir introduit, précisé des techniques opératoires associées ainsi que le(s) élément(s) technologique(s) correspondant(s) et indiqué, le cas échéant, une ou plusieurs pensées organisatrices en relation dialectique avec le pôle envisagé.

Nous avons de plus étudié la dialectique susceptible d'exister entre les deux dimensions distinguées dans le raisonnement en arithmétique. Nous avons particulièrement mis en évidence un des aspects de ce processus dialectique en pointant un élément essentiel y participant : les objets sur lesquels porte le travail opératoire ont une influence directe sur l'organisation des preuves. Nous avons pointé un deuxième aspect de cette dialectique : des sous-dimensions organisatrices sont susceptibles de naître dans le jeu opératoire qui règne au sein d'autres dimensions organisatrices, ceci conduisant à une imbrication de formes organisatrices faisant vivre chacune *a priori* plusieurs formes opératoires.

L'analyse épistémologique a ainsi montré qu'il y a, à propos d'un univers familier pour les élèves du secondaire, celui des nombres entiers où de nombreuses questions peuvent se formuler et se comprendre aisément, un univers du raisonnement, à la fois solidement structuré, qui peut être instrumenté par des outils opératoires efficaces, avec une marge énorme dans la complexité tant dans les deux dimensions distinguées que dans leurs interactions. Dans le même temps, on ne peut s'empêcher, à la lecture des nombreux exemples fournis, d'être impressionné par le caractère foisonnant de ce paysage, par la diversité des ressorts sur lesquels s'appuie le raisonnement, et de penser que la construction d'un cheminement cohérent et adapté aux élèves de terminale S, compatible avec les contraintes et notamment les contraintes horaires de l'enseignement, ne va pas forcément de soi. C'est ce qu'est venu confirmer et préciser l'analyse didactique.

ANALYSE DIDACTIQUE : UNE ETUDE INSTITUTIONNELLE

L'analyse institutionnelle a eu pour fonction de nous aider à prendre la mesure du champ réellement exploité par l'institution scolaire par rapport aux potentialités identifiées *a priori* lors du travail précédent. Dans cette perspective, nous nous sommes tout d'abord centrée sur l'épreuve de spécialité de l'enseignement de mathématiques au baccalauréat, à partir de la mise en application des programmes de 1998.

L'épreuve de l'enseignement de spécialité au baccalauréat

Nous avons procédé à une classification suivant les problèmes mathématiques en jeu dans les sujets de baccalauréat envisagés qui a mis en évidence une diversité certaine à travers l'existence de trois pôles (un pôle défini par la résolution d'équations diophantiennes, un autre par la notion de divisibilité et un troisième qui regroupe des questions que l'on peut qualifier d'exogènes par rapport à celles rattachées aux deux premiers pôles). Cependant, en affinant l'analyse, nous avons observé que les sujets envisagés sont construits à partir d'un nombre relativement restreint de types de tâches (il s'agit principalement, pour le premier, de la tâche, notée τ dans Z, emblématique et routinière de résolution d'équations diophantiennes du type ax+by=c (avec a et b entiers et c entier multiple du PGCD de a et b), et pour le second, de montrer qu'un nombre est divisible par un autre et de déterminer le PGCD de deux entiers (les registres relatifs à ces deux derniers types de tâches pouvant être numériques ou non numériques)).

L'analyse des sujets rattachés au premier pôle a confirmé le caractère emblématique de la tâche τ dans Z et trois cas ont été rencontrés en ce qui concerne sa mise en œuvre : celui où c'est elle en tant qu'objet qui est essentiellement travaillée et où elle est accompagnée d'applications directes, un autre où cette tâche occupe une place centrale, d'autres problèmes s'y greffant sans que l'on puisse parler d'applications, et celui où elle constitue un outil de résolution essentiel pour un problème centré hors du champ de l'arithmétique. Malgré la place importante qu'elle occupe, tant qualitativement que quantitativement, cette tâche ne s'est pas complètement standardisée : nous avons mis en évidence des leviers choisis par les concepteurs des sujets du baccalauréat pour aller au-delà de son caractère routinier. Généralement, un tel dépassement est réalisé en réduisant le domaine de résolution à N ou à un sous-ensemble fini de Z et c'est bien souvent l'habillage du problème en jeu qui amène naturellement à cette réduction. L'autonomie dévolue à l'élève pour la tâche emblématique est quasi totale, tant du côté organisateur qu'opératoire, cela étant sans aucun doute lié à son caractère routinier. Le balisage habituel qui renvoie à la technique enseignée en TS est la donnée de deux questions, l'une relative à la recherche d'une solution particulière et l'autre à celle de la solution générale. Pour ce qui est de la recherche d'une solution particulière, nous avons identifié quatre types de sujets : ceux où il est simplement demandé de vérifier qu'un couple donné est solution, ceux où une « solution évidente » est demandée, ceux où l'emploi de l'algorithme d'Euclide est recommandé, plus ou moins directement, et enfin ceux où rien n'est précisé. Une justification relative à l'existence d'une telle solution est demandée dans certains sujets et le théorème de Bézout est alors attendu. Dans le cadre du dépassement le plus fréquent du caractère routinier de la tâche emblématique (réduction de l'ensemble de résolution à N ou à un sous-ensemble fini de Z), la pensée organisatrice privilégiée par les auteurs est celle dont la visée est d'utiliser la résolution dans Z. On constate que, dans le cas où l'ensemble associé à la résolution dans N est fini, rien n'est précisé et on identifie une ouverture au niveau organisateur en termes d'autonomie potentielle dévolue à l'élève.

Au sein du deuxième groupement de sujets qui a été défini autour de la notion de divisibilité, nous avons observé dans l'ensemble une richesse plus grande que celle rencontrée dans les sujets du premier groupement. Nous avons en effet identifié la présence de tous les pôles principaux de l'opératoire en arithmétique retenus dans le cadre de l'analyse épistémologique (utilisation de théorèmes-clefs, manipulations algébriques, différentes formes de représentation des entiers et articulation de $(Z,+,\times)$ et $(Z,\leq)$). En ce qui concerne la composante organisatrice, nous avons identifié à plusieurs reprises un raisonnement par disjonction de cas. La démarche algorithmique de recherche exhaustive au sens strict est l'organisation la plus pertinente pour résoudre de nombreuses questions de divisibilité. L'emploi d'un raisonnement par récurrence est explicitement attendu dans la plupart des sujets du groupement étudié. L'autonomie dévolue à l'élève au niveau de l'opératoire est très variable et cette variabilité est directement fonction de la complexité des traitements opératoires à développer. Par exemple, nous avons trouvé le cas extrême où rien n'est fourni à l'élève lorsque ce dernier a la possibilité d'utiliser le théorème de Bézout pour montrer que deux nombres sont premiers entre eux et, à l'opposé, l'exemple de sujets où une identité algébrique, clef du travail opératoire attendu, est donnée à l'élève pour montrer qu'un entier en divise un autre (registre non numérique). Pour les organisations à développer : pour le raisonnement par disjonction de cas, les deux positions extrêmes (autonomie vide ou non) ont été identifiées, quant à la recherche exhaustive au sens strict et la mise en œuvre du raisonnement par récurrence, elles sont à la charge de l'élève. On peut se demander si l'existence d'une autonomie importante laissée à l'élève témoigne d'un rapport institutionnel qui ne considère pas comme problématiques les organisations en jeu, ni non plus l'équivalence logique.

D'une manière générale, nous avons constaté que l'évaluation d'arithmétique de l'enseignement de spécialité ne s'est pas en quelques années, comme on aurait pu le craindre, réduite à quelques exercices types. Même s'il y a une nette tendance à privilégier certaines tâches emblématiques telles la tâche τ mentionnée précédemment, notre analyse met en évidence une certaine diversité, tant du côté de la dimension organisatrice qu'opératoire. La richesse des potentialités offertes par l'arithmétique en termes de problèmes et de raisonnement y contribue certainement. Enfin, cette analyse des sujets de bac a montré les effets négatifs d'une autre contrainte qui s'impose à ce type d'évaluation : la nécessité de « couvrir » au maximum le programme, comme cela est indiqué dans les textes officiels. Il en résulte des sujets dont l'aspect « patchwork » ne va pas dans le sens de la structuration et de la cohérence de la pensée.

Ressources destinées aux enseignants

Pour contrebalancer le point de vue adopté en analysant les sujets de baccalauréat, et en réduisant nécessairement à la dimension de ce travail de thèse une enquête qui aurait pu être plus systématique, nous avons pris en compte quatre documents destinés aux enseignants : deux brochures de l'IREM de Montpellier, une publication de l'APMEP ainsi que le document d'accompagnement du programme d'arithmétique. Nous avons étudié comment les potentialités de l'arithmétique pour le raisonnement mathématique y sont exploitées relativement au thème de la résolution des équations diophantiennes, choisi en fonction de l'analyse épistémologique et de son importance dans l'enseignement.

Les quatre documents étudiés font vivre une grande richesse, tant à travers la diversité des problèmes abordés sur le thème qu'à travers celle des dimensions organisatrices et opératoires représentées dans la résolution de ces problèmes (cette diversité provient en particulier d'une pratique souvent observée, et dans tout le corpus, consistant à proposer plusieurs démonstrations d'un même résultat). Les niveaux de formulation engagés et de détail des preuves fournies par les différents auteurs montrent par ailleurs qu'ils supposent du lecteur enseignant une certaine culture arithmétique.

Les différents types de publications se distinguent par la place relative accordée à la tâche routinière et à des problèmes à la limite, voire hors, du programme ou difficiles à envisager avec des élèves réels. Comme l'on pouvait s'y attendre, vu son statut, c'est dans le document du GEPS que la tâche routinière est plus présente, et c'est dans ce document que l'on s'autorise le moins d'incursions vers des tâches à la limite du programme. En revanche, les documents IREM et celui de l'APMEP visent visiblement le développement chez les enseignants d'une culture arithmétique allant bien au-delà des exigences de la terminale S.

D'une manière générale, l'étude globale de l'ensemble des documents montre que l'étude du thème choisi nous a permis d'avoir une vision assez représentative de ce qui y vit, tant en termes de richesse mathématique exprimée à travers la diversité des dimensions organisatrice et opératoire développées, que par rapport à la façon dont cette richesse est communiquée au lecteur. Tous laissent à la charge du lecteur qui souhaite utiliser ces ressources pour un enseignement effectif un travail non négligeable de transposition didactique.

ANALYSE DIDACTIQUE : ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Dans la seconde partie de l'analyse didactique, il s'est agi de confronter à la contingence didactique les potentialités révélées par l'analyse épistémologique ainsi que l'analyse institutionnelle. Dans cette perspective, nous avons, dans un premier temps, considéré une épreuve d'entraînement au baccalauréat.

Une épreuve d'entraînement au baccalauréat

Relativement à la classification faite lors de l'analyse des sujets de baccalauréat, l'énoncé en jeu est rattaché à deux pôles, le pôle de la résolution d'équations diophantiennes et celui de la notion de divisibilité, ceux-ci étant imbriqués à travers la donnée d'un système défini par deux contraintes, chacune renvoyant à l'un d'eux. Notre analyse mathématique a montré que plusieurs organisations étaient possibles pour aborder le problème étudié selon le traitement choisi pour chacune des deux contraintes définissant le système en jeu, et nous avons constaté que celle choisie par les concepteurs permettait d'évaluer sur la tâche emblématique τ dans Z avec laquelle l'énoncé débute. A deux reprises nous avons identifié le levier généralement employé dans les sujets de baccalauréat pour dépasser le caractère routinier de cette tâche (réduction de la taille de l'ensemble des solutions recherchées) mais le problème mathématique choisi par les concepteurs de l'épreuve d'entraînement en permet un dépassement original. Du point de vue de l'autonomie dévolue à l'élève, cette épreuve est tout à fait caractéristique des évaluations du niveau d'enseignement envisagé ; en particulier, ce n'est pas la capacité des élèves à développer une pensée organisatrice qui pouvait être évaluée mais celle à en reconstituer une pré-construite (donnée par l'énoncé).

Le phénomène le plus remarquable dans l'analyse *a posteriori* est que des élèves de ce niveau ont été capables de s'affranchir de l'organisation sous-jacente pour en créer une autre qui leur soit propre. L'hypothèse faite est que ce phénomène ne s'est pas inscrit pas dans un développement conscient des élèves mais qu'il a eu pour origine un choix effectué dans le travail opératoire laissé à leur charge dans l'une des questions. Cela a impliqué pour chacun d'entre eux de suivre une organisation de résolution du système en jeu en rupture avec celle sous-jacente à l'énoncé (le rapport de dépendance existant au sein du traitement des contraintes a été inversé). Nous avons donc observé qu'au-delà de la dimension organisatrice, certaines habitudes du travail opératoire engendrent des associations qui semblent parfois relever de l'automatisme et qui ont une influence d'autant plus grande que la reconstruction du fil organisateur, figé nous semble-t-il à la simple lecture de l'énoncé, ne va pas de soi pour les élèves. Ainsi, les degrés de liberté existant au niveau opératoire ont donné naissance à un cheminement organisateur en rupture avec ce qui a été fixé par les auteurs de l'énoncé et les effets de contrat n'ont pas suffi à « rattraper » les choses.

Cette rupture au niveau organisateur a conduit les élèves à une deuxième rencontre avec la tâche emblématique et des limites d'appropriation de la technique enseignée ont été mises à jour : les élèves semblent en effet avoir besoin d'être un minimum guidés du côté organisateur, autrement dit, face à la tâche routinière en jeu dans un contexte non « balisé » par l'institution, ils se retrouvent démunis. Une autre fragilité a été mise en évidence au niveau organisateur dans la réalisation de cette tâche : certains élèves n'ont pas raisonné par équivalence, en omettant de vérifier la réciproque ; soulignons que cette difficulté relative au raisonnement par équivalence a été localisée à d'autres endroits. Ce qui précède rend compte d'échecs au niveau de la dimension organisatrice mais, via une synthèse des différents échecs identifiés dans les copies d'élèves, nous avons constaté que ceux-ci pouvaient tout aussi bien être de nature opératoire. Nous avons en effet identifié différents types d'erreurs au sein du travail opératoire développé par les élèves : des erreurs de calcul, des erreurs dans le report d'informations ainsi que dans la remontée de l'algorithme d'Euclide, dans l'utilisation du théorème en acte « si un entier divise une combinaison linéaire d'entiers alors il divise chacun des termes de cette combinaison » et enfin dans l'expression du carré de la longueur d'un segment en fonction des coordonnées des points délimitant ce segment. L'étude des différents échecs renvoie selon nous à une des différences qui existent entre l'élève et l'expert : la possibilité pour ce dernier de rattraper un échec à un niveau donné (opératoire ou organisateur) grâce au contrôle qu'il aurait, à l'instant correspondant du développement en cours, sur l'autre niveau.

Une expérimentation en classe de terminale scientifique

L'expérimentation de notre recherche a été construite, quant à elle, de façon à pouvoir étudier le rapport d'élèves de TS à la rationalité mathématique face à un problème d'arithmétique dans des conditions un peu aux limites de la culture de l'enseignement concernée. Les tâches proposées aux élèves étaient les suivantes : production d'une preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, passage à l'étude de $\sqrt{3}$, comparaison de leur preuve de $\sqrt{2}$ à trois preuves fournies (par descente infinie, par l'absurde et minimalité, en utilisant la structuration autour des nombres premiers), production de preuves de l'irrationalité de $\sqrt{3}$ et généralisation à partir des preuves fournies. De plus, nous nous sommes intéressée non plus seulement à un produit fini, comme cela fut le cas avec les copies d'élèves de l'épreuve d'entraînement au baccalauréat, mais au processus de production lui-même en analysant les transcriptions des discussions qui eurent lieu au sein de deux groupes d'élèves de terminale S. Pour chacun de ces groupes, après avoir analysé la production écrite remise à l'enseignante à la fin des deux heures de recherche, nous en sommes venue à l'analyse des transcripts des enregistrements et à celle des brouillons. Nous avons d'abord cherché à identifier l'itinéraire suivi et à découper la recherche en épisodes significatifs, puis nous avons procédé à des « zooms » localisés à partir de l'analyse des éléments mentionnés. Ces analyses ont montré le « fossé » existant entre les mondes de l'écrit et de son processus de production.

Par manque de temps, la tâche de généralisation n'a été abordée que par un seul élève et nous avons seulement pu, principalement, nous rendre compte *a posteriori* que la formulation de la question correspondante n'était pas pertinente : telle qu'elle est présentée aux élèves (« On peut se demander pour quelles valeurs de n le nombre $\sqrt{n}$ est rationnel… A votre avis ?»), il est légitime de chercher une condition suffisante pour que $\sqrt{n}$ soit rationnel et, pour un élève de TS, étant donnée la culture d'enseignement, il est loin d'être naturel de se demander si elle est aussi nécessaire. En ce qui concerne également la conception de l'expérimentation, le fait que l'expression par l'absurde ait été explicitée pour désigner la preuve 2 (par l'absurde et minimalité) dans le document fourni aux élèves n'a sans doute pas été neutre dans l'identification par les élèves d'une communauté de méthode de raisonnement entre leur preuve finale (classique) et la preuve 2 ; il a néanmoins été très remarquable que la conclusion faite par l'un des groupes repose sur le lien que les élèves ont fait entre considérer une fraction irréductible et prendre le plus petit entier a tel qu'il existe un entier b vérifiant $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

A cause de la contrainte temporelle également, les élèves n'ont pu consacrer que peu de temps à la tâche d'« écriture » de preuves à partir des trois qui leur avaient été données. Néanmoins, cette tâche a été entièrement et correctement réalisée par l'un des deux groupes et sans que cela pose problème durant leur recherche : les élèves, dissociant spontanément les niveaux organisateur et opératoire, ont suivi les organisations implicitement proposées à travers la donnée des preuves, en y injectant ce qu'ils avaient fait dans leur propre preuve pour l'étape opératoire manquante. Mais, certains éléments ont montré que traduire la dichotomie pair / impair en termes de divisibilité afin de faire le lien avec celle de nombre divisible par 3 n'allait pas de soi, de même que pour l'autre groupe dont la recherche bloquait essentiellement à cause de cela au moment de la fin de l'expérimentation.

Du fait que les élèves avaient déjà rencontré en classe une preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (preuve dite classique), nous avions pensé avec l'enseignante, lors de la conception de l'expérimentation, que la réalisation de la tâche correspondante ne nécessiterait que peu de temps par rapport au reste. Or l'analyse a *posteriori* a montré que lorsque l'« écriture » de la preuve classique attendue passe sous la responsabilité des élèves, les choses deviennent problématiques. Le manque de temps mentionné précédemment s'explique principalement par cette erreur d'appréciation *a priori*.

L'analyse de la recherche des élèves relative à l'étude de $\sqrt{2}$ et à celle de $\sqrt{3}$ a clairement mis en évidence l'émergence dans cette recherche de la diversité des résolutions possibles pointée par l'analyse mathématique. L'existence d'automatismes renvoyant à la culture d'enseignement concernée a pu contribuer à l'apparition de la preuve attendue (les rationnels sont par exemple envisagés automatiquement par les élèves à travers leur représentant irréductible) mais aussi à celle d'embryons de preuves autres (l'identification d'un produit relativement à l'idée préalable d'utiliser le théorème de Gauss a été à l'origine d'une lecture extra-ordinaire en termes de divisibilité, embryon de la preuve originale indiquée dans l'analyse mathématique ; cette association est apparue de façon d'autant plus forte que nous avons observé que ce sens de lecture extra-ordinaire est susceptible de faire obstacle au sens habituel alors que ce dernier est le plus pertinent à un moment donné du développement).

Toutefois, nous avons observé la difficulté des élèves à se placer dans un raisonnement hypothético-déductif par l'absurde lorsque leur conviction de la fausseté de l'énoncé est forte, comme c'était le cas ici avec l'énoncé « $\sqrt{2}$ est rationnel ». De plus, l'élévation au carré n'a pas été quelque chose d'automatique et pour l'un des groupes l'intervention de l'enseignante a été nécessaire ; au sein de ce groupe, malgré une attention portée à la nature des nombres en jeu, nous avons en effet constaté l'absence d'une claire conscience chez les élèves du champ concerné par l'arithmétique (enseignée à ce niveau). La traduction du caractère pair, quant à elle, a été une connaissance mobilisable mais non disponible ; celle-ci a été injectée dans le milieu avec l'intervention de l'enseignante pour les deux groupes. Avec l'étude du passage à une preuve de l'irrationalité de $\sqrt{3}$, nous avons été en particulier amenée à émettre un doute quant à la pertinence de la règle de contrat existante (il n'était pas attendu que le résultat "si le carré d'un entier est pair alors ce nombre l'est aussi") relativement à la capacité des élèves à démontrer le résultat en jeu et même à le considérer comme allant de soi, ce qui fut appuyé par l'analyse de la tâche de comparaison (les élèves des deux groupes ont identifié une différence du côté opératoire entre leur preuve finale et la preuve 2 mais sans s'être rendus compte selon nous que l'implication non démontrée dans leur preuve l'est dans la preuve 2).

NOTRE THESE ET CERTAINES DE SES PERSPECTIVES

Notre analyse épistémologique a clairement mis en évidence des potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique (ces potentialités ont été exprimées en termes de dimensions organisatrice et opératoire et de dialectique entre celles-ci). L'analyse didactique a montré, du côté institutionnel, l'existence de réductions et de verrouillages mais aussi de ressorts et ressources existant au sein même de l'institution scolaire. L'analyse de travaux d'élèves a, quant à elle, permis de mettre en évidence une certaine créativité des élèves que l'institution scolaire devrait selon nous prendre bien plus en compte pour aider à une exploitation plus riche des potentialités de l'arithmétique (par exemple en définissant davantage l'autonomie qui leur est dévolue au niveau organisateur) mais aussi un certain nombre de difficultés qui mettent bien en évidence les limites d'une analyse *a priori* des potentialités de l'arithmétique.

Au-delà de ces résultats, l'exploitation de l'outil d'analyse que nous avons élaboré a montré la pertinence de ce dernier pour l'analyse didactique. Une perspective de prolongement possible de cette recherche s'en déduit : réinvestir cet outil et tester sa pertinence pour l'analyse didactique à d'autres niveaux d'enseignement, en particulier au niveau universitaire, ainsi que pour étudier la transition dans ce domaine entre enseignement secondaire et université. Dans l'enseignement secondaire français en effet, malgré la créativité dont les élèves peuvent être capables, l'autonomie dévolue par l'institution scolaire à l'élève se situe essentiellement au niveau opératoire. Où se situe l'autonomie de l'élève dans le supérieur ? Y a-t-il un saut lors de la transition ? Comment par ailleurs les composantes organisatrice et opératoire, ainsi que leurs relations dialectiques, se complexifient-elles ?

Et au-delà de la seule arithmétique, il nous semble aussi intéressant d'essayer de mener un travail comparable dans un autre champ conceptuel. Est-ce que les distinctions qui sont apparues ici pertinentes, mais qui peuvent sans doute être introduites dans d'autres domaines, restent alors aussi productives pour étudier les formes de raisonnement en jeu et le travail opératoire qui les outille ? Et si c'est le cas, quelles spécificités cela permet-il d'identifier pour le raisonnement dans le domaine concerné et comment exploiter ensuite ces analyses au niveau de l'action didactique ? Ce sont pour nous des questions ouvertes.

BIBLIOGRAPHIE

ARNAUDIES, J.M & FRAYSSE, H. (1987) *Cours de mathématiques-1 Algèbre* ; DUNOD Université.

ARSAC, G., GERMAIN, G. & MANTE M. (1988) *Problème ouvert et situation-problème ;* IREM de LYON

BERNARD, R., FAURE, C., FONTANA, NOGUES, M., NOUAZE, Y. & TROUCHE, L. (1995) *Arithmétique, le retour…* ; IREM de l'Université de Montpellier II.

BERNARD, R., BRIANT, N., FAURE, C., FONTANA, NOGUES, J. & TROUCHE, L. (1999) *Fragments d'Arithmétique* ; IREM de l'Université de Montpellier II.

DURAND-GUERRIER, V. (1996) *Logique et raisonnement mathématique*. Thèse de Doctorat ; Université Claude Bernard Lyon 1.

DUVERNEY, D. (2000) Sommes de deux carrés in *Les nombres, Problèmes anciens et actuels* ; Collection Mathémathèmes Ellipses.

CASIRO, F. & COHEN G. (1998) Les tiroirs de Dirichlet in *Arithmétique – Secrets de Nombres (Hors-série n°6 Tangente)* ; Archimède.

CHEVALLARD, Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique in *Actes de l'Université d'Eté de la Rochelle* ; IREM de Clermont-Ferrand.

DEMAZURE, M. (1997) Cours d'algèbre ; Nouvelle Bibliothèque Mathématique, Cassini, Paris.

DOUADY, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet in *Recherches en Didactique des mathématiques*, 7(2) ; La Pensée Sauvage, Grenoble.

DOWEK, G. (2000) *La recherche exhaustive ; Comment trouver une aiguille dans une botte de foin* Conférences du 27 mai 2000 à la Cité des sciences et du 2 décembre 2000 au Palais de la découverte.

DREYFUS, T. (1999) Why Johnny can't prove in *Educational Studies in Mathematics*, 38(1/3).

FRANCINOU, S. & GIANELLA, H. (1994) *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 1*; MASSON.

GAUSS, Ch. Fr. (1801) *Recherches Arithmétiques*.

GUINOT, M. (1993) *Arithmétique pour Amateurs*, Livre II (*Les " resveries " de Fermat*) ; IREM Aléas Editeur, Lyon.

GOLDSTEIN, C. (1995) *Un théorème de Fermat et ses lecteurs* ; Presses Universitaires de Vincennes, Saint-Denis.

GRENIER D. & PAYAN, Ch. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes in *Recherches en Didactique des Mathématiques,*18(1) ; La Pensée Sauvage, Grenoble.

HANNA, G. (2000) Proof, explanation and exploration : an overview in *Educational Studies in Mathematics*, 44(1).

HELLEGOUARCH Y. (1997*) Invitation aux mathématiques de Fermat-Wiles* ; MASSON.

HENRY, M. (2001) Le théorème de Gauss dans les Eléments d'Euclide ?! in *Bulletin de l'APMEP* (433).

IFRAH, G. (1994) Histoire universelle des nombres ; Robert Laffont.

PERRIN, D. (1981) *Cours d'algèbre* ; Collection de l'école normale supérieure de jeunes filles n°18.

RASHED, R., HOUZEL, Ch. et CHRISTOL, G. (1999) *Œuvres de Pierre Fermat*, Tome I (*La théorie des nombres)* ; Librairie Scientifique et technique Albert Blanchard, Paris.

RAVEL, L. (2003) *Des programmes à la classe : étude de la transposition didactique interne. Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique*. Thèse de Doctorat ; Université Joseph Fourier, Grenoble.

ROBERT, A. (1997) Niveaux de conceptualisation et enseignement du secondaire in *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question* ; La Pensée Sauvage, Grenoble.

ROGALSKI, M. (1999) *L'arithmétique élémentaire* ; Cours de Mathématiques, CAPES.

ROUX, D. (1993) *Les 200 premiers problèmes de l'APMEP*, Volume I (*Arithmétique et Théorie des nombres*) ; Publication de l'APMEP (N°92), Paris.

SAMUEL, P. (1967) Sur l'organisation d'un cours d'arithmétique in *Bulletin APMEP (258).*

SAVIN, M. (2000) *Arithmétique – Des résultats classiques par des moyens élémentaires* in Brochure n°129 APMEP.

SCHMIDT, S. (2002) Arithmetical and algebraic types of reasoning used by pre-service teachers in a problem-solving context in *RCESMT* (2.1) ; University of Toronto Press Journals Division, Toronto.

TALL, D. (ed) (1991) *Advanced Mathematical Thinking* ; Kluwer Press.

TANNERY, P. & HENRY, C. (1894) *Œuvres de Fermat*, Tome Deuxième (*Correspondance*) ; Gauthier-Villars et Fils, Paris.

VITRAC, B. (1994) Euclide Les Eléments (Volume 2 Livres V à IX) ; PUF, Paris.

annexes

ANNEXE Chapitre 5 : **345**
ANNEXE Chapitre 7 : **369**
15 COPIES D'ELEVES DE TERMINALE S **369**
ANNEXE Chapitre 8 : **439**
Transcriptions de la recherche des groupes d'élèves A et B **439**

ANNEXE Chapitre 5 :

Sujets du baccalaureat

FRANCE METROPOLITAINE

FRANCE MÉTROPOLITAINE / JUIN 2002

1. On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Déterminer un couple d'entiers relatifs (u ; v) tel que $6u + 7v = 1$; en déduire une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de l'équation (E).

(0,25 POINT)

b) Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

(1 POINT)

2. Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.

On considère le plan (P) d'équation: $6x + 7y + 8z = 57$. (0,75 POINT)

On considère les points du plan (P) qui appartiennent aussi au plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point.

3. On considère un point M du plan (P) dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

a) Montrer que l'entier y est impair. (0,5 POINT)

b) On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel.

Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1. (0,75 POINT)

c) On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel.

Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation : $x + p + 4q = 7$

En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1. (0,75 POINT)

d) En déduire les coordonnées de tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels. (1 POINT)

FRANCE METROPOLITAINE / SEPTEMBRE 2001

1) a) Déterminer le PGCD des nombres 168 et 20.

b) Soit l'équation 168x + 20y = 6 dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a-t-elle des solutions ? (0,5 POINT)

c) Soit l'équation 168x + 20y = 4 dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a-t-elle des solutions ? (0,5 POINT)

2) a) Déterminer, en utilisant l'algorithme d'Euclide, et en détaillant les calculs effectués, deux entiers relatifs m et p tels que 42m + 5p = 1. (0,75 POINT)

b) En déduire deux entiers relatifs u et v tels que 42u + 5v = 2. (0,5 POINT)

c) Démontrer que le couple d'entiers relatifs (x ; y) est solution de l'équation 42x + 5y = 2 si, et seulement si, 42(x+4) = 5(34 – y). (1 POINT)

d) Déterminer tous les couples (x ; y) d'entiers relatifs solutions de l'équation 42x+5y=2. (0,75 POINT)

3) Déduire du 2) les couples (x ; y) d'entiers relatifs solutions de l'équation :

$$(42x + 5y - 3)(42x + 5y + 3)$$

FRANCE MÉTROPOLITAINE / JUIN 2001

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) [unité graphique : 6 cm].

On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = z\exp(\frac{5i\pi}{6})$ et on définit une suite de points (M_n) de la manière suivante : M_0 a pour affixe $z_0 = \exp(i\frac{\pi}{2})$ et, pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On appelle z_n l'affixe de M_n.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

Placer les points M_0, M_1, M_2. (1 POINT)

2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité

$$z_n = \exp[i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})]$$

(on pourra utiliser un raisonnement par récurrence). (1 POINT)

3. Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieur ou égal à p, montrer que deux points M_n et M_p sont confondus si, et seulement si, (n — p) est multiple de 12. (1 POINT)

4. a) On considère l'équation (E) $12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple (4 ; 9) est solution, résoudre l'équation (E). (1 POINT)

b) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite [Ox). (1POINT)

FRANCE MÉTROPOLITAINE / JUIN 1999

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres
$a_n = 4\times10^n - 1$, $b_n = 2\times10^n - 1$ et $c_n = 2\times10^n + 1$.
1. a) Calculer a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 et c_3. (0,25 POINT)
b) Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3. (0,5 + 0,5 POINT)
c) Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que b_3 est premier. (0,5 POINT)
d) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $b_n\, c_n = a_{2n}$. (0,25 POINT)
En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6. (0,25 POINT)
e) Montrer que PCCD (b_n, c_n) = PGCD (c_n, 2).
En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux. (0,5 + 0,5 POINT)
2. On considère l'équation:
(1) $b_3x + c_3y = 1$
d'inconnues les entiers relatifs x et y.
a) Justifier le fait que (1) possède au moins une solution. (0,5 POINT)
b) Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 ; en déduire une solution particulière de (1). (0,75 POINT)
c) Résoudre l'équation (1). (0,5 POINT)

Liste des nombres premiers inférieurs à 100

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67 ; 71; 73 ; 79; 83 ; 89 ; 97.

Asie

ASIE / JUIN 2002

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0=1$ et $y_0=8$ et

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer, par récurrence, que les points M_n de coordonnées $(x_n ; y_n)$ sont sur la droite (Δ) dont une équation est $5x - y + 3 = 0$.
En déduire que $x_{n+1} = 4x_n + 2$. (0,75 + 0,25 POINT)

2. Montrer, par récurrence, que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que tous les y_n sont aussi des entiers naturels. (0,5 + 0,5 POINT)

3. Montrer que :

a) x_n est divisible par 3 si, et seulement si, y_n est divisible par 3. (0,75 POINT)

b) si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux. (0,75 POINT)

4. a) Montrer, par récurrence, que $x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$. (0,75 POINT)

b) En déduire que $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3, pour tout entier naturel n. (0,75 POINT)

ASIE / JUIN 2000

1. Déterminer le PGCD (2 688 ; 3024).

2. Dans cette question, x et y sont deux entiers relatifs.

a) Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes :

(1) 2 688x + 3 024 y = 3 360 ;

(2) $8x + 91y = -10$. (0,5 POINT)

b) Vérifier que (1 ; - 2) est une solution particulière de l'équation (2). (0,5 POINT)

c) Déduire de ce qui précède les solutions de (2). (1 POINT)

3. Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives :

$$x + 2y - z = -2 \text{ et } 3x - y + 5z = 0$$

a) Montrer que (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D). (1,5 POINT)

b) Montrer que les coordonnées des points de (D) vérifient l'équation (2). (0,5 POINT)

c) En déduire l'ensemble (E) des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

(1,25 POINT)

ASIE / JUIN 1999

1. On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où (x; y) est un couple de nombres entiers relatifs.

a) Donner une solution particulière de l'équation (E). (0,25 POINT)

b) Résoudre l'équation (E). (1,25 POINT)

2. Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple (a ; b) de nombres entiers vérifiant :

$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2. \end{cases}$$

a) Montrer que le couple (a ; - b) est solution de (E). (0,5 POINT)

b) Quel est le reste, dans la division de N par 40 ? (1 POINT)

3. a) Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où (x; y) est un couple de nombres entiers relatifs.

(1 POINT)

b) Au VIIIème siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe? (1 POINT)

AMERIQUE

AMERIQUE NORD / JUIN 2002

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme abba où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un chiffre quelconque. Exemples d'éléments de (E) : 2002; 3773; 9119. Les partie A et B peuvent être traitées séparément.

Partie A

Nombre d'éléments de (E) ayant 11 comme plus petit facteur premier

1) a) Décomposer 1001 en produit de facteurs premiers. (0,25 POINT)

b) Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11.(0,5 POINT)

2) a) Quel est le nombre d'éléments de (E) ? (0,25 POINT)

b) Quel est le nombre d'éléments de (E) qui ne sont divisibles ni par 2 ni par 5 ? (0,5 POINT)

3) Soit n un élément de (E) s'écrivant sous la forme abba :

a) Montrer que « n est divisible par 3 » équivaut à « a + b est divisible par 3 ». (0,5 POINT)

b) Montrer que « n est divisible par 7 » équivaut à « b est divisible par 7 ». (0,5 POINT)

4) Déduire des questions précédentes le nombre d'éléments de (E) qui admettent 11 comme plus petit facteur premier. (0,5 POINT)

Partie B

Étude des éléments de (E) correspondant à une année bissextile

Soit (F) l'ensemble des éléments de (E) qui correspondent à une année bissextile.

On admet que, pour tout élément n de (F), il existe des entiers naturels p et q tels que:

$$n = 2000 + 4p \text{ et } n = 2002 + 11q.$$

1) On considère l'équation (e) : $4p - 11q = 2$ où p et q sont des entiers relatifs.

Vérifier que le couple (6 ; 2) est solution de l'équation (e) puis résoudre l'équation (e). (0,75 POINT)

2) En déduire que tout entier n de (F) peut s'écrire sous la forme 2024 + 44k où k est un entier relatif. (0,75 POINT)

3) A l'aide de la calculatrice, déterminer les six plus petits éléments de (F). (0,5 POINT)

NB : Liste des nombres premiers inférieurs à 40 : 2; 3 ; 5 ; 7 ; Il ; 13 ; 17; 19; 23 ; 31 ; 37.

AMERIQUE NORD / JUIN 2001

1. Montrer que, pour tout entier relatif n, les entiers 14n + 3 et 5n + 1 sont premiers entre eux. (1 POINT)

2. On considère l'équation (E) : 87x + 31y = 2 où x et y sont des entiers relatifs. .

a) Vérifier, en utilisant par exemple la question 1., que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple (u; v) d'entiers relatifs tel que 87u + 31 v = 1 puis une solution (x0 ; y0) de (E). (1,5 POINT)

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans Z². (0,5 POINT)

c) Application: Déterminer les points de la droite d'équation 87 x - 31 Y - 2 = 0 dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100. (1 POINT) *Indication: On remarquera que le point M de coordonnées (x ; y) appartient d la droite (D) si, et seulement si, le couple (x ; - y) vérifie l'équation (E).*

AMERIQUE DU NORD / JUIN 1999

Les trois parties I, II et III peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie I

Soit E = {1 ;2;3;4;5;6;7;8;9; 10}.

Déterminer les paires {a ; b} d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de ab par 11 soit 1. (1 POINT)

Partie II

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

a) L'entier (n - 1) ! + 1 est-il pair? (0,5 POINT)

b) L'entier (n - 1) ! + 1 est-il divisible par un entier naturel pair?

(0,5 POINT) .

2. Prouver que l'entier (15 - 1) ! +. 1 n'est pas divisible par 15. (0,25 POINT)

3. L'entier (11 - 1) ! + 1 est-il divisible par 11 ? (0,25 POINT)

Partie III

Soit p un entier naturel non premier ($p \geq 2$).

1. Prouver que p admet un diviseur q (l < q < p) qui divise (p - 1). (1 POINT)

2. L'entier q divise-t-il l'entier (p - 1) ! + 1 ? (1 POINT)

3. L'entier p divise-t-il l'entier (p - 1) ! + 1 ? (0,5 POINT)

AMERIQUE SUD / NOVEMBRE 2001

Soit n un entier naturel non nul.

On considère les nombres a et b tels que:

$$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 \text{ et } \qquad b = 2n^2 + n.$$

1. Montrer que 2n + 1 divise a et b. (1,5 POINT)

2. Un élève affirme que le PGCD de a et b est 2n + 1. (2,5 POINTS)

Son affirmation est-elle vraie ou fausse? *(La réponse sera justifiée.)*

CENTRES ETRANGERS GROUPE 1

CENTRES ÉTRANGERS GROUPE 1 / JUIN 2002

Soit p un nombre premier donné. On se propose d'étudier l'existence de couples (x; y) d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation:

$$(E) : x^2 + y^2 = p^2.$$

1. On pose p = 2. Montrer que l'équation (E) est sans solution. (0,5 POINT)

On suppose désormais $p \neq 2$ et que le couple (x; y) est solution de l'équation (E).

2. Le but de cette question est de prouver que x et y sont premiers entre eux.

a) Montrer que x et y sont de parités différentes. (0,5 POINT)

b) Montrer que x et y ne sont pas divisibles par p. (0,5 POINT)

c) En déduire que x et y sont premiers entre eux. (0,5 POINT)

3. On suppose maintenant que p est une somme de deux carrés non nuls, c'est-à-dire: $p = u^2+v^2$ où u et v sont deux entiers naturels strictement positifs.

a) Vérifier que, dans ce cas, le couple $(|u^2 - v^2|\ ; 2uv)$ est solution de l'équation (E)
(0,5 POINT)

b) Donner une solution de l'équation (E) lorsque p = 5 puis lorsque p = 13. (0,5 POINT)

4. On se propose enfin de vérifier, sur deux exemples, que l'équation (E) est impossible lorsque p n'est pas somme de deux carrés.

a) p = 3 et p = 7 sont-ils somme de deux carrés? (0,5 POINT)

b) Démontrer que les équations $x^2 + y^2= 9$ et $x^2 + y^2 = 49$ n'admettent pas de solution en entiers naturels strictement positifs. (1,5 POINT)

CENTRES ÉTRANGERS GROUPE 1 / JUIN 2001

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard (J_0 + 6), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition *simultanée* des deux objets aux yeux de l'astronome.
Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

1. Soient *u* et *v* le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1. Montrer que le couple *(u ; v)* est solution de 1'équation (E1) : 35x - 27*y* = 2. (0,5 POINT)

2. *a)* Déterminer un couple d'entiers relatifs *(x0 ; y0)* solution particulière de l'équation (E_2) :

$$35x-27y= 1. \text{ (0,5 POINT)}$$

b) En déduire une solution particulière $(u_0 ; v_0)$ de (E_1). (0,5 POINT)

c) Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_1). (0,5 POINT)

d) Déterminer la solution *(u ; v)* permettant de déterminer J_1. (1 POINT)

3. *a)* Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ? (0,5 POINT)

b) Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1? (L'année 2000 était bissextile.) (1 POINT)

c) Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ? (0,5 POINT)

CENTRES ÉTRANGERS GROUPE 1 / JUIN 1999

Le but de cet exercice est d'utiliser les solutions d'une équation à deux inconnues entières pour résoudre un problème dans l'espace.

l) a) Déterminer un couple (x_0 ; y_0) d'entiers relatifs solutions de l'équation :

$$48x + 35y = 1$$

(On pourra utiliser l'algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD de deux nombres).

b) Déduire de a) tous les couples d'entiers relatifs (x ; y) solutions de cette équation.

2. L'espace étant rapporté à un repère orthonormal, on donne le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (48; 35; 24) et le point A de coordonnées (- 11 ; 35 ; - 13).

a) Préciser la nature et donner une équation cartésienne de l'ensemble (Π) des points M de l'espace, de coordonnées (x; y; z) tels que $\vec{u}$ .AM = 0. (1 POINT)

b) Soit (D) la droite intersection de (Π) avec le plan d'équation z = 16. Déterminer tous les points de (D) dont les coordonnées sont entières et appartiennent à l'intervalle [- 100; 100]. (1,5 POINT)

En déduire les coordonnées du point de (D), à coordonnées entières, situé le plus près de l'origine. (1 POINT)

PONDICHERY

PONDICHERY / JUIN 2002

1. Calculer le PGCD de 4^5-1 et de 4^6-1. (0,25 POINT)

Soit u la suite numérique définie par :

$$u_0=0,\ u_1=1$$

Et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2}=5u_{n+1}-4u_n$.

2. Calculer les termes u_2, u_3, et u_4 de la suite (u). (0,5 POINT)

3. a) Montrer que la suite (u) vérifie, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}=4u_n+1.\ (0,5\ \text{POINT})$$

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel. (0,5 POINT)

c) En déduire, pour tout entier naturel n, le PGCD de u_n et u_{n+1}. (0,75 POINT)

4. Soit (v) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=u_n+\frac{1}{3}$.

a) Montrer que (v) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0. (0,75 POINT)

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n. (0,75 POINT)

c) Déterminer, pour tout entier naturel n, le PGCD de 4^{n+1}-1 et de 4^n-1. (1 POINT)

PONDICHERY / MAI 2001

1. On considère l'équation (1) d'inconnue (n; m) élément de Z² :

$$11n – 24m = 1.$$

a) Montrer, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution. (0,5 POINT)

b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).
(0,25 POINT)

c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1). (0,5 POINT)

2. Recherche du PGCD de $10^{11} – 1$ et $10^{24} – 1$.

a) Montrer que 9 divise $10^{11} – 1$ et $10^{24} – 1$. (0,5 POINT)

b) (n; m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire

$$(10^{11n} – 1) – (10^{24m} – 1) = 9.\ (0,5\ \text{POINT})$$

c) Montrer que $10^{11} – 1$ divise $10^{11n} – 1$. (0,5 ,POINT)

(On rappelle l'égalité $a^n - 1 = (a - l)(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a^0)$, valable pour tout entier naturel n non nul). Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que:

$$(10^{11} – 1)N – (10^{24} – 1)M = 9.$$ (0,5 POINT)

d) Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} – 1$ et $10^{11} – 1$ divise 9. (0,5 POINT)

e) Déduire des questions précédentes le PGCD de $10^{11} – 1$ et $10^{24} – 1$. (0,25 POINT)

PONDICHERY / JUIN 2000

Dans tout l'exercice, *n* désigne un entier naturel non nul.

1. *a)* Pour $1 \leq n \leq 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7. (0,5 POINT)

b) Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7. (0,5 POINT)

En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7. (0,5 POINT)

c) A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7. (0,5 POINT)

d) De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour *n* quelconque? (0,5 POINT)

e) En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7. (0,5 POINT)

2. Soit $U_n = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{n-1} = \sum_{i=0}^{i=n-1} 3^i$, où *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) Montrer que si U_n est divisible par 7, alors $3^n - 1$ est divisible par 7. (1 POINT)

b) Réciproquement, montrer que si $3^n - 1$ est divisible par 7, alors U_n est divisible par 7. En déduire les valeurs de *n* telles que U_n soit divisible par 7. (1 POINT)

PONDICHERY / MAI 1999

Partie A

On admet que 1999 est un nombre premier.

Déterminer l'ensemble des couples *(a; b)* d'entiers naturels admettant pour somme 1l 994 et pour PGCD 1999. (1 POINT)

Partie B

On considère l'équation (E) d'inconnue *n* appartenant à N :

$$(E) : n^2 - Sn + 11\,994 = 0 \text{ où S est un entier naturel.}$$

On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans N.

1. Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E) ? (0,25 POINT)

Si oui, préciser la deuxième solution. (0,25 POINT).

2. Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit solution de (E) ? (0,5 POINT)

3. Montrer que tout entier *n* solution de (E) est un diviseur de 1l 994. (0,5 POINT)

En déduire toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.

(0,5 POINT)

Partie C

Comment montrerait-on que 1999 est un nombre premier ? Préciser le raisonnement employé.

(1 POINT)

La liste de tous les entiers premiers inférieurs à 100 est précisée ci-dessous :

2 3 5 711 13 17-19 23 29 31374143 47 53 59 61 6771 73 79 83 89 97

LA REUNION

LA REUNION / JUIN 2000

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres :

$$a = n^3 - n^2 - 12n \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 - 7n - 4.$$

1. Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n - 4$. (0,5 POINT)

2. On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le PGCD de α et β.

a) Établir une relation entre α et β indépendante de n. (0,5 POINT)

b) Démontrer que d est un diviseur de 5. (0,5 POINT)

c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si, et seulement si, $n - 2$ est multiple de 5. (0,5 POINT)

3. Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux. (1 POINT)

4. a) Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD de a et b. (1 POINT)

b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers n = 1l et n = 12. (1 POINT).

GUADELOUPE – GUYANE – MARTINIQUE

GUADELOUPE – GUYANE – MARTINIQUE / SEPTEMBRE 2001

1. Soient a et b des entiers naturels non nuls, tels que

$$\text{PGCD}\,(a + b\,;\, ab) = p,$$

où p est un nombre premier.

a) Démontrer que p divise a^2. (On remarquera que $a^2 = a(a + b) - ab$). (1 POINT)

b) En déduire que p divise a. On constate donc, de même, que p divise b. (1 POINT)

c) Démontrer que PGCD (a ; b) = p. (1 POINT)

2. On désigne par a et b des entiers naturels tels que ab.

a) Résoudre le système :

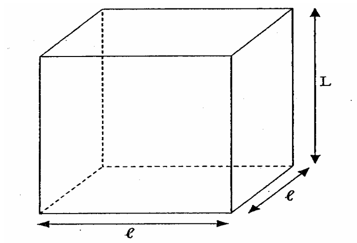
$$\begin{cases} \text{PGCD}\,(a\,;\,b) = 5 \\ \text{PPCM}\,(a\,;\,b) = 170. \end{cases}$$ (1 POINT)

b) En déduire les solutions du système:

$$\begin{cases} \text{PGCD}\,(a + b\,;\,ab) = 5 \\ \text{PPCM}\,(a\,;\,b) = 170. \end{cases}$$ (1 POINT)

GUADELOUPE – GUYANE – MARTINIQUE / JUIN 2001

1.



Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur L, à base carrée de côté l, où l et L sont des entiers naturels non nuls tels que l < L.

On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête *a est* un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boîte B sans laisser d'espace vide).

a) Dans cette question, l = 882 et L = 945.

Quelle est la plus grande valeur possible pour *a* ? (0,5 POINT)

Quelles sont les valeurs possibles pour *a* ? (0,75 POINT)

b) Dans cette question, le volume de la boîte B est *v* = 77 760. On sait que, pour remplir la boîte B, la plus grande valeur possible de *a* est 12.

Montrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles, dont on donnera les dimensions. (1 POINT)

2. On veut remplir une caisse cubique C, dont l'arête *c* est un entier naturel non nul, avec des boîtes B toutes identiques telles que décrites dans la question 1. (Les boîtes B, empilées verticalement, doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide.)

a) Dans cette question, l = 882 et L = 945.

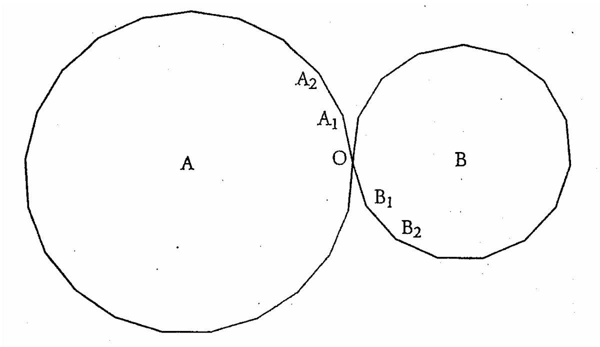
Quelle est la plus petite arête c pour la caisse C ? (0,75 POINT)

Quel est l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour l'arête *c* ? (1 POINT)

b) Dans cette question, le volume de la boîte B est 15 435. On sait que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105.

Quelles sont les dimensions l et L de la boîte B ? (1 POINT)

GUADELOUPE – GUYANE – MARTINIQUE / JUIN 2000



Les points $A_0 = O$; A_1 ; ... A_{20} sont les sommets d'un polygone régulier de centre A, à 21 côtés, de sens direct. Les points $B_0 = O$; B_1 ; ... B_{14} sont les sommets d'un polygone régulier de centre B, à 15 côtés, de sens direct.

Soit r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{21}$ et r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{15}$.

On définit la suite (M_n) de points par :

M_0 est l'un des points A_0, A_1, A_2,… A_{20} ; pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = r_A(M_n)$.

On définit la suite (P_n) de points par :

P_0 est l'un des points B_0, B_1, B_2,… , B_{14} ; pour tout entier naturel n, $P_{n+1} == r_B(P_n)$

Le but de l'exercice est de déterminer, pour deux cas particuliers, l'ensemble S des entiers naturels n vérifiant: .

$$M_n = P_n = O.$$

1. Dans cette question, $M_0 = P_0 = O$.

a) Indiquer la position du point M_{2000}, et celle du point P_{2000}. (1 POINT)

b) Déterminer le plus petit entier naturel n non nul tel que:

$$M_n = P_n = O. \text{ (1 POINT)}$$

En déduire l'ensemble S. (0,5 POINT)

2. Dans cette question, $M_0 = A_{19}$ et $P_0 = B_{10}$.

On considère l'équation (E) : $7x - 5y = 1$ avec $x \in Z$ et $y \in Z$,

a) Déterminer une solution particulière (a ; b) de (E). (0,5 POINT)

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E). (1 POINT)

c) En déduire l'ensemble S des entiers naturels n vérifiant $M_n = P_n = O$. (1 POINT)

GUADELOUPE – GUYANE – MARTINIQUE / JUIN 1999

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on donne le point A (12 ; 18). On désigne par B un point de l'axe (O ; $\vec{i}$) et par C un point de l'axe (O; $\vec{j}$) tels que (AB, AC) = $-\dfrac{\pi}{2}$.

On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1. Démontrer que le couple (x ; y) est solution de l'équation (E) : 2x + 3y = 78. (1 POINT)

2. On se propose de trouver tous les couples (B, C) de points ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.

a) Montrer que 1'on est ramené à l'équation (E), avec x et y appartenant à l'ensemble Z des nombres entiers relatifs. (1 POINT}

b) A partir de la définition de B et C, trouver une solution particulière (x_0 ; y_0) de (E) avec x_0 et y_0 appartenant à Z. (1 POINT)

c) Démontrer qu'un couple (x ; y) d'entiers relatifs est solution de l'équation.(E) si, et seulement si, il est de la forme (12 + 3k ; 18 – 2k), où k appartient à Z. (1 POINT)

d) Combien y a-t-il de couples de points (B, C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que :

$$-6 \leq x \leq 21 \text{ et } -5 \leq y \leq 14 \text{ ? (1,5 POINT)}$$

POLYNESIE

POLYNÉSIE / JUIN 2002

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que n et 2 + 1 sont premiers entre eux. (0,5 POINT)

2. On pose $\alpha = n + 3$ et $\beta = 2n + 1$, et on note δ le PGCD de α et β .

a) Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ. (0,75 POINT)

b) Démontrer que α et β sont multiples de 5 si, et seulement si, $(n-2)$ est multiple de 5.
(0,75 POINT)

3. On considère les nombres a et b définis par:

$$a = n^3+2n-3n$$

$$b = n^2-n-1.$$

Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n-1)$.
(0,5 POINT)

4. a) On note d le PGCD de $n(n + 3)$ et de $(2n + 1)$. Montrer que δ divise d, puis que $\delta = d$.
(0,5 + 0,5 POINT)

b) En déduire le PGCD, Δ , de a et b en fonction de n. (1 POINT)

c) *Application* : Déterminer Δ pour n = 2001. (0,5 POINT)
Déterminer Δ pour n = 2002. (0,5 POINT)

POLYNESIE / JUIN 2001

1. On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) : $91x + 10y = 1$.

a) Enoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).
(0,5 POINT)

b) Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E')
: $91x + 10y = 412$. (0,5 POINT)

c) Résoudre (E').

2. Montrer que les nombres entiers $A_n = 3^{2n} - 1$, où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8
(une des méthodes possibles est un raisonnement par récurrence.) (1 POINT)

3. On considère l'équation (E'') : $A_3x + A_2y = 3\,296$.

a) Déterminer les couples d'entiers relatifs (x ; y) solutions de l'équation (E"). (0,5 POINT)

b) Montrer que (E") admet pour solution un couple unique d'entiers naturels.

Le déterminer. (0,5 + 0,5 POINT)

POLYNÉSIE / JUIN 2000

1. On cherche deux entiers relatifs x et y solutions de l'équation :

(1) $ax + by = 60$ (a et b entiers naturels donnés tels que $ab \neq 0$).

On notera d le plus grand commun diviseur de a et b.

a) On suppose que l'équation (1) a au moins une solution (x_0 ; y_0).

Montrer que d divise 60. (0,5 POINT)

b) On suppose que d divise 60. Prouver qu'il existe alors au moins une solution (x_0 ; y_0) à l'équation (1). (0,5 POINT)

2. On considère l'équation:

(2) $24x + 36y = 60$. (x et y entiers relatifs).

a) Donner le PGCD de 24 et 36 en justifiant brièvement.

Simplifier l'équation (2). (0,5 pOINT)

b) Trouver une solution évidente pour l'équation (2) et résoudre cette équation. (1,5 POINT)

On appellera S l'ensemble des couples (x y) solutions.

c) Énumérer tous les couples (x ; y) solutions de (2) et tels que:

$$-10 \leq x \leq 10.$$

Donner parmi eux, ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5. (1 POINT)

d) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 1 cm), représenter l'ensemble E des points M de coordonnées (x ; y) telles que :

$$x = 1 + 3t$$

$$y=1-2t$$

$$(t \in R)$$

(1POINT)

e) Montrer que les points ayant pour coordonnées les solutions (x ; y) de l'équation (2) appartiennent à E. (0,5 POINT)

Comment peut-on caractériser S ? (0,5 POINT)

POLYNÉSIE / JUIN 1999

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $2^{3n}-1$ est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence). (0,75 POINT)

En déduire que $2^{3n+1}-2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2}-4$ est un multiple de 7.

(0,5+0,5 POINT)

2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2. (0,5 POINT)

3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier

$$A_p=2^p+2^{2p}+2^{3p}.$$

a) Si p=3n, quel est le reste de la division de A_p par 7 ? (0,25 POINT)

b) Démontrer que si p=3n+1 alors A_p est divisible par 7. (0,25 POINT)

c) Etudier le cas où p=3n+2. (0,5 POINT)

4. On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire :

$$a=1001001000 \quad b=1000100010000.$$

Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p. (0,5 POINT)

Sont-ils divisibles par 7 ? (0,25 POINT)

NOUVELLE CALEDONIE

NOUVELLE CALEDONIE / MARS 2001

Dans tout l'exercice, x et *y* désignent des entiers naturels non nuls vérifiant x < y. S est l'ensemble des couples (x; y) tels que PGCD (x; y) = y – x.

1. a) Calculer le PGCD (363 ; 484).

b) Le couple (363 ; 484) appartient-il à S ?

2. Soit n un entier naturel non nul ; le couple (n; n + 1) appartient-il à S ? Justifier votre réponse.

3. a) Montrer que (x; y) appartient à S si, et seulement si, il existe un entier naturel k non nul tel que x = k(y – x) et y = (k + 1) (y – x).

b) En déduire que, pour tout couple (x; y) de S, on a :

$$PPCM(x ; y) = k(k + 1)(y - x).$$

4. a) Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

b) En déduire l'ensemble des couples (x; y) de S tels que

$$PPCM (x; y) = 228.$$

NOUVELLE-CALÉDONIE / NOVEMBRE 2001

Partie I

Soit x un nombre réel.

1. Montrer que $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$. (0,25 POINT)

2. En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients entiers.
(0,5 POINT)

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère les entiers $A= n^2 - 2n + 2$ et $B= n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD.

1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier. (0,25 POINT)

2. Montrer que tout diviseur de A qui divise n, divise 2. (0,5 P0INT)

3. Montrer que tout diviseur commun de A et B, divise 4n. (0,5 POINT)

4. Dans cette question, on suppose que n est impair.

a) Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.

(0,5 POINT)

b) Montrer que d divise n. (0,5 POINT)

c) En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux. (0,5 POINT)

5. On suppose maintenant que n est pair.

a) Montrer que 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$. (0,25 POINT)

b) Montrer que d est de la forme $d=2p$, où p est impair. (0,5 POINT)

c) Montrer que p divise n. En déduire que $d=2$. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question 4.) (0,75 POINT)

ANNEXE Chapitre 7 :

15 COPIES D'ELEVES DE TERMINALE S

COPIE 1 .... **370**
COPIE 2 .... **375**
COPIE 3 .... **379**
COPIE 4 .... **384**
COPIE 5 .... **390**
COPIE 6 .... **393**
COPIE 7 .... **397**
COPIE 8 .... **400**
COPIE 9 .... **404**
COPIE 10 .... **411**
COPIE 11 .... **418**
COPIE 12 .... **422**
COPIE 13 .... **425**
COPIE 14 .... **429**
COPIE 15 .... **434**

COPIE 1

L'ÉDUCATION NATIONALE

ACADÉMIES DE CRÉTEIL, PARIS, VERSAILLES

N° de JURY :

(4 premiers chiffres de votre n° de matricule)

SESSION : ...

EXAMEN : ...

SÉRIE : ...

SPÉCIALITÉ : ...

ÉPREUVE DE : ...

PARTIE A RABATTRE

NOTE /20	Coefficient	Note affectée du coefficient

APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE CHIFFRÉE :

Si votre composition comporte plusieurs feuilles, numérotez-les. .../...

Exercice 2

(E) : $17x + 11y = 5$ avec x et $y \in \mathbb{Z}$

a) $17 = 1\times 11 + 6$ $\quad$ $6 = 17 - 11$

$11 = 1\times 6 + 5$ $\quad$ $5 = 11 - 6$

$\Leftrightarrow 5 = 11 - (17 - 11)$

$5 = 2\times 11 - 1\times 17$

Rédigez SVP

$\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 2 \end{cases}$

l'algorithme d'Euclide n'apparaît pas clairement

0,25

b) $17x - 11y = 5$ or $17\times(-1) + 11\times 2 = 5$

$\Leftrightarrow 17x - 11y = 17(-1) + 11\times 2$

$\Leftrightarrow 17x + 17 = 11\times 2 + 11y$

$\Leftrightarrow 17(x+1) = 11(2+y)$

~~Or~~ ainsi 17 divise ~~11~~ $(2+y)$ et ~~que~~ comme 17 et 11 sont premier entre eux alors 17 divise $(2+y)$

(Théorème de Gauss)

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

2a Par la réci
$AH^2 = BM^2$
$BM^2 = (n+1)^2$
$AB^2 = (-1-$
$=$
MA^2
1

$2+y = 17t$ avec $t \in \mathbb{Z}$
$y = 17t - 2$ avec $t \in \mathbb{Z}$
?, or $17(n+1) = 11(2+y)$
$17(n+1) = 11(2+17t-2)$
? $17(n+1) = 11 \times 17t$
$(n+1) = 11t$
$x = 11t - 1$ avec $t \in \mathbb{Z}$
donc si $17x - 11y = 5$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}$
~~les~~ ensemble~~x~~ des solutions ~~sont~~ est
$\{(11t-1\,,\,17t-2)\}\ t \in \mathbb{Z}$
~~17t+22~~
réciproquement si x et y sont solutions alors $(17 \times (11t-1)) - (11(17t-2))$:
$17 \times 11t - 17 - 11 \times 17t + 2 \times 11$:
$-17 + 2 \times 11 = 5$
conclusion ?

0,5 trop mal rédigé

c) $(x\,;y)$ entier naturel ?
x' et y' 2 nombres entiers naturels, premier entre eux
$\delta = PGCD(x\,;y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \delta x' \\ y = \delta y' \\ 1 = PGCD(x'\,;y') \end{cases}$

(i) donc $17\,\delta x' - 11\,\delta\, y' = 5$
$\delta(17x' - 11y') = 5$
donc δ divise 5 donc ~~les~~ valeurs possibles pour δ sont 1 ou 5

0,5

(ii) Si $\delta = 5$ or δ PGCD de $(x\,;y)$ donc
$x = \delta x'$
$x = 5x'$
donc $\delta = 5 \Rightarrow 5$ divise x oui

0,25

Si 5 divise x alors $\delta = 5$ car $\delta = 5$ ou $\delta = 1$ ~~or~~
or si $\delta = 1$ alors x et y sont premiers entre eux

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

[redacted]

$$\begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ PGCD(x, y) = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 17 \times 5x' - 11 \times 5y' = 5 \\ PGCD(x', y') = 1 \end{cases}$$

$17 \times 5x' - 11 \times 5y' = 5$

$17x' - 11y' = 1$

Algorithme d'Euclide

$17 = 11 \times 1 + 6 \Leftrightarrow 6 = 17 - 11$

$11 = 6 + 5 \Leftrightarrow 5 = 11 - 6$

$6 = 5 + 1 \Leftrightarrow 1 = 6 - 5$

donc

$$\begin{aligned} 1 &= 17 - 11 - (11 - (17 - 11)) \\ &= 17 - 11 - (11 - 17 + 11) \\ &= 17 - 11 - 11 + 17 - 11 \\ &= 2 \times 17 - 3 \times 11 \end{aligned}$$

Lisé

$$\begin{cases} x' = 2 \\ y' = 3 \end{cases} \quad \text{et } PGCD(x'; y') = 1$$

Dans le cas de plusieurs copies, agrafer ici.

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \end{cases}$$

conclusion ?

insuffisant.

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.

2a Par la réciproque du théorème de Pythagore

$AM^2 = BM^2 + AB^2$ $\quad M(x\,;y)$

$BM^2 = (x+1)^2 + (y+2)^2$

$AB^2 = (-1-16)^2 + (-2+13)^2$

$= 17^2 + 11^2$

$MA^2 = (16-x)^2 + (-13-y)^2$

$(16-x)^2 + (-13-y)^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + 410$

$(16-x)^2 + (-13-y)^2 = x^2 + 2x + y^2 + 4y + 410$

$16^2 - 32x + \cancel{x^2} + 13^2 + 26y + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} + 2x + \cancel{y^2} + 4y + 410$

$15 = 34x - 22y$

$15 = 2(17x - 11y)$

PGCD $(x\,;y) = 5$

$0 \leqslant x \leqslant 100 \quad 0 \leqslant y \leqslant 100$

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

COPIE 2

n°2

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

ACADÉMIES DE CRÉTEIL, PARIS, VERSAILLES

N° de JURY :

(4 premiers chiffres de votre n° de matricule)

SESSION : 2000/2001

EXAMEN : BAC BLANC

SÉRIE : S

SPÉCIALITÉ : mathématiques

ÉPREUVE DE : mathématiques

PARTIE A RABATTRE

NOTE /20	Coefficient	Note affectée du coefficient

APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE CHIFFRÉE :

Si votre composition comporte plusieurs feuilles, numérotez-les. 3/6

<u>Exercice 2</u>

1) (E) : $17x - 11y = 5$

a) Recherche d'une solution particulière par l'algorithme d'Euclide :

$17 = 11 \times 1 + 6$

$11 = 6 \times 1 + 5$

$6 = 5 \times 1 + 1$

Le dernier reste non nul est 1, PGCD(17, 11) = 1, 17 et 11 sont donc premiers entre eux

$1 = 6 - 5$

$1 = 6 - (11 - 6) = 6 \times 2 - 11$

$1 = (17 - 11) \times 2 - 11$

$1 = 17 \times 2 - 11 \times 3$

$\cancel{x_0 = 10}$

$\cancel{y_0 = 15}$

$5 = 17 \times 10 - 11 \times 15$

$\left.\begin{matrix} x_0 = 10 \\ y_0 = 15 \end{matrix}\right\}$ est une solution particulière de (E)

0,5

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

b) Recherche d'une solutic

$17x-11y=5 \Leftrightarrow 17x-11y=$

$\Leftrightarrow 17(x-10):$

Si (x,y) solution, alors 1

or 17 et 11 sont premier

17 divise donc $(y-15)$ (

$y-15=17k$ $(k \in$

$\Leftrightarrow y=17k+15$ $(k \in$

Si $y=17k+15$, alors :

$17(x-10)=11(17$

$\Leftrightarrow x-10=11k$ $(k$

$\Leftrightarrow x=11k+10$ $(k$

Si (x,y) est solution, alors $x=11k+10$ et $y=$

Réciproquement si ~~(x, y) est solution~~ : pour tou

$17(11k+10)-11(17k+15)$

$=17\times 10-11\times 15$

$=170-165$

$=5$ ainsi $(11k+10,\ 17k+15)$ es

Donc l'ensemble des solutions de (E) sont le

1 avec $x=11k+10$ et $y=17k+15$, $(k \in \mathbb{Z})$

c) $\delta = PGCD(x,y)$

(i) Les valeurs possibles de δ sont 1 et 5 p

(ii) $\delta=5 \Leftrightarrow 5=PGCD(x,y)$

5 étant le PGCD de x et y, 5 divise à la fois x

donc 5 divise x. avez-vous

(iii) $\begin{cases} 17x-11y=5 \\ PGCD(x,y)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17x-11y=5 \\ x=5x' \\ y=5y' \\ PGCD(x';y')=1 \end{cases}$ oui

$\Leftrightarrow \begin{cases} 17(5x')-11(5y')=5 \\ x=5x' \\ y=5y' \\ PGCD(x';y')=1 \end{cases}$

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.

[redacted]

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 85x' - 55y' = 5 \\ x = 5x' \\ y = 5y' \\ PGCD(x';y') = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 17x' - 11y' = 1 \\ PGCD(x';y') = 1 \end{cases}$$

??? $\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ y' = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \end{cases}$

2) $A(16;-13)$ $B(-1;-2)$

a)

$\mathcal{E} \in \Delta$.

Dans le cas de plusieurs copies, agrafer ici.

- repondu à la question ?

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

COPIE 3

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

ACADÉMIES DE CRÉTEIL, PARIS, VERSAILLES

N° de JURY :

(4 premiers chiffres de votre n° de matricule)

n°3

SESSION : 2000 – 2001

EXAMEN : Bac Blanc

SÉRIE : S

SPÉCIALITÉ : maths

ÉPREUVE DE : maths

PARTIE À RABATTRE

NOTE /20	Coefficient	Note affectée du coefficient

APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE CHIFFRÉE :

Si votre composition comporte plusieurs feuilles, numérotez-les. 3 / 5

Exercice 2 : 1) (E) : $17x - 11y = 5$ x et y dans $\mathbb{Z}$

a) On utilise l'algorithme d'Euclide

$17 = 11 \times 1 + 6$

$11 = 6 \times 1 + 5$

$6 = 5 \times 1 + 1$

On utilise le théorème de Bezout ?

$1 = 6 - 5$

$1 = 6 - (11 - 6)$

$1 = 6 \times 2 - 11$

$1 = (17 - 11) \times 2 - 11$

$1 = 17 \times 2 - 11 \times 3$

donc $5 = 17 \times 10 - 11 \times 15$

donc une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de (E) est $(10 ; 15)$ 0,5

b) $17x - 11y = 5 \Leftrightarrow 17x - 11y = 17 \times 10 - 11 \times 15$

$\Leftrightarrow 17x - 17 \times 10 = -11 \times 15 + 11y$

$\Leftrightarrow 17(x - 10) = 11(y - 15)$

Si $(x ; y)$ est solution alors 17 divise $11(y - 15)$.

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

donc $y + 45 = 17$
$y = 17k$
On reporte d
$17x + $
$17x$
17

Or 17 et 11 sont premiers entre eux
donc 17 divise $y - 15$ (théorème de Gauss)
donc $y - 15 = 17k$ avec $k \in \mathbb{Z}$
$y = 17k + 15$
On reporte dans (E) :
$17x - 11(17k+15) = 5$
$17x = 5 + 11(17k+15)$
$17x = 5 + 187k + 165$
$17x = 187k + 170$
$x = \frac{187k + 170}{17}$

$x = 11k + 10$

Donc $(x;y)$ est solution de (E) pour $\begin{cases} x = 11k + 10 \\ y = 17k + 15 \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$.

0,75

Vérification : $17(11k+10) - 11(17k+15) = 187k + 170 - 187k - 165$
$= 5$

donc un couple solution $(x;y)$ de (E) est de la forme : $\begin{cases} x = 11k + 1\text{(} \\ y = 17k + 1\text{(} \end{cases}$

c) (i) $(x;y)$ couple d'entiers naturels solution de (E)
$d = PGCD(x;y)$
$17x - 11y = 5$
donc 5 divise $17x - 11y$
donc 5 divise x et y
donc 5 est le $PGCD(x;y)$ NON.
Les diviseurs de 5 sont 1 et 5 ?
Donc $d = 1$ ou $d = 5$

(ii) $d = 5 \iff PGCD(x;y) = 5$
$\iff$ 5 est le plus grand diviseur commun à x et y
$\iff$ 5 divise x abusif.

(iii) On obtient $\begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ PGCD(x;y) = 5 \end{cases}$
$\iff \begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ x = 5x' \\ y = 5y' \\ PGCD(x';y') = 1 \end{cases}$

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

[redacted]

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 17\times 5x' - 11\times 5y' = 5 \\ x = 5x' \\ y = 5y' \\ PGCD(x';y') = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(17x' - 11y') = 5 \\ x = 5x' \\ y = 5y' \\ PGCD(x';y') = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 17x' - 11y' = 1 \\ x = 5x' \\ y = 5y' \\ PGCD(x';y') = 1 \end{cases}$$ inutile ici.

Or $1 = 17\times 2 - 11\times 3$ (voir ① ⓐ)

donc $x' = 2$ et $y' = 3$

$PGCD(2;3) = 1$ donc x' et y' sont valables

donc $x = 2\times 5 = 10$ et $y = 3\times 5 = 15$

donc $(x;y) = (10;15)$ est solution du système ?

$t \in \mathbb{Z}$.

Dans le cas de plusieurs copies, agrafer ici.

② Repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ $A(16;-13)$ $B(-1;-2)$

ⓐ ABH rectangle en B $\Leftrightarrow AH^2 = BA^2 + BH^2$

Soit $H(x;y)$ alors $(x-16)^2 + (y-(-13))^2 = (16-(-1))^2 + (-13-(-2))^2 + (x-(-1))^2 + (y-(-2))^2$

donc $(x-16)^2 + (y+13)^2 = 17^2 + (-11)^2 + (x+1)^2 + (y+2)^2$

$(x-16)^2 + (y+13)^2 = 289 + 121 + (x+1)^2 + (y+2)^2$

$x^2 - 32x + 256 + y^2 + 26y + 169 = 289 + 121 + x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4$

$-32x + 256 + 26y + 129 = 289 + 121 + 2x + 1 + 4y + 4$

$-32x - 2x + 26y - 4y = -256 - 129 + 289 + 121 + 1 + 4$

$-34x + 22y = 30$

$34x - 22y = -30$

$17x - 11y = -15$

Or $5 = 17\times 10 - 11\times 15$ (voir ① ⓐ)

donc $-15 = 17\times(-30) - 11\times(-45)$

donc $(-30;-45) = (x_0;y_0)$ est solution particulière de $17x - 11y = -15$

donc $17x - 11y = 17\times(-30) - 11\times(-45)$

$17(x+30) = 11(y+45)$

Si $(x;y)$ est solution alors 17 divise $11(y+45)$

Or 17 et 11 sont premiers entre eux donc 17 divise $y+45$ (théorème de Gauss)

une erreur de calcul possible ne vous est pas venue à l'esprit ?

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

donc $y + 45 = 17t$ avec $t \in \mathbb{Z}$

$y = 17t - 45$

On reporte et on obtient :

$17x + 11(17t - 45) = -15$

$17x = -11(17t - 45) - 15$

$17x = -187t + 495 - 15$

$17x = -187t + 480$

$x =$

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

COPIE 4

Exercice 2 :

1. (E) : $17x - 11y = 5$

x et $y \in \mathbb{Z}$

a. Solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de (E) :

$17 = 11 \times 1 + 6 \Rightarrow 6 = 17 - 11$

$11 = 6 \times 1 + 5 \Rightarrow 5 = 11 - 6$

$6 = 5 \times 1 + 1 \Rightarrow 1 = 6 - 5$

$1 = 6 - 5$

$1 = 6 - (11 - 6)$

$1 = 17 - 11 - [11 - (17 - 11)]$

$1 = 17 - 11 - (11 - 17 + 11)$

$1 = 17 - 11 - 11 + 17 - 11$

$1 = 17 \times 2 - 11 \times 3$

$\Leftrightarrow 5 = 17 \times 10 - 11 \times 15$

0,5

Donc une solution particulière est $\begin{cases} x_0 = 10 \\ y_0 = 15 \end{cases}$

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

DM [redacted]

b) Résolution de (E) :

$17x - 11y = 5$

$\Leftrightarrow 17x - 11y = 17 \times 10 - 11 \times 15$

$\Leftrightarrow 17(x - 10) = 11(y - 15)$ (1)

Si (x, y) est solution de (E) alors 17 divise $11(y - 15)$ donc

Or 17 et 11 sont premiers entre eux (la division* de 17 par 11 donne 6 comme reste et $6 < 11$)

* euclidienne

Donc 17 divise $y - 15$ (Théorème de Gauss)

$y - 15 = 17t$, $t \in \mathbb{Z}$

$y = 17t + 15$, $t \in \mathbb{Z}$

On reporte y dans (1) :

$17(x - 10) = 11(17t + 15 - 15)$, $t \in \mathbb{Z}$

$17(x - 10) = 11 \times 17t$, $t \in \mathbb{Z}$

$x - 10 = 11t$, $t \in \mathbb{Z}$

$x = 11t + 10$, $t \in \mathbb{Z}$

Si (x, y) est solution de (E) alors $x = 11t + 10$ et $y = 17t + 15$, $t \in \mathbb{Z}$

Réciproquement si $x = 11t + 10$ et $y = 17t + 15$, $t \in \mathbb{Z}$, alors :

$17(11t + 10) - 11(17t + 15)$

$= 17 \times 11t + 17 \times 10 - 11 \times 17t - 11 \times 15$

$= 17 \times 10 - 11 \times 15$

$= 5$

Donc pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $(11t + 10, 17t + 15)$ est solution de E

L'ensemble des solutions est l'ensemble des couples (x,y) tels que ~~Donc~~ $x = 11t + 10$, $t \in \mathbb{Z}$

$y = 17t + 15$

avec (x, y) solution de (E)

c) (x, y) couple d'entiers naturels solution de (E)

[redacted]

$\delta = \text{PGCD}(x, y)$

i) $\delta = \text{PGCD}(x, y)$

Donc δ divise toute combinaison linéaire de x et y

donc δ divise $17x - 11y = 5$

Alors δ divise 5 or 5 est un nombre premier, les seules valeurs possibles de δ sont $\delta = 1$ ou $\delta = 5$.

0,5

ii) $\delta = 5 \Longleftrightarrow 5$ divise x ?

Par définition le PGCD de 2 nombres est le plus grand commun diviseur de ces 2 nombres ici x et y donc il divise à la fois x et y

Si $\text{PGCD}(x, y) = \delta = 5$

5 divise donc x et y

ainsi

~~Alors~~ $\delta = 5 \Rightarrow 5$ divise x.

iii) Entiers naturels x et y solutions de (A)

$$\begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ \text{PGCD}(x, y) = 5 \end{cases} \quad (A)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ x = 5x' \\ y = 5y' \\ \text{PGCD}(x'; y') = 1 \end{cases}$$

DM $17 \times 5x' - 11 \times 5y' = 5$

$17x' - 11y' = 1$

$17x' - 11y' = 17 \times 2 - 11 \times 3$

$17(x' - 2) = 11(y' - 3) \quad (1)$

si (x', y') est solution de (1)

17 divise donc $11(y' - 3)$

Or 17 et 11 sont premiers entre eux

Donc 17 divise $y' - 3$

$y' - 3 = 17t'$, $t' \in \mathbb{Z}$

$y' = 17t' + 3$, $t' \in \mathbb{Z}$

On reporte y' dans (1) :

$17(x' - 2) = 11(17t' + 3 - 3)$

$17(x' - 2) = 11 \times 17t'$

$x' - 2 = 11t'$

$x' = 11t' + 2$, $t' \in \mathbb{Z}$

Si (x', y') est solution de (1) donc

$x' = 11t' + 2$ et $y' = 17t' + 3$, $t' \in \mathbb{Z}$

Réciproquement si $x' = 11t' + 2$ et $y' = 17t' + 3$, $t' \in \mathbb{Z}$ alors :

$17x' - 11y' = 17(11t' + 2) - 11(17t' + 3)$

$= \cancel{17 \times 11t'} + 2 \times 17 - \cancel{11 \times 17t'}$

$- 11 \times 3$

$= 1$

Alors (x', y') est solution de (1)

$\begin{cases} x' = 11t' + 2 \\ y' = 17t' + 3 \end{cases} \quad t' \in \mathbb{Z}$

Donc $x = 5x' = 11 \times 5t' + 10$ $\quad t \in \mathbb{Z}$

$y = 5y' = 17 \times 5t' + 15$

on vous demande les solutions entières naturelles

Alors $\begin{cases} x = 11 \times 5t' + 10 \\ y = 17 \times 5t' + 15 \end{cases}$ $\quad t \in \mathbb{Z}$

(x, y) solution de (A)

l'équivalence avec votre système initial n'est pas clairement rétablie

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

2. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé

$A(16 ; -13)$

$B(-1 ; -2)$

a. Ensemble (F) des points M du plan à coordonnées entières tels que ABM soit rectangle en B :

$M \in (F) \iff (AB) \perp (BM)$

$(x ; y) \iff \vec{AB} \cdot \vec{BM} = 0$

$\iff -17(x+1) + 11(y+2) = 0$

$\iff \boxed{-17x - 17 + 11y + 22 = 0}$ $\Rightarrow 17x - 11y = 5$!.

$$\vec{AB} \begin{vmatrix} -1-16 = -17 \\ -2+13 = 11 \end{vmatrix} \qquad \vec{BM} \begin{vmatrix} x+1 \\ y+2 \end{vmatrix}$$

— maladroit

$\iff -17x + 11y + 5 = 0$

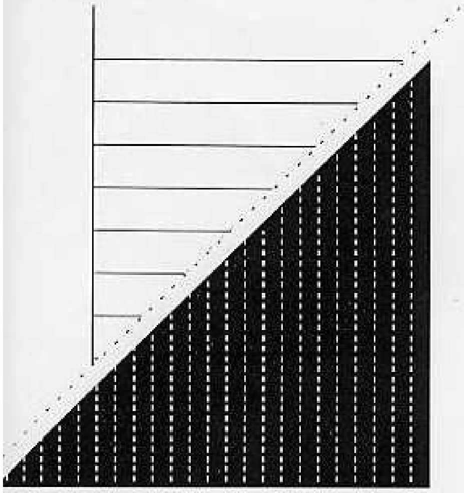
$\iff 11y = 17x - 5$

$\iff y = \frac{17}{11}x - \frac{5}{11}$

L'ensemble (F) des points M est la droite d'équation $y = \frac{17}{11}x - \frac{5}{11}$

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

Vous ne répondez pas à la question



6. liste des points de de (F) à coordonnées entières $(x ; y)$ tels que :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 200 \\ 0 \leq y \leq 200 \\ PGCD(x, y) = 5 \end{cases}$$

Soit X l'ensemble des x et Y celui des y :

$X = \{10 ; 65 ; 120 ; 175 ;\}$

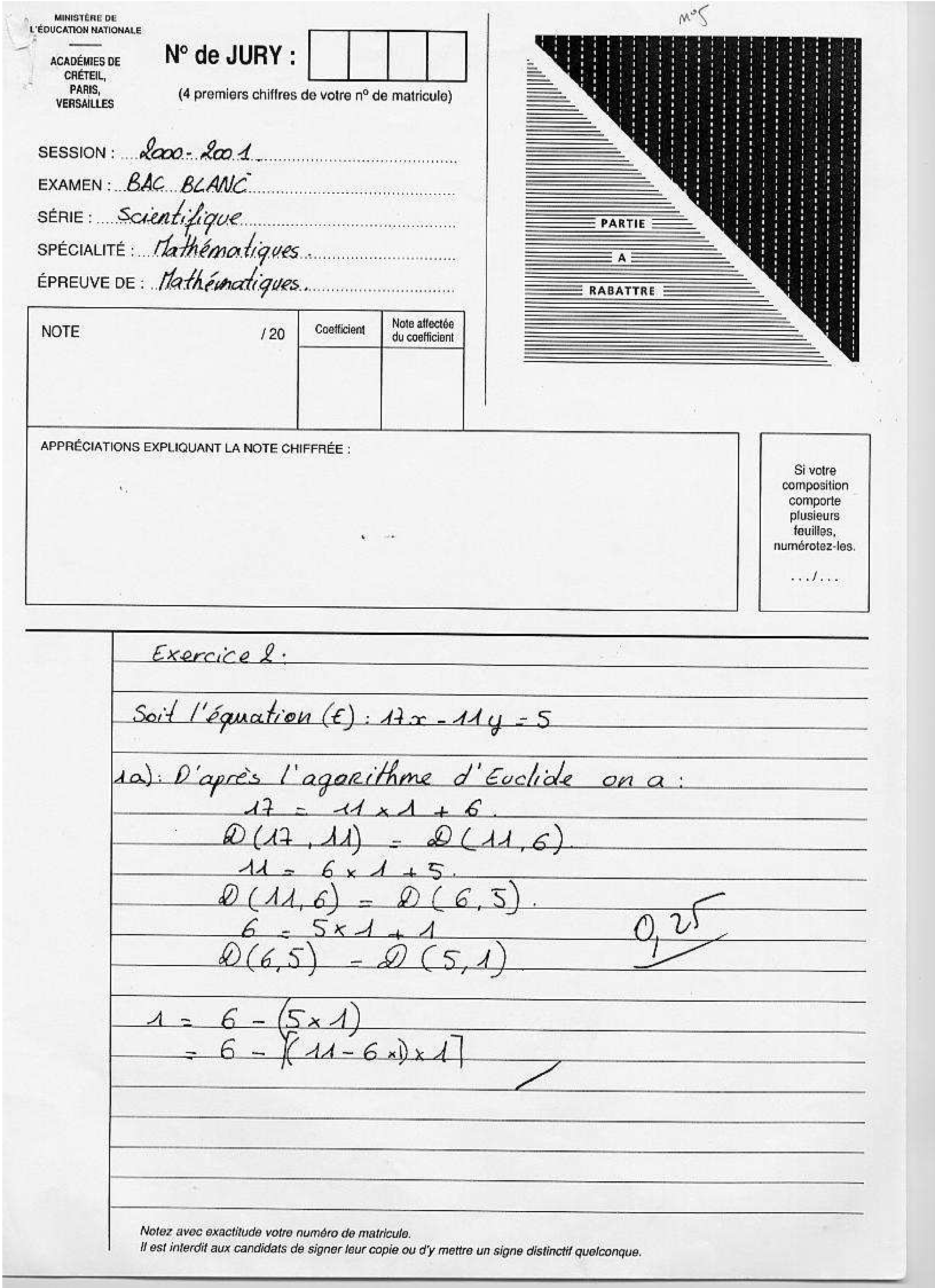
$Y = \{15 ; 100 ; 185\}$

car $x = 11 \times 5t' + 10$, $y = 17 \times 5t' + 15$, $t' \in \mathbb{Z}$

avec (x, y) solution de (A) (voir question 1.c. iii)

[…]mment rédigé d'autant plus que vous n'avez pas la solution de la question précédente.

COPIE 5



MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

ACADÉMIES DE CRÉTEIL, PARIS, VERSAILLES

N° de JURY :

(4 premiers chiffres de votre n° de matricule)

n°5

SESSION : 2000-2001

EXAMEN : BAC BLANC

SÉRIE : Scientifique

SPÉCIALITÉ : Mathématiques

ÉPREUVE DE : Mathématiques

PARTIE A RABATTRE

NOTE /20	Coefficient	Note affectée du coefficient

APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE CHIFFRÉE :

Si votre composition comporte plusieurs feuilles, numérotez-les. .../...

Exercice 2 :

Soit l'équation (E) : $17x - 11y = 5$

1a) : D'après l'agorithme d'Euclide on a :

$17 = 11 \times 1 + 6.$

$\mathcal{D}(17, 11) = \mathcal{D}(11, 6).$

$11 = 6 \times 1 + 5.$

$\mathcal{D}(11, 6) = \mathcal{D}(6, 5).$

$6 = 5 \times 1 + 1$

$\mathcal{D}(6, 5) = \mathcal{D}(5, 1)$

0,25

$1 = 6 - (5 \times 1)$

$= 6 - [(11 - 6 \times 1) \times 1]$

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

Solution particulière.

$$\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -2 \end{cases}$$

Vous l'avez trouvé comment ?

$17 \times (-1) - 11 \times (-2) = 5.$

$17x - 11y = 5$

$\Leftrightarrow 17x - 11y = 17(-1) - 11(+2)$.

$\Leftrightarrow 17(x+1) = 11(y-2)$

Comme 17 et 11 sont premiers entre eux (car 17 et 11 nomb premiers) alors 17 divise $y+2$.

De la même façon 11 divise $(x-1)$. (Théorème de

$17t = y+2 \Leftrightarrow y = 17t - 2$.

ce n'est pas la m

$11t = x+1 \Leftrightarrow x = 11t + 1$.

Si (x, y) est solution alors $x = 11t+1$ et $y = 17t - 2$ $(t \in \mathbb{Z})$

Réciproquement :

$17(11t-1) - 11(17t-2) = 5$.

$\Leftrightarrow 17 \times 11t - 17 - 11 \times 17t + 22 = 5$.

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

COPIE 6

Exercice 2 n°6

1.

$17x - 11y = 5.$

Utilisons l'algorithme d'euclide

PGCD (17, 11) = 1

$17 = 11 \times 1 + 6$

$D(17;11) = D(11;6)$

$11 = 6 \times 1 + 5$

$D(11;6) = D(6;5)$

$6 = 5 \times 1 + 1$

$D(6;5) = D(5;1).$

reprenons l'algorithme d'euclide à l'envers pour trouver une solution particulière

$1 = 6 - 5.$

$1 = (11 - 5) - 5$

$1 = 11 \times 1 - 5 \times 2$

$1 = 11 \times 1 - (11 - 6) \times 2$

$1 = 11 \times (-1) + 6 \times 2$

$1 = 11 \times (-1) + (17 - 11) \times 2$

$1 = 11 \times (-1) + 17 \times 2 - 11 \times 2$

$1 = 11 \times (-3) + 17 \times 2.$

$1 = -11 \times 3 + 17 \times 2 \quad (=) \; 5 = -11 \times 15 + 17 \times 10$

0,5

$\boxed{\text{On a donc une solution particulière de coordonnée } (10;15)}$

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

ACADÉMIES DE CRÉTEIL, PARIS, VERSAILLES

N° de JURY :

(4 premiers chiffres de votre n° de matricule)

SESSION : ....

EXAMEN : ....

SÉRIE : ....

SPÉCIALITÉ : ....

ÉPREUVE DE : ....

PARTIE A RABATTRE

NOTE /20	Coefficient	Note affectée du coefficient

APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE CHIFFRÉE :

Si votre composition comporte plusieurs feuilles, numérotez-les. 4/4.

b. $17x - 11y = 5$

$17x - 11y = 17 \times 10 - 11 \times 15$ (E)

$17(x-10) = 11(y-15)$

Si (x,y) est solution, alors 17 divise $11(y-15)$ or 17 et 11 sont premiers entre eux donc 17 divise $y-15$ (Thm de Gauss).

$y - 15 = 17t$. Soit $y = 17t + 15$

on reporte dans (E) :

$17(x-10) = +11(-15 + 17t + 15)$

$(x-10) = 11t$

$x = 11t + 10$

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

Si $x = 11t + 10$ et $y = 17t + 15$ [illegible] solution alors on peut les reporter dans l'équation initiale.

$17(11t + 10) - 11(17t + 15)$

$= 17 \times 11t + 17 \times 10 - 11 \times 17t - 11 \times 15$

[illegible]

$17 \times 11t + 17 \times 10 - 11 \times 17t - 11 \times 15 = 5.$

donc les couples $\begin{cases} x = 11t + 10 \\ y = 17t + 15 \end{cases}$ $t \in \mathbb{Z}$ sont bien solutions.

1

c) - $\delta = PGCD(11t + 10 ; 17t + 15)$

$17t + 15 = 17 \times t + 5 \times 3$

C) - soit $10, 15$, un couple d'entiers naturels solution de (E)

$PGCD(10, 15) = 5$

• $10 = 2 \times 5$ et $15 = 3 \times 5$.

- quand $\delta = 5$, $PGCD(x, y) = PGCD(10, 15)$.

Donc [illegible] sachant que $10 = 5 \times 2$ donc quand $\delta = 5$, [illegible]

[illegible] x et y.

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

COPIE 7

n°7

[redacted]

Dans le cas de plusieurs copies, agrafer ici.

Exercice 2 :

1. a- Résolvons $17u - 11v = 1$:

$17 = 11 \times 1 + 6$
$11 = 6 \times 1 + 5$
$6 = 5 \times 1 + 1$

$1 = 6 - 5 \times 1$
$1 = 6 - (11 - 6) \times 1$
$1 = 6 - 11 \times 1 + 6 \times 1$
$1 = 6 \times 2 - 11$
$1 = (17 - 11) \times 2 - 11$
$1 = 2 \times 17 - 3 \times 11$

$u = 2$
$v = -3$

On $x_0 = 5u$
$y_0 = 5v$

0,25

$5 = 10 \times 17 - 15 \times 11$

$$\begin{cases} x_0 = 10 \\ y_0 = +15 \end{cases}$$

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

b. Résolution de (E) dans $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$17x - 11y = 5 \iff 17x - 11y = 10 \times 17 - 15 \times 11$

$\iff 17(x - 10) = 11(y - 15)$

Si (x, y) est solution alors 17 divise $11(y - 15)$. Or 17 et 11 sont premiers entre eux, donc 17 divise $(y - 15)$ (théorème de Gauss).

$17t = y - 15 \quad t \in \mathbb{Z}$

$y = 17t + 15 \quad t \in \mathbb{Z}$

On reporte dans (E) :

$17(x - 10) = 11(17t + 15 - 15) \quad t \in \mathbb{Z}$

$x = 11t + 10 \quad t \in \mathbb{Z}$

Si (x, y) est solution de E, alors $x = 11t + 10$ et $y = 17t + 15$.

• Réciproquement, si $x = 11t + 10$ et $y = 17t + 15$,

$17x - 11y = 17(11t + 10) - 11(17t + 15)$

$= 17 \times 10 - 11 \times 15$

$= 5$

L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples (x, y), tels que

$$\begin{cases} x = 11t + 10 \\ y = 17t + 15 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{Z}$$

1

c.

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

COPIE 8

n°8

$\iff \begin{cases} 17(5x' \ldots \\ x = 5 \ldots \\ y = \ldots \end{cases}$ [redacted]

0

Exercice 2:

1) (E) : $17x - 11y = 5$

a) $17 = 11 \times 1 + 6$

$11 = 6 \times 1 + 5$

$6 = 5 \times 1 + 1$

$5 = 5 \times 1$

$1 = 6 - 5 \times 1$

$= 6 - (11 - 6 \times 1)$

$= 6 - 11 + 6 \times 1$

$= 6 \times 2 - 11$

$= (17 - 11 \times 1) \times 2 - 11$

$= 17 \times 2 - 11 \times 2 - 11$

$1 = 17 \times 2 - 11 \times 3$

0,25

$5 = 17 \times 10 - 11 \times 15$

Solutions particulière : $\begin{cases} x_0 = 10 \\ y_0 = 15 \end{cases}$

b) $17x - 11y = 5 \iff 17x - 11y = 17 \times 10 - 11 \times 15$

$\iff 17(x - 10) = 11(-15 + y)$

Si (x, y) est solution, alors 17 divise $11(y-15)$. Or 17 et 11 sont premiers entre eux (le dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide est 1) donc 17 divise $y - 5$.

Donc $y - 15 = 17k$, $k \in \mathbb{Z}$

$y = 17k + 15$, $k \in \mathbb{Z}$

0,25

On reporte dans $\cancel{(E)}$:

$17x - 11(17k + 15) = 5$

$\iff 17x = 5 + 11(17k + 15)$

$\iff 9x = 11k + 10$

Si (x, y) est solution, alors $x = 11k + 10$ et $y = 17k + 5$, $k \in \mathbb{Z}$.

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

Réciproquement :
si $x = 11k + 10$ et
$y = 17k + 5$,
$(E) : 17x - 11y$
$= 17(11k+10) - 11(17k+5)$
$= \cancel{10} - 5$
$= 5$
alors (x, y) est
solution.

L'ensemble des couples
solutions de l'équation $17x - 11y = 5$
est ~~des~~ l'ensemble couples de la forme :
$\begin{cases} x = 11k + 10 \\ y = 17k + 5 \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

c) $\delta = PGCD(x, y)$

i) δ divise $17x$ et δ divise $11y$ donc δ
divise toutes les combinaisons linéaires
(Théorème de Bézout).
Donc δ divise $17x - 11y = 5$ donc δ
divise 5.

Dans le cas de plusieurs copies, agrafer ici.

0,5 Or 5 est un nombre premier.
Donc les valeurs possibles de δ sont 1 ou 5.

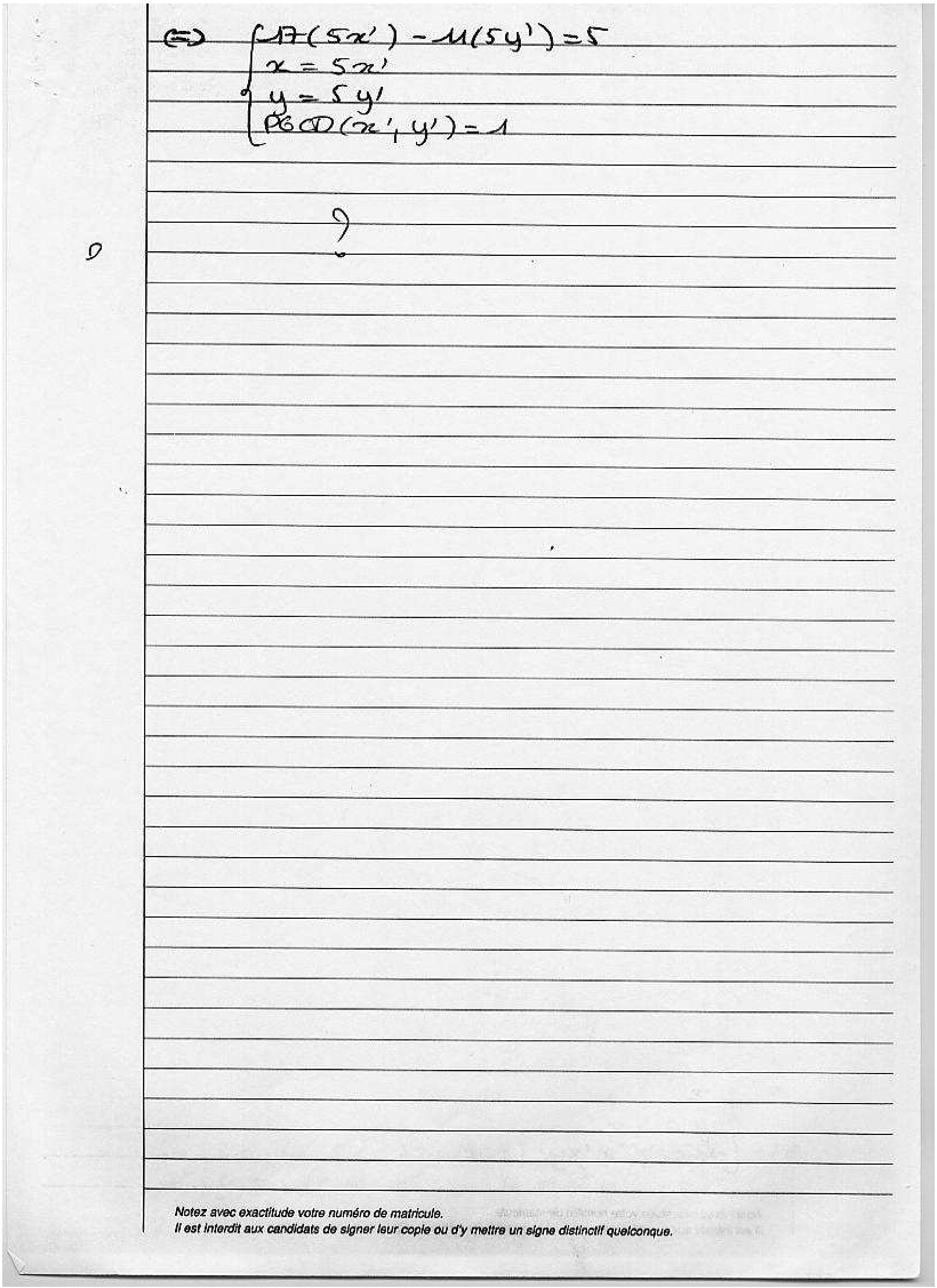
ii) $\delta = 5 \iff PGCD(x, y) = 5$
$\cancel{\iff}$ 5 divise $17x$ et 5 divise $11y$

0 Or ~~5 est premier avec 17~~
~~donc 5 divise 5 (Théorème de Gauss).~~

iii) $\begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ PGCD(x, y) = 5 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ x = 5x' \\ y = 5y' \\ PGCD(x', y') = 1 \end{cases}$

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.



$$\Leftrightarrow \begin{cases} 17(5x') - 11(5y') = 5 \\ x = 5x' \\ y = 5y' \\ PGCD(x', y') = 1 \end{cases}$$

?

0

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

COPIE 9

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

ACADÉMIES DE CRÉTEIL, PARIS, VERSAILLES

N° de JURY : | | | | |

(4 premiers chiffres de votre n° de matricule)

N°9

PARTIE A RABATTRE

SESSION : 2000 - 2001

EXAMEN : BAC BLANC

SÉRIE : SCIENTIFIQUE

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE DE : MATHÉMATIQUES

NOTE /20	Coefficient	Note affectée du coefficient

APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE CHIFFRÉE :

Si votre composition comporte plusieurs feuilles, numérotez-les.

3.19

EXERCICE 2

1-

a) Algorithme d'Euclide :

$17 = 11 \times 1 + 6$

$11 = 6 \times 1 + 5$

$6 = 5 \times 1 + 1$

$5 = 5 \times 1$

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.

Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

5 est un nombre

$\mathcal{D}(5)$ =

Donc le

0,5

2)

$1 = 6 - 5$
$1 = 6 - (11 - 6)$
$1 = (17 - 11) - (11 - (17 - 11))$
$1 = 17 - 11 - 11 + 17 - 11$
$1 = 17 \times 2 - 11 \times 3$

$5 = 5(17 \times 2 - 11 \times 3)$
$5 = 17 \times 10 - 11 \times 15$

Une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de (E) est : $\begin{cases} x_0 = 10 \\ y_0 = 15 \end{cases}$

0,5

b)

$17x - 11y = 5 \iff 17x - 11y = 17 \times 10 - 11 \times 15$

$\iff 17(x - 10) = 11(y - 15)$ (F)

Donc, 11 divise $17(x - 10)$

Or, 11 et 17 sont des nombres premiers, ils sont donc premiers entre eux.
11 divise $17(x - 10)$ et 11 et 17 sont premiers entre eux donc 11 divise $x - 10$ (Théorème de Gauss)

Donc, $x - 10 = 11k$ $(k \in \mathbb{Z})$

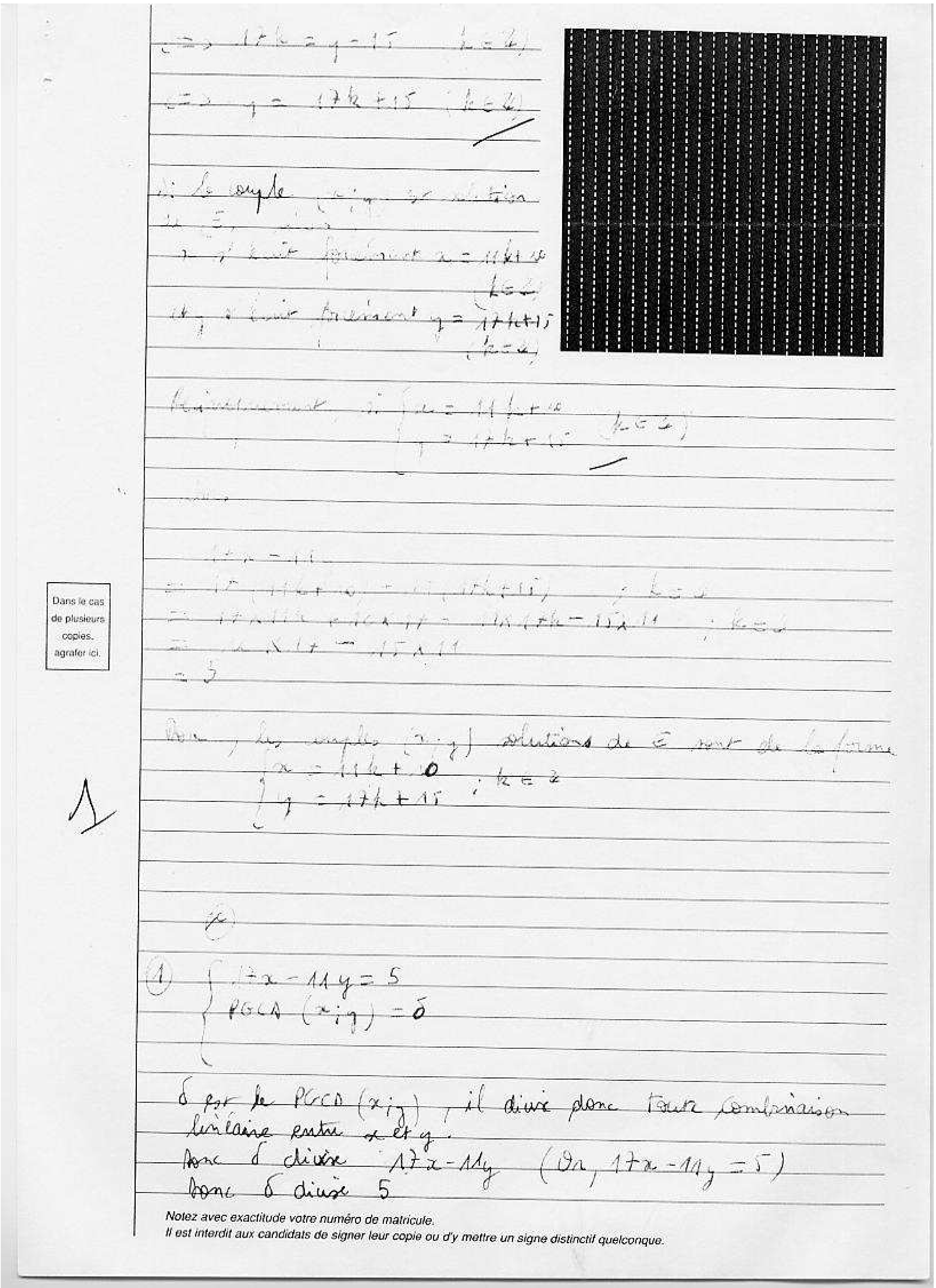
$\iff x = 11k + 10$ $(k \in \mathbb{Z})$

On reporte le résultat dans (F) :

$17(11k + 10 - 10) = 11(y - 15)$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\iff 17 \times 11k = 11(y - 15)$ $(k \in \mathbb{Z})$

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.



$\Leftrightarrow 17k = y - 15 \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow y = 17k + 15 \quad (k \in \mathbb{Z})$

[redacted]

ssi le couple (x ; y) est solution de E, alors x s'écrit forcément $x = 11k + 10$ $(k \in \mathbb{Z})$

et y s'écrit forcément $y = 17k + 15$ $(k \in \mathbb{Z})$

Réciproquement si $\begin{cases} x = 11k + 10 \\ y = 17k + 15 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

$= 3$

Donc, les couples (x ; y) solutions de E sont de la forme $\begin{cases} x = 11k + 10 \\ y = 17k + 15 \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$

1

(1) $\begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ PGCD\,(x ; y) = \delta \end{cases}$

δ est le PGCD (x ; y), il divise donc toute combinaison linéaire entre x et y.

Donc δ divise $17x - 11y$ (Or, $17x - 11y = 5$)

Donc δ divise 5

Dans le cas de plusieurs copies, agrafer ici.

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.

Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

5 est un nombre premier : il a deux diviseurs, entiers naturels

$D(5) = \{1 ; 5\}$

0,5 Donc les deux valeurs possibles pour δ sont 1 et 5.

②

$$\delta = 5 \iff \begin{cases} 5x' = x \\ 5y' = y \\ PGCD(x';y') = 1 \end{cases}$$

Donc $\delta = 5 \Rightarrow 5$ divise x ? abusif

③

$$\begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ PGCD(x;y) = 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 17(11k+10) - 11(17k+15) = 5 \\ 11k + 10 \equiv 0 \pmod 5 \\ \cancel{PGCD(x;y) = 5} \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \begin{cases} 17(11k+10) - 11(17k+15) = 5 \\ 11k \equiv 0 \pmod 5 \\ \cancel{PGCD(x;y) = 5} \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

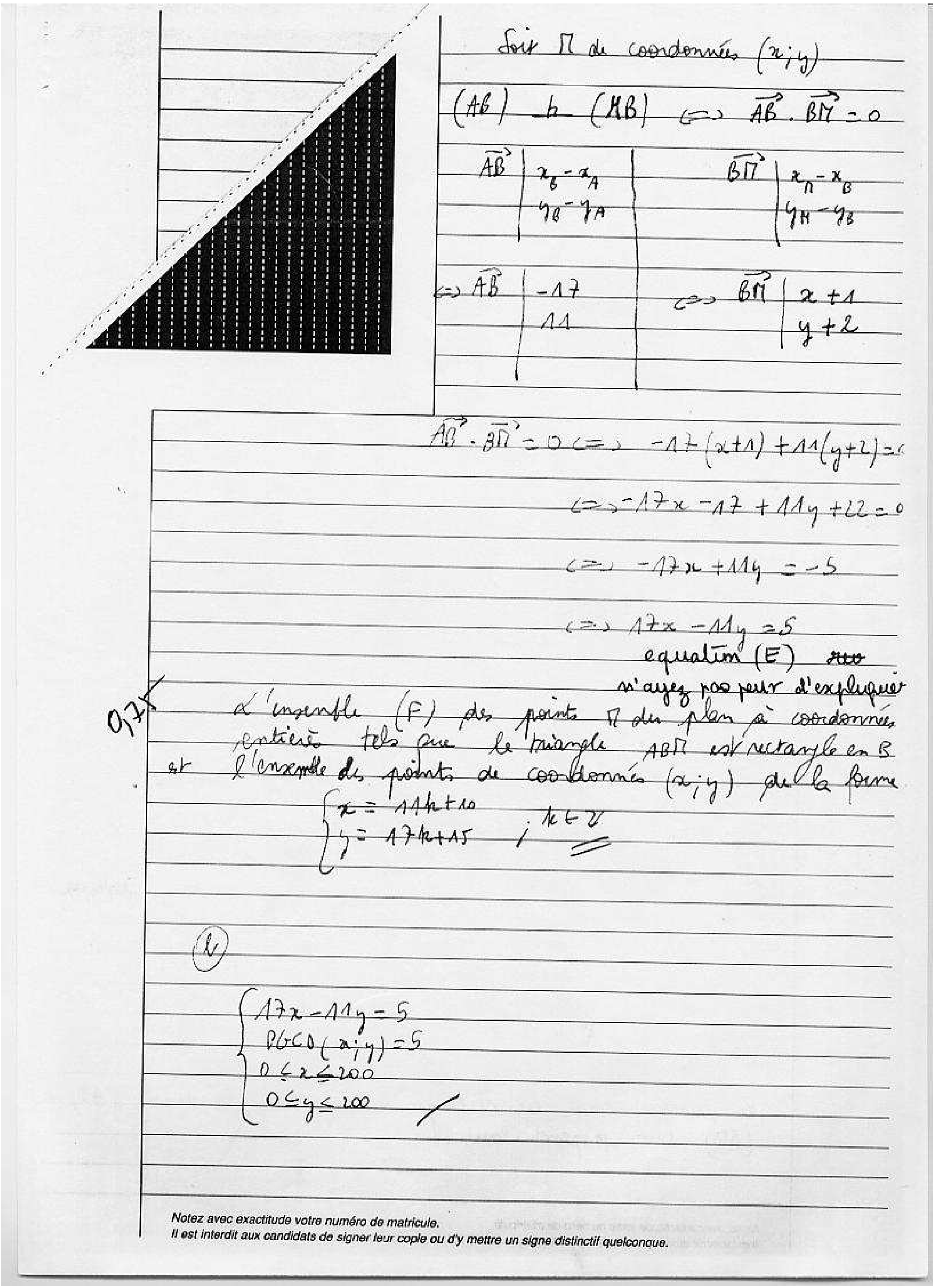
$$\iff \begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ 11k = 5k' \\ \cancel{PGCD(x;y) = 5} \end{cases} ; k \text{ et } k' \in \mathbb{Z}$$

$\iff$ 5 divise $11k$ $(k \in \mathbb{Z})$

Or, 5 et 11 sont premiers entre eux (5 et 11 sont des nombres premiers)

Donc, 5 divise k $(k \in \mathbb{Z})$

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.



Soit M de coordonnées $(x;y)$

$(AB) \perp (MB) \iff \vec{AB}\cdot\vec{BM} = 0$

$\vec{AB}\begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{vmatrix}$ $\vec{BM}\begin{vmatrix} x_M - x_B \\ y_M - y_B \end{vmatrix}$

$\iff \vec{AB}\begin{vmatrix} -17 \\ 11 \end{vmatrix}$ $\iff \vec{BM}\begin{vmatrix} x+1 \\ y+2 \end{vmatrix}$

$\vec{AB}\cdot\vec{BM} = 0 \iff -17(x+1) + 11(y+2) = 0$

$\iff -17x - 17 + 11y + 22 = 0$

$\iff -17x + 11y = -5$

$\iff 17x - 11y = 5$

équation (E)

n'ayez pas peur d'expliquer

0,75 L'ensemble (F) des points M du plan à coordonnées entières tels que le triangle ABM est rectangle en B

et l'ensemble des points de coordonnées $(x;y)$ de la forme

$\begin{cases} x = 11k + 10 \\ y = 17k + 15 \end{cases}$; $k \in \mathbb{Z}$

(2)

$\begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ PGCD(x;y) = 5 \\ 0 \leq x \leq 200 \\ 0 \leq y \leq 200 \end{cases}$

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

[redacted]

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ x = 55k + 10 \\ y = 85k + 15 \quad ; k \in \mathbb{Z} \\ PGCD(x;y) = 5 \\ 0 \leq x \leq 200 \\ 0 \leq y \leq 200 \end{cases}$$

Les points M de (F) à coordonnées entières $(x;y)$ tels que $PGCD(x;y) = 5$, $0 \leq x \leq 200$, $0 \leq y \leq 200$ sont de la forme : $\begin{cases} x = 55k + 10 \\ y = 85k + 15 \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$

avec $0 \leq x \leq 200$ et $0 \leq y \leq 200$

$k = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \end{cases}$

Dans le cas de plusieurs copies, agrafer ici.

SVD

$k = 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 65 \\ y = 100 \end{cases}$

$k = 2 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 120 \\ y = 185 \end{cases}$

975

Les solutions sont :
$M_0(10;15)$, $M_1(65;100)$, $M_2(120;185)$

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

COPIE 10

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

ACADÉMIES DE CRÉTEIL, PARIS, VERSAILLES

N° de JURY :

(4 premiers chiffres de votre n° de matricule)

n° 1

SESSION : ....

EXAMEN : ....

SÉRIE : ....

SPÉCIALITÉ : ....

ÉPREUVE DE : ....

PARTIE A RABATTRE

NOTE /20	Coefficient	Note affectée du coefficient

APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE CHIFFRÉE :

Si votre composition comporte plusieurs feuilles, numérotez-les. 3./...

Exercice 2 :

1. a. Algorithme d'Euclide :

$17 = 11 \times 1 + 6$

$11 = 6 \times 1 + 5$

$6 = 5 \times 1 + 1$

donc $1 = 6 - 5 \times 1$

$= 6 - (11 - 6 \times 1) \times 1$

$= 6 - 11 + 6$

$= 2 \times 6 - 11$

$= 2 \times (17 - 11) - 11$

$= 2 \times 17 - 2 \times 11 - 11$

$1 = 2 \times 17 - 3 \times 11$

donc $5 = 10 \times 17 - 15 \times 11$

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

PGCD (x, y

donc δ

donc

Réci

Nous avons donc une solution particulière $(x_0 ; y_0) = (10 ; 15)$

b. (E) : $17x - 11y = 5$

$\Leftrightarrow 17x - 11y = 10 \times 17 - 15 \times 11$

$\Leftrightarrow 17(x - 10) = 11(y - 15)$

17 et 11 sont premiers donc PGCD(17, 11) = 1

17 divise $11(y - 15)$

et PGCD(17, 11) = 1

donc d'après le théorème de Gauss, 17 divise $y - 15$

soit $y - 15 = 17t$

soit $y = 17t + 15$ avec t dans $\mathbb{Z}$.

$17(x - 10) = 11(y - 15)$

0,5

$\Leftrightarrow 17(x - 10) = 11(17t + 15 - 15)$

$\Leftrightarrow 17(x - 10) = 11 \times 17t$

$\Leftrightarrow x - 10 = 11t$

$\Leftrightarrow x = 11t + 10$. avec $t \in \mathbb{Z}$. .

Les couples (x, y) solutions de E sont les couples (x, y) vérifiants :

$$\begin{cases} x = 11t + 10 \\ y = 17t + 15 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{Z}.$$

insuffisant : la vérification ?

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

5

c. (x, y) solution de (E)

x et y dans $\mathbb{N}$.

$\delta = PGCD(x, y)$

et

$\begin{cases} x = 11t + 10 \\ y = 14t + 15 \end{cases} \quad t \in \mathbb{N}$

[redacted]

donc δ divise x,

et δ divise y,

donc δ divise toutes combinaisons linéaires de x et y, soit δ divise $ux + vy$ avec u et v dans $\mathbb{Z}$.

donc δ divise $17x - 11y$

$$17x - 11y = 17(11t + 10) - 11(17t + 15)$$

$$= 17 \times (11t) + 17 \times 10 - \cancel{17 \times (11t)} - (11 \times 15)$$

$$= 17 \times 10 - 11 \times 15$$

$$= 170 - 165$$

$$17x - 11y = 5$$

donc δ divise 5

5 est premier donc $\delta = 5$ ou $\delta = 1$.

0,5

Dans le cas de plusieurs copies, agrafer ici.

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

PGCD $(x, y) = \delta$

donc δ divise x } par difinition du PGCD

donc si $\delta = 5$, alors 5 divise x.

Réciproque :

Si 5 divise $x = 11t + 10$

donc 5 divise $11t + 10$

donc $11t + 10 = 5k$

donc $11t = 5(k - 2)$

donc 5 divise $11t$

Or PGCD $(11, 5) = 1$

Donc 5 divise t (théorème de Gauss).

Donc $t = 5q$

Or $y = 17t + 15$

donc $y = 17(5q) + 3 \times 5$

$y = 5(17q + 3)$

donc 5 divise y.

On a montré que si 5 divise x, alors 5 divise y. Donc 5 est un diviseur commun à (x, y). Or nous avons vu que PGCD(x, y) peut être égal à 5 ou à 1. Donc 5 est le PGCD(x, y) soit $5 = \delta$.

Conclusion : $\delta = 5 \iff 5$ divise x.

0,75

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

$$\begin{cases} 17x - 11y = 5 \quad (E) \\ PGCD(x,y) = 5 \end{cases}$$

Les couples (x, y) solutions du sont les couples vérifiants :

$$\begin{cases} x = 11t + 10 \\ y = 17t + 15 \end{cases} \quad t \in \mathbb{N}$$

$PGCD(x,y) = 5 \ \cancel{\Rightarrow} \ 5 \mid x$

donc 5 divise $11t + 10$

Vous n'avez plus l'équivalence logique

et 5 divise $17t + 15$

donc $11t + 10 = 5q$

et $17t + 15 = 5q'$

donc $11t = 5(q - 2)$

et $17t = 5(q' - 3)$

donc 5 divise $11t$ et $17t$.

Or $PGCD(5, 11) = 1$

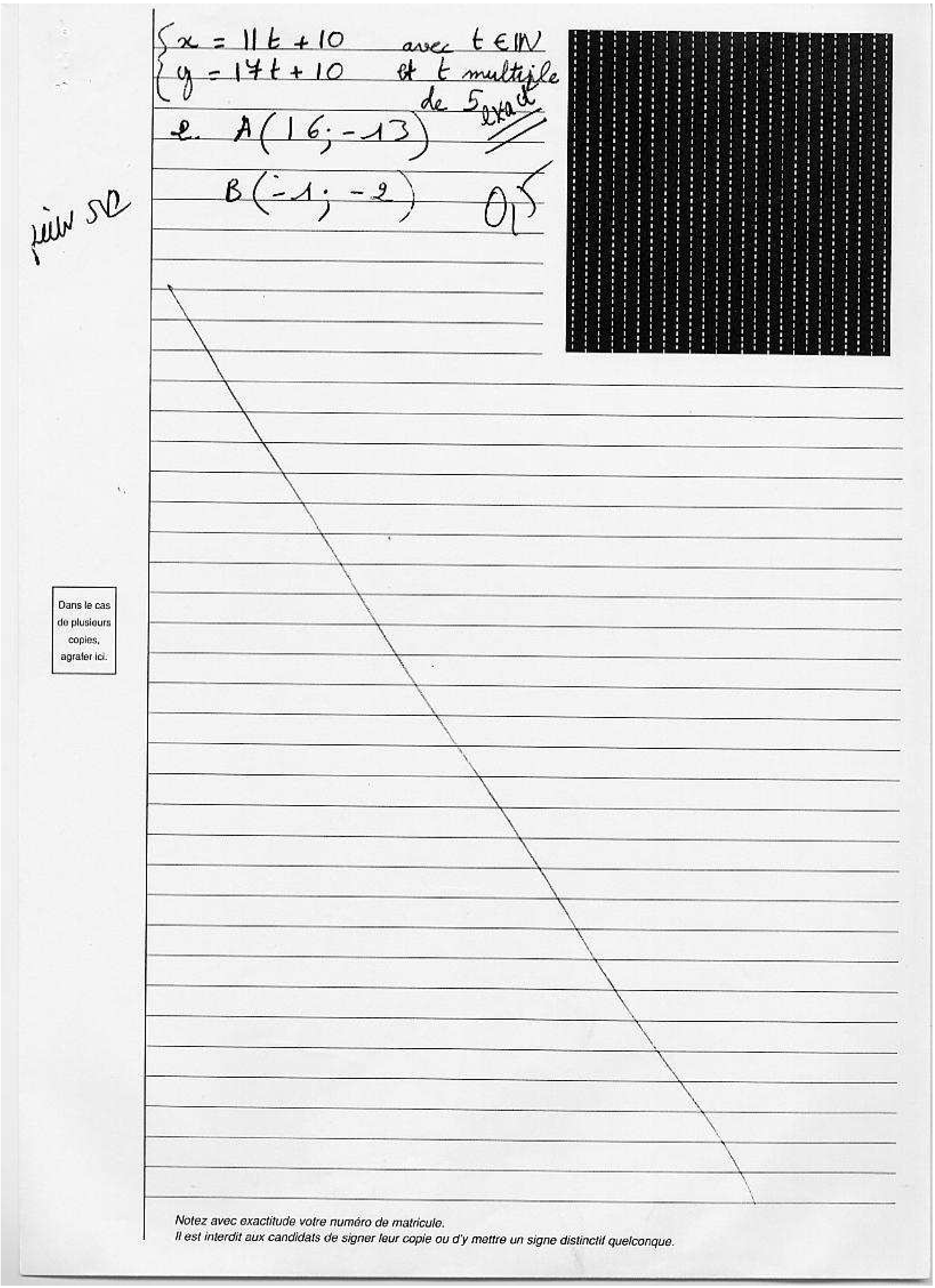
et $PGCD(5, 17) = 1$

donc 5 divise t (théorème de Gauss).

L'ensemble des couples (x, y) solutions du système $\begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ PGCD(x,y) = 5 \end{cases}$

la vérification s'impose

est l'ensemble des couples (x, y) vérifiants



$\begin{cases} x = 11t + 10 & \text{avec } t \in \mathbb{N} \\ y = 17t + 10 & \text{et } t \text{ multiple de } 5 \end{cases}$ exact

2. $A(16 ; -13)$

$B(-1 ; -2)$ 0,5

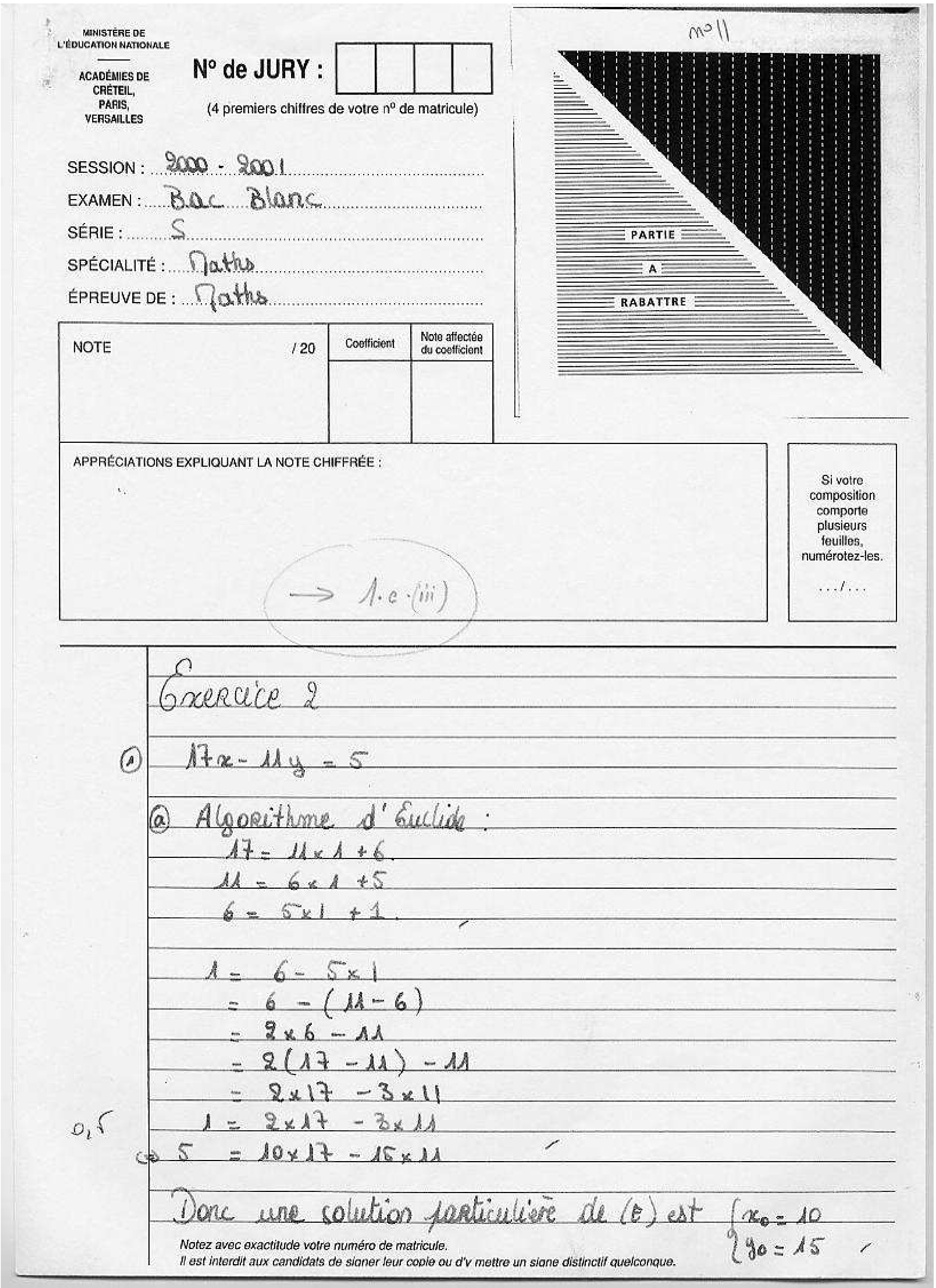
juin SV

[redacted]

Dans le cas de plusieurs copies, agrafer ici.

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

COPIE 11



MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

ACADÉMIES DE CRÉTEIL, PARIS, VERSAILLES

N° de JURY :

(4 premiers chiffres de votre n° de matricule)

n°11

SESSION : 2000 - 2001

EXAMEN : Bac Blanc

SÉRIE : S

SPÉCIALITÉ : Maths

ÉPREUVE DE : Maths

PARTIE A RABATTRE

NOTE /20	Coefficient	Note affectée du coefficient

APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE CHIFFRÉE :

→ 1.c.(iii)

Si votre composition comporte plusieurs feuilles, numérotez-les. .../...

Exercice 2

(1) $17x - 11y = 5$

(a) Algorithme d'Euclide :

$17 = 11 \times 1 + 6$

$11 = 6 \times 1 + 5$

$6 = 5 \times 1 + 1$

$1 = 6 - 5 \times 1$

$= 6 - (11 - 6)$

$= 2 \times 6 - 11$

$= 2(17 - 11) - 11$

$= 2 \times 17 - 3 \times 11$

0,5 $1 = 2 \times 17 - 3 \times 11$

$\Leftrightarrow 5 = 10 \times 17 - 15 \times 11$

Donc une solution particulière de (E) est $\begin{cases} x_0 = 10 \\ y_0 = 15 \end{cases}$

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

(b) Résolution de (E)

$17x - 11y = 17\times 10 - 11\times 15$

$\Leftrightarrow 17(x-10) = 11(y-15) \quad (1)$

Si x et y sont solutions, alors, 17 divise $11(y-15)$. OR 17 et 11 sont premiers entre eux, donc 17 divise $(y-15)$ (théorème de Gauss).

d'où $y - 15 = 17t \quad (t \in \mathbb{Z})$

$y = 17t + 15.$

On remplace y par $17t+15$ dans (1).

$17(x-10) = 11(17t+15-15)$

$\Leftrightarrow \quad = 11\times 17t$

$\Leftrightarrow x - 10 = 11t$

$\Leftrightarrow x = 11t + 10.$

Si x et y sont solutions, x et y sont de la forme $\begin{cases} x = 11t+10 \\ y = 17t+15 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{Z}$

0,75

Réciproquement si $x = 11t+10$ et $y = 17t+15$

$(E) \Leftrightarrow 17(11t+10) - 11(17t+15) = 187t + 170 - 187t - 165$

$= 5$ Donc... ?

(c) $\delta = PGCD(x, y)$.

Donc δ divise x et y et δ divise toute combinaison linéaire de x et y donc δ divise $17x - 11y = 5$

Donc δ divise 5. Comme 5 est premier, sa seule décomposition est $5 = 5\times 1$

0,5

d'où $\delta = 1$ ou $\delta = 5$.

Si $PGCD(x, y) = 5$ alors $\begin{cases} x = 5x' \\ y = 5y' \\ PGCD(x'; y') = 1 \end{cases}$

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

0,25

donc 5 divise x.

oui

[redacted]

Résolution du système :

$$\begin{cases} 17x - 11y = 5 & (E) \\ PGCD(x, y) = 5 \end{cases}$$

On a $\begin{cases} x = 5x' \\ y = 5y' \\ PGCD(x', y') = 1 \end{cases}$

Remplaçons x et y dans (E)

$17(5x') - 11 \times 5y' = 5$

$5(17x' - 11y') = 5$

$17x' - 11y' = 1$.

0

D'après ① ⓐ une solution particulière est $x'_0 = 2$

$y'_0 = 3$

$x' = 2 \Rightarrow x = 10$?

$x' = 3 \Rightarrow y = 15$

Dans le cas de plusieurs copies, agrafer ici.

② $A(16, -13)$ $B(-1, -2)$

0

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.

Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

COPIE 12

mol2

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

ACADÉMIES DE CRÉTEIL, PARIS, VERSAILLES

N° de JURY :

(4 premiers chiffres de votre n° de matricule)

SESSION : ....

EXAMEN : ....

SÉRIE : ....

SPÉCIALITÉ : ....

ÉPREUVE DE : ....

PARTIE A RABATTRE

NOTE /20	Coefficient	Note affectée du coefficient

APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE CHIFFRÉE :

→ 1.c.(ii)

Si votre composition comporte plusieurs feuilles, numérotez-les. 3./6

Exercice n°2.

1°/ (E) : $17x - 11y = 5$

a) On fait l'algorithme d'Euclide.

$17 = 11 \times 1 + 6$

$11 = 6 \times 1 + 5$

$6 = 5 \times 1 + 1$

$5 = 5 \times 1 + 0.$

$5 = 11 - 6 \times 1$

0,5 $5 = 11 - (17 - 11)$

$5 = -1 \times 17 - 2 \times (-11)$

Une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de (E) est $(x_0 ; y_0) = (-1 ; -2)$.

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.

b) Résolution de E.

$17x - 11y - 5 = 0.$

$17(x+1) - 11(y+2) = 0.$

$17(x+1) = 11(y+2)$

~~On voit que~~

donc 17 divise $11(y+2)$
et de plus 17 et 11 sont
premiers entre eux donc
17 divise $(y+2)$ (théorème de GAUSS)

0,5

donc $y+2 = 17k$
$\boxed{y = 17k - 2}$

~~Pour trouver x, on remplace y par 17k-2 dans (E) :~~

~~$17x - 11(17k-2) = 5$~~

~~$17x = 5 + 11(17k-2)$~~

~~$17x = 11 \times 17k + 22 \times 5$~~

mal rédigé

De même 11 divise $17(x+1)$
et 11 et 17 sont premiers entre eux
donc 11 divise $(x+1)$ (théorème de GAUSS).
donc $x+1 = 11k$
$\boxed{x = 11k - 1}$.

réciproque ?

c) $\delta = PGCD(x ; y)$
$(x ; y)$ couple d'entiers solutions de (E).

• Les valeurs possibles de δ sont : les
diviseurs de 5 c'est-à-dire 1 ou 5.
expliquez

0,25

• Si $\delta = 5$ alors δ divise x car
δ est le $PGCD(x, y)$.
insuffisant.

?

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

COPIE 13

n°13

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

ACADÉMIES DE CRÉTEIL, PARIS, VERSAILLES

N° de JURY :

(4 premiers chiffres de votre n° de matricule)

SESSION : 2000 - 2001

EXAMEN : Bac - Blan

SÉRIE : S

SPÉCIALITÉ : Mathématiques

ÉPREUVE DE : Mathématiques

PARTIE A RABATTRE

NOTE /20	Coefficient	Note affectée du coefficient

APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE CHIFFRÉE :

Si votre composition comporte plusieurs feuilles, numérotez-les. 2/4

Exercice 2.

1. soit l'équation (E) : $17x - 11y = 5$ d'inconnues x et y dans $\mathbb{Z}$.

a- D'après l'algorithme d'Euclide, les solutions particulière de (E) sont $(x_0 ; y_0)$

$17 = 11 \times 1 + 6$

~~particulière~~

$11 = (17 - 11) \times 1 + 5$

$6 = (17 \times 1 - 11 \times 2) \times 1 + 1$

mal expliqué.

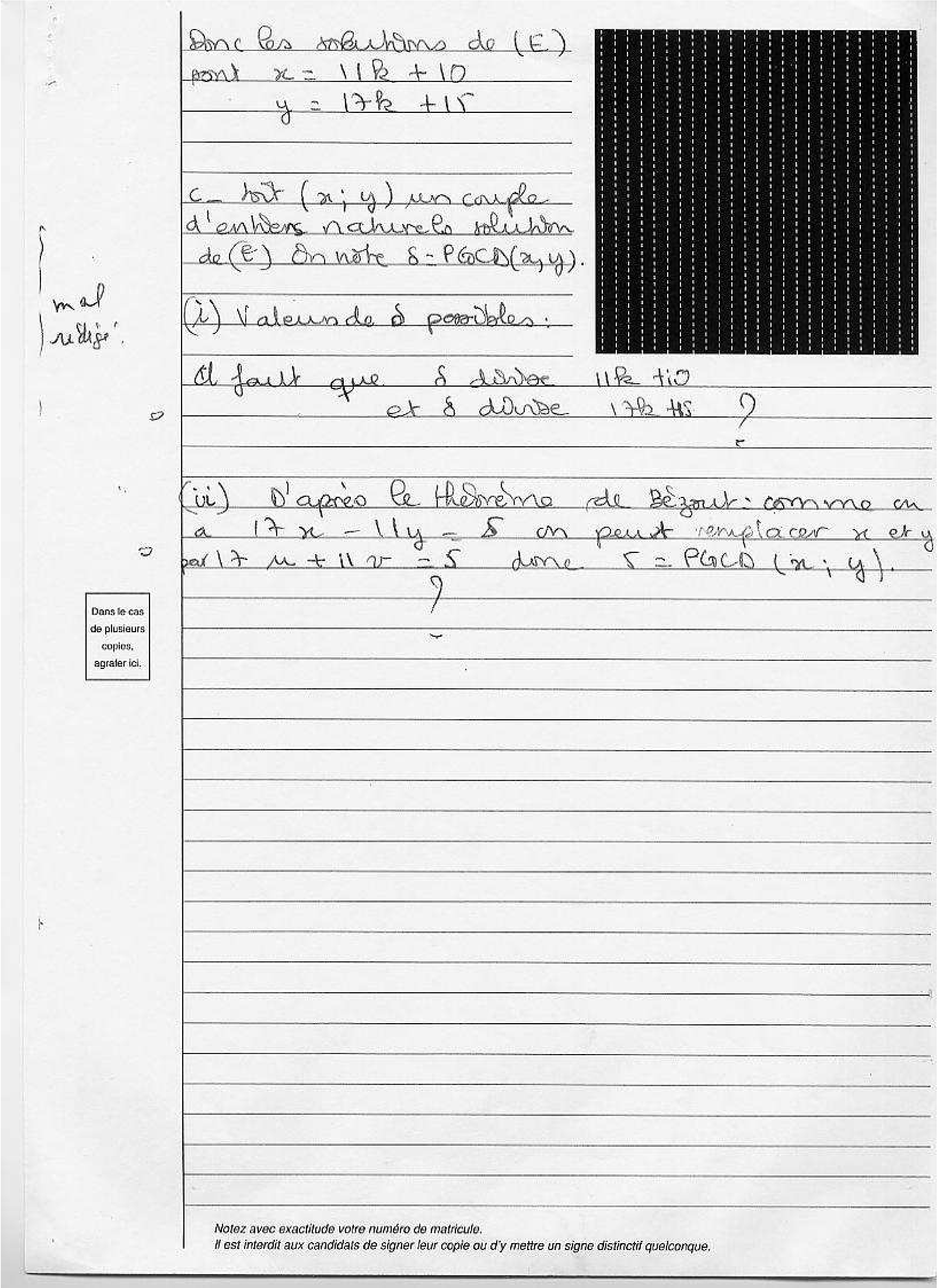
$5 = (17 \times 11 + 17 \times 1 - 11 \times 2) \times 5 + 0$

$5 = 17 \times 10 - 11 \times 15 + 0$

0,25

$x_0 = 10 \qquad y_0 = 15.$

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.



Donc les solutions de (E) sont $x = 11k + 10$
$y = 17k + 15$

[redacted]

c_ Soit $(x ; y)$ un couple d'entiers naturels solution de (E) On note $\delta = PGCD(x, y)$.

(i) Valeurs de δ possibles :

Il faut que δ divise $11k + 10$
et δ divise $17k + 15$?

mal rédigé.

(ii) D'après le théorème de Bézout : comme on a $17x - 11y = \delta$ on peut remplacer x et y par $17u + 11v = \delta$ donc $\delta = PGCD(x ; y)$.
?

Dans le cas de plusieurs copies, agrafer ici.

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

b- Résoudre (E)

On a : $17x - 11y = 5$

$17x - 11y = 17x_0 - 11y_0 = 5$

$17(x - x_0) + 11(y_0 - y) = 5$

Or $x_0 = 10$ et $y_0 = 15$

Donc on a : $17(x - x_0) = 11(y - y_0) = 5$

On a, d'après le théorème de Gauss on sait que 17 et 11 sont premier entre eux donc $17k = 11(y - y_0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$17k = (y - y_0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

on sait que $y_0 = 15$

$17k + 15 = y$.

De même, on sait que $11k' = 17(x - x_0)$ avec $k' \in \mathbb{Z}$ d'après le théorème de Gauss, on a, 17 et 11 qui sont premier entre eux donc $11k'$ divise $(x - x_0)$ alors on a :

$11k' = x - x_0$ avec $k' \in \mathbb{Z}$ et $x_0 = 10$

0,25 $11k' + 10 = x$.

Les solutions de (E) sont $x = 11k' + 10$ et $y = 17k + 15$.

$17(11k' + 10) - 11(17k + 15) = 5$

$187k' + 170 - 187k - 165 - 5 = 0$

$187\, kk' = 0$

$kk' = 0$

$k = k$? ?

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

COPIE 14

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

ACADÉMIES DE CRÉTEIL, PARIS, VERSAILLES

N° de JURY :

(4 premiers chiffres de votre n° de matricule)

n°14 .

SESSION : 2000 - 2001

EXAMEN : BAC BLANC

SÉRIE : S

SPÉCIALITÉ :

ÉPREUVE DE : MATHEMATIQUES

PARTIE A RABATTRE

NOTE /20	Coefficient	Note affectée du coefficient

APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE CHIFFRÉE :

Si votre composition comporte plusieurs feuilles, numérotez-les. 3./.6

EXERCICE 2

1. (E) : $17x - 11y = 5$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$

on cherche d'abord une solution pour $17x - 11y = 1$

(a). • Algorithme d'Euclide

$17 = 11 \times 1 + 6$

$11 = 6 \times 1 + 5$

$6 = 5 \times 1 + 1$

pour trouver une solution particulière on remonte l'algorithme :

$1 = 6 - 5 \times 1$

$= 6 - 5$

$= 6 - (11 - 6)$

$= 6 \times 2 - 11$

$= 2(17 - 11) - 11$

0,5 $= 17 \times 2 - 3 \times 11$

une solution particulière est

$$\boxed{\begin{cases} x_0 = 10 \\ y_0 = 15 \end{cases}}$$

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

(b) résolution de (E) :

$17x - 11y = 5$

$\Leftrightarrow 17x - 11y = 17 \times 10 - 11 \times 15$

$\Leftrightarrow 17(x-10) = 11(-15+y)$

si x et y sont solutions alors 17 divise $11(-15+y)$. Or 17 et 11 sont premiers entre eux (cf. algorithme d'Euclide) alors 17 divise $-15+y$ (Théorème de Gauss) tel que

$-15+y = 17k$, $k \in \mathbb{Z}$

$y = 17k + 15$

on remplace dans (E)

~~(E)~~ $\Leftrightarrow 17(x-10) = 11(-15+17k+15)$

$\Leftrightarrow (x-10) = 11k$

0,5 $\Leftrightarrow x = 11k+10$, $k \in \mathbb{Z}$

Donc $S = \{(11k+10 ; 17k+15)\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

réciproque : si $x = 11k+10$

et $y = 17k+15$

~~sont solutions de (E)~~ alors

$17(11k+10) - 11(17k+15) = 5$. donc ...

(c) $\delta = PGCD(x, y)$

-i- $PGCD(x ; y) = \delta$ alors δ divise toute

0,5 combinaison linéaire de x et y donc δ divise 5. $\delta = 1$ ou $\delta = 5$

0 -ii- $\delta = 5$ ~~$\Leftrightarrow$~~ 5 divise $17x$ et $11y$

$\Leftrightarrow$ 5 divise x car 17 et 5 sont premiers entre eux.

-iii- $\begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ PGCD(x, y) = 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

[redacted]

$\Leftrightarrow \begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ PGCD(x, y) = 5 \\ x = 5x' \\ y = 5y' \\ PGCD(x', y') = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 17 \times 5x' - 11 \times 5y' = 5 \\ PGCD(x, y) = 5 \\ x = 5x' \\ y = 5y' \\ PGCD(x', y') = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 17x' - 11y' = 1 \\ PGCD(x, y) = 5 \\ x = 5x' \\ y = 5y' \\ PGCD(x'; y') = 1 \end{cases}$

Dans le cas de plusieurs copies, agrafer ici.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 10 \text{ et } y' = 15 \\ PGCD(x, y) = 5 \\ x = 5x' \\ y = 5y' \\ PGCD(x'; y') = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 75 \\ PGCD(50, 75) = 5 \end{cases}$

$S = \{(50, 75)\}$

2. $A(16; -13)$ et $B(-1; -2)$

a. ABM triangle rectangle en $B \Leftrightarrow AM^2 = AB^2 + BM^2$

$\Leftrightarrow (x_M + y_M - (x_A + y_A))^2 = (x_B + y_B - (x_A + y_A))^2 + (x_M + y_M - (x_B + y_B))^2$

$\Leftrightarrow (x_M + y_M - 16 + 13)^2 = (-1 - 2 - 16 + 13)^2$

$= (x_M + y_M + 3)^2$

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

$$\Leftrightarrow \quad (x_n + y_n - 3)^2 = 36(x_n + y_n + 3)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_n + y_n - 3) = 6(x_n + y_n + 3)$$

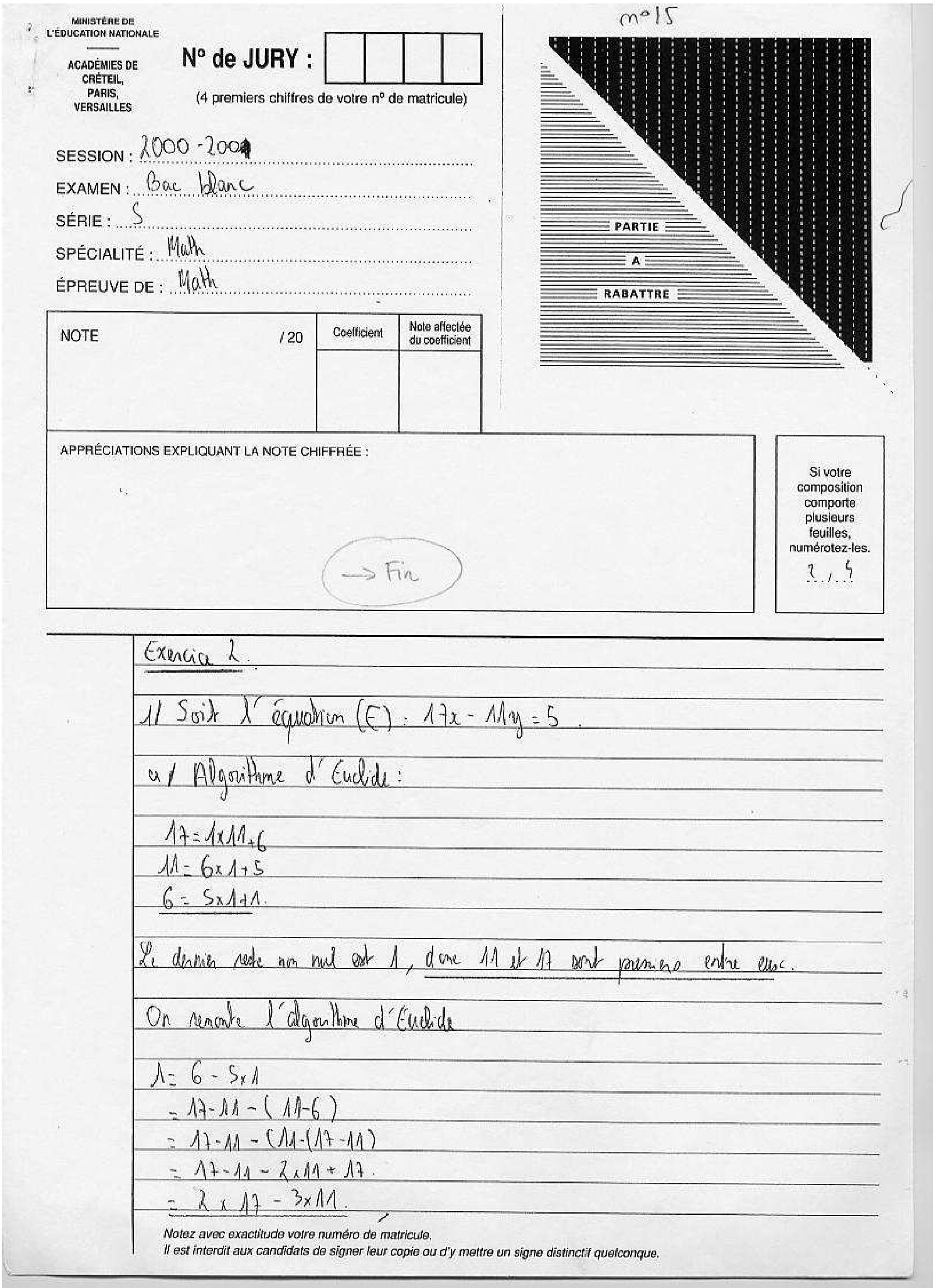
$$\Leftrightarrow \quad x_n + y_n - 3 - 6x_n - 6y_n - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -5x_n - 5y_n - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -x_n - y_n - 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -x_n - y_n = 21$$

COPIE 15



MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

ACADÉMIES DE CRÉTEIL, PARIS, VERSAILLES

N° de JURY :

(4 premiers chiffres de votre n° de matricule)

n°15

SESSION : 2000-2001

EXAMEN : Bac blanc

SÉRIE : S

SPÉCIALITÉ : Math

ÉPREUVE DE : Math

PARTIE A RABATTRE

NOTE /20	Coefficient	Note affectée du coefficient

APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE CHIFFRÉE :

→ Fin

Si votre composition comporte plusieurs feuilles, numérotez-les. 1 / 5

Exercice 1.

1/ Soit l'équation (E) : $17x - 11y = 5$.

a/ Algorithme d'Euclide :

$17 = 1 \times 11 + 6$
$11 = 6 \times 1 + 5$
$6 = 5 \times 1 + 1$.

Le dernier reste non nul est 1, donc 11 et 17 sont premiers entre eux.

On remonte l'algorithme d'Euclide

$1 = 6 - 5 \times 1$
$= 17 - 11 - (11 - 6)$
$= 17 - 11 - (11 - (17 - 11))$
$= 17 - 11 - 2 \times 11 + 17$.
$= 2 \times 17 - 3 \times 11$.

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

On a : $17 \times 2 - 11 \times 3 = 1$.

Donc on a : $17 \times 10 - 11 \times 15 = 5$.

0,5

$\varphi(x_0 = 10 ; y_0 = 15)$

b/ $17x - 11y = 5$

$\Leftrightarrow 17x - 11y = 17 \times 10 - 11 \times 15 = 5$

$\Leftrightarrow 17(x-10) = 11(y-15)$.

Si (x,y) est solution, 17 divise $11(y-15)$, comme 11 et 17 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 17 divise $(y-15)$.

On a donc.

$y - 15 = 17k$

$y = 17k + 15$. avec $k \in \mathbb{Z}$

On revient dans (E) :

$17(x-10) = 11(17k + 15 - 15)$.

$17(x-10) = 11 \times 17k$.

0,75 $(x-10) = 11k$.

$x = 11k + 10$. avec $k \in \mathbb{Z}$

Réciproque ?

Les solutions de (E) sont x de type $11k+10$ et y de type $17k+15$

c/ (i). On a $17x - 11y = 5$, le PGCD(x,y) divise toute combinaison linéaire de (x,y), donc il divise 5. 5 étant premier, les valeurs possible de δ sont donc 1 et 5

0,5

(ii) : $\delta = 5 \Leftrightarrow$ PGCD$(x,y) = 5$

0 Donc si $\delta = 5$, 5 divise x et 5 divise y. ?

(iii) : $\begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ \text{PGCD}(x,y) = 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \cancel{15}9 \\ \text{PGCD}(x,y) = 5. \end{cases}$

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

[redacted]

$\Leftrightarrow \begin{cases} 11k - 10 = 5q \\ PGCD(y,x) = 5. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 11k = 5(q-2) \\ PGCD(y,x) = 5. \end{cases}$

Si (q,k) est solution, donc 5 divise $11k$. Comme 5 et 11 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, 5 divise k.

Les entiers naturels x et y solution de $\begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ PGCD(x,y) = 5 \end{cases}$ sont $\begin{cases} x = 11k+10 \\ y = 17k+15 \end{cases}$ avec $k = 5q$ et $q \in \mathbb{Z}$

oui

2/a/ $A(16;-13)$ et $B(-1;-2)$.

$\vec{AB}\begin{vmatrix} -1-16 \\ -2+13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 \\ 11 \end{vmatrix}$. $\quad \vec{MB}\begin{vmatrix} x+1 \\ y+2 \end{vmatrix}$

Pour $\vec{MB}$ soit perpendiculaire à $\vec{AB}$, il ~~faut~~ suffit que

$x_{\vec{AB}} \times (x+1) + y_{\vec{AB}} \times (y+2) = 0$.

$\Leftrightarrow -17(x+1) + 11(y+2) = 0$

$\Leftrightarrow -17x + 11y = 17 - 22$

0,5

$\Leftrightarrow -17x + 11y = -5$

$\Leftrightarrow 17x - 11y = 5.$

L'ensemble de P est : $\begin{cases} x = 11k+10 \\ y = 17k+15 \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

b/ On a vu précédemment que les entiers naturels x et y solution de $\begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ PGCD(x,y) = 5 \end{cases}$ sont $\begin{cases} x = 11k+10 \\ y = 17k+15 \end{cases}$ avec $k = 5q$ et $q \in \mathbb{Z}$

Dans le cas de plusieurs copies, agrafer ici.

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

pour $x \in [0 ; 200]$	pour $y \in [0 ; 200]$
$q = 0$	$q = 0$
$11 \times 5 \times 0 - 10 = -10$ ne marche pas.	$17 \times 5 \times 0 - 15 = -15$ ne marche pas
$q = 1$	$q = 1$
$11 \times 5 - 10 = 45$	$17 \times 5 - 15 = 70$
$q = 2$	$q = 2$
$11 \times 10 - 10 = 110$	$17 \times 10 - 15 = 155$
$q = 3$	$q = 3$
$11 \times 15 - 10 = 155$	$17 \times 15 - 15 = 240$ ne marche pas.
$q = 4$	
$11 \times 20 - 10 = 210$ ne marche pas.	

0,25

Les points M de (F) à coordonnées entière $(x ; y)$ tels que $x \in [0 ; 200]$; $y \in [0 ; 200]$ et PGCD $(x, y) = 5$ sont.

$M_1 (45 ; 70)$ et $M_2 (110 ; 155)$.

Notez avec exactitude votre numéro de matricule.
Il est interdit aux candidats de signer leur copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.

ANNEXE Chapitre 8 :

Transcriptions de la recherche des groupes d'élèves A et B

TRANSCRIPTION DE LA RECHERCHE DU GROUPE A

Episode 1

A ? : a égal b racine de 2 /
A1 : Eh, a et b sont premiers entre eux ?
A ? : Non, là on sait rien sur a et b.
A1 : Oui mais s'il est rationnel normalement c'est de la forme irréductible donc a et b.
A ? : Oui.
A ? : C'est vrai.
A ? : J'ai dit c'est vrai.
A1 : Donc, a devrait être multiple de racine de 2.
A ? : Regarde si tu l'écris comme ça.
A ? : Oui.
A ? : a divise racine de 2.
A ? : Oui.
A ? : Or il peut pas diviser racine de 2.
A1 : Non racine de 2 il divise a.
A ? : Ah oui, excuse-moi, racine de 2 il divise a… Ben si c'est, imaginez a c'est 4. Racine de 2 il divise 4.
A1 : C'est a sur racine de 2 égal b. Donc. Ouais euh, a c'est un multiple de racine de 2 ? Fin euh, racine de 2 divise a.
A ? : Oui.
--
A ? : Ouais mais bon eh mais attends mais c'est chaud !
--
A ? : Racine de 2 divise a et euh…ça ça donne un entier b.
A ? : Ca j'suis d'accord.
A ? : Oui mais bon comment tu trouves a et b ?
A ? : T'as raison.
A ? : a et b ils sont premiers entre eux c'est obligé.
--
A ? : Donc a il divise racine de 2 puisque a et b sont premiers entre eux donc a il divise pas b et a divise b racine de 2.C'est pas le théorème de Gauss ?
A1 : Mmm ? Si ça fait penser à Gauss quoi mais euh /
A ? : Donc a il divise racine de 2.
A1 : Non. Non, non non.
A ? : Mais si !
A1 : C'est racine de 2 qui divise.
A ? : a il divise b racine de 2, t'es d'accord ? !
A1 : (Rires), elle va me taper. Mais non parce que c'est a égal /
A ? : Oui mais il divise ça !
A1 : Mais non ! C'est ça qui divise a.
A1 : Racine de 2 divise a ! C'est pas a qui…a il est tout seul là. C'est pas. T'aurais b égal à racine de 2 a et ben là ça s'rait a euh ça s'rait racine de 2 il divise b et a divise b s'ils étaient pas premiers entre eux.
A ? : Mais il divise les deux ! Si tu mets les deux /
A1 : Non, tu peux pas inverser ! Parce que si tu dis que. En fait ça c'est plus grand que racine de 2 et ça c'est plus grand que b. Et donc a il ne peut pas diviser un nombre plus petit.
A ? : Ben oui.
A1 : Donc, j'ai raison, comme dab, J'ai toujours raison, (rires).
--
A1 : Donc c'est racine de 2 qui divise a.

--
A ? : Oui mais…/
A1 : Parce que regarde euh quand tu divises a/
A ? : Ah oui ! a et b sont premiers entre eux donc c'est racine de 2 qui divise a.
A1 : Quand tu divises a par racine de 2, t'as un nombre entier donc/
A ? : C'est bon j'suis d'accord.
--

A ? : Racine de 2 il divise a.
A1 : Non mais racine de 2 il est pas, il est pas entier donc c'est pas possible
A ? : Mais si c'est possible !
A1 : Ouais mais…
A ? : Tu prends 2, 2 sur racine de 2, peut-être ça marche pas mais j'suis bête/

A1 rit

A ? : Mais ça donnera un entier aussi.
A ? : Moi j'crois qu'il est irrationnel.
A ? : Moi aussi. J'crois hein. On l'a déjà fait.
--
A1 : Oui mais dans ce cas là racine de 3 c'est irrationnel aussi. (rires) dès que y'a une racine ça y est c'est fini (rires)
A ? : Racine de 2 il divise a.
A1 : Et le PGCD/
A ? : On n'a qu'à faire tu sais les trucs où tu dis soit a machin soit a machin, soit a bidule/
A1 : Ca c'est le cours, les exercices c'est à l'envers.
A ? : Racine de 2 n'est pas rationnel… Eh ! On n'a qu'à faire tu sais les trucs par euh. Les démonstrations où tu dis si racine de 2 rationnel tu prouves que c'est pas possible.
A1 : Ah oui ! ! Les trucs par l'absurde là!
A ? : Ouais voilà.

(Rires).

L'une cherche dans un cahier.

A ? : Parce qu'en fait faut juste qu'on trouve si c'est possible que racine de 2 il divise a. Et si on trouve que c'est pas possible ben racine de 2 est pas rationnel.
A1 : Pardon répète s'te plaît.
A ? : En fait racine de 2 il divise pas a ; il peut pas diviser a et après ca veut dire que ça ne peut pas être rationnel.
A ? : Ah oui.
- A ? : Ben oui. Et euh. Soit racine de 2 rationnel, qui peut s'écrire un entier sur un entier.
- A ? : Ouais.
- A ? : Eh prends pas a sur b.
- A ? : Donc rationnel.
\- **A ? :** Mais on s'en fout ! On s'en fout ! Racine de 2 il divise a / Mais on s'en fout des a et des b. Donc racine de 2 ça divise a.
A ? : Pourquoi c'est pas possible ?
A ? : Ouais ben ouais.Vas-y fais-le.
A ? : J'en sais rien.
--
A ? : Je crois pas qu'on l'ait fait.

Un cahier est feuilleté…

A ? : Moi je m'en rappelle pas du tout.
A ? : C'est pas grave cherche pas.
A ? : Alors attends …
A ? : Ah ben oui c'est c'qu'on a fait, on a fait soit racine de 2 égal a sur b.
--
A ? : J'ai faim.

A ? : Moi aussi.
(Rires)
--
A ? : *inaudible* racine de 3.
A ? : C'est pareil.
A ? : (Rires).C'est la même. C'est le même problème.
--
A1 : Si …racine de 2 égal a sur b. a égal nin, nin nin. Racine de 2 il divise a.
A ? : Or a c'est un entier hein.
A1 : Donc un entier divisé par un… Par un truc racine euh… Ca peut pas faire un entier naturel.
A ? : Un entier divisé par un rationnel.
A1 : Un irrationnel.
A ? : Voilà, c'est ça ! Un entier divisé par quelque chose qu'est irrationnel. *Inaudible* si tu le divises par un truc racine tu peux pas revenir dans le monde des entiers *inaudible*.

Court passage inaudible

A1 : C'est toi qu'as la meilleure moyenne en maths des trois donc c'est toi qui dois trouver.(Rires)
A ? : Elle a tout compris elle.
A ? : J'suis fatiguée.

Elles parlent d'autre chose.

Episode 2

A ? : Vas-y faut trouver là, j'aime pas cet exercice.
--
A1 : Faut peut-être mettre au carré. Faut peut-être mettre des trucs au carré. J'sais pas.
A ? : Ah ouais …
--
A ? : 2 c'est le plus petit/
A ? : Non attends 2 c'est le plus petit …entier.
A1 : 2 c'est euh, c'est un nombre premier.
A ? : Déjà il est pair.. *inaudible*. a^2. … Qu'est-ce que je raconte ? Il est pair donc a^2 sur b^2 c'est *inaudible*. J'sais pas pourquoi j'dis ça mais/ (rires).
A ? : Si ça vous intéresse. (rires)
A ? : Et si a^2 sur b^2 c'est pair, ça veut dire que…Attends…*inaudible* ça veut dire que *2 divise b* a et b ils sont *inaudible*.
A ? : C'est pas obligé.
A ? : Ben si. 9 divisé par 3 c'est 3.
A ? : Parce que si. Fin si t'as… euh, (elle calcule). Fin c'est pas obligé quoi. J'vois pas comment.
A ? : Quoi ?
A ? : J'ai dit qui sont pairs.
A ? : Pas obligé.
A ? : Voilà.

Rires

A ? : Ah ouais, tu divises 10, tu divises quelque chose qu'est pair par quelque chose qu'est pas
A1 : S'il reste 2, s'il reste 2/ - **A ? :** 10 divisé par 5 …
A ? : Hein quoi ?
A1 : Rien rien rien.
A ? : *inaudible*

A1 : Mais c'était bon c'que j'avais écrit. Parce que si a^2 sur b^2/ *inaudible* C'est toi qui a fait ça (rires).
A ? : Vas-y remets-en un peu plus (rires).
A ? : Continue sur les carrés parce qu'on n'a que ça hein. C'est notre seule piste.
(rires)

A1 : Ca veut dire que a^2 est deux fois plus grand que b^2.
--
A1 : Non mais non j'dis n'importe quoi. Non mais franchement j'vois pas du tout comment euh.
A ? : Bon a^2/
A1 : Attends j'vais demander à coté s'ils ont pas une piste. (en rigolant).
--
A ? : Concentre-toi !
--

Episode 3

A ? : Un entier divisé par un, un, par racine de 2. C'est pas possible que ça fasse un entier.
A ? : Si.
A ? : Ben justement c'est ce qu'on essaye de prouver d'puis tout à l'heure.
--
A ? : On sait. Peut être qu'ils sont de même parité, quelque chose comme ça.
A ? : *inaudible*
A ? : Ben si, on met ça égal 0, ça égal 0. C'est ça que tu veux dire qu'on sait résoudre.
A ? : J'sais pas.
A ? : Ben si c'est ça.
A ? : *inaudible*
A ? : Or ! Comme ils appartiennent a N ça veut dire que c'est celui là qui est égal à 0.
A ? : *inaudible*
A ? : (Rires) Tu reviens au même endroit. On tourne en rond.
--
A ? : *inaudible* plus de piste quoi !
A ? : *inaudible* passer dans les rangs et puis nous aider un petit peu.
--
A1 : J'vais lire mon cours peut-être que ça va m'inspirer…
--
A1 : Si a, racine de 2 divise a donc racine de 2 divise/
A ? : Toute **combinaison linéaire** de a ça va vachement nous aider ça.
(Rires)

A ? : Divise a plus. Ouais donc en fait on s'en fout.
--

A ? : Eh, c'est a u, toute combinaison linéaire c'est a u plus b v mais u et v sont dans Z ?
A ? : Ils sont dans R.
A ? : Dans Z.
A ? : Dans R.
--
A ? : On n'a qu'à dire ben racine de 2 il est irrationnel parce qu'on l'sait.
(rires)

--

A ? : … racine de 2 b. - **A ? :** J'ai les annabac.
--

L'une d'entre elles demande un livre de spé à B2

--
A ? : Racine de 2 est congru à 0 modulo a.
--
A ? : Non c'est pas a est congru à racine de 2, attends.
--
A1 : Eh on peut multiplier dans les congruences ?
--
A1 : Vous avez trouvé quelque chose ? *(elle s'adresse au groupe d'à côté)*
A ? : Nous on a rien trouvé.
A1 : Vous avez trouvé, vous avez trouvé fin vous êtes euh vous avez trouvé quelque chose.
(Rires)
A1 : Non sérieux ? vous avez trouvé quelque chose ? Nous on est en train de tourner en rond mais grave !
A ? : En plus y'a rien d'écrit sur nos tables.
--

Episode 4

P *Bon, vous vous en sortez ?*
A ? : Non.
P *Pas du tout ?!*
A ? : Non.
--
P *Attends, racine de 2 diviseur ça veut rien dire parce que racine de 2 c'est pas un entier il faut forcément que tu travailles avec un entier. Faut forcément travailler avec ça. Voilà, c'est là dessus qu'il faut travailler !*
A1 : C'était une bonne idée de mettre au carré ?
P *Oui bien-sûr. C'était, C'était forcément une bonne idée puisque … si tu veux pouvoir travailler sur les entiers, faut, faut avoir ça.*
A ? : Ben/
P *Donc c'est là dessus qu'il faut travailler.*
A ? :

P *Ben continue. Qu'est-ce que tu peux en déduire ?*

A ? : 2 divise a^2.
P *Donc qu'est ce que tu peux en déduire sur a ? Par exemple.*
A ? : Qu'il est supérieur à *inaudible* .
P *Tu peux en déduire un peu plus que ça.*
A ? : C'est un multiple de 2.
P *Voilà ! Ben continue dans cette voie. Suis ta, suis les idées de A1 elles m'ont l'air bonnes.*
A ? : Eh oui évidemment.
(Rires)

A ? : J'l'ai toujours dit. Euh…
--
A ? : Dis-nous A1 tout ce qui te passe par la tête.
A ? : Alors attends, a^2 est égal à 2 b^2. a^2 multiple de 2. 2 divise a^2.
--
A ? : A chaque fois c'est toi qui as les bonnes idées/
A1 : Non mais c'est quand elle pose des questions j'sais lui répondre et pis euh, et puis j'lui donne les bonnes réponses mais c'est tout.
A ? : Alors a^2 multiple de 2 ça sert à quoi ?

A1 : rires.
--
A ? : *inaudible* .
A ? : ppcm.
A ? : Non non non.
A ? : Plus petit commun diviseur.
A ? : Non
A ? : Euh ! multiple.
A ? : Non j'sais pas, (rires) ils parlent de multiple alors.
A ? : Eh pourquoi a^2 se serait le plus petit ?
--

A ? : N'oublie pas qu'on a a et b premiers entre eux hein. a^2 est premier à b^2 aussi.
A ? : Pas obligé.
A ? : Hum, j'en suis pas très sure.
A ? : Attends on va prendre un exemple. 3 est premier avec 2 donc 9 est premier avec 4.
A ? : Ouais mais bon…
A ? : J'sais pas si ça marche *inaudible*
A1 : Regarde 2 et 5 ils sont premiers entre eux. Non, j'ai rien dit.
(Rires)

A ? : 9 t'as qu'à prendre 9, 9 et 17. Mais moi j'connais pas le carré de 17.
A1 : J'ai une calculatrice (en rigolant).
A ? : Vas-y fait, fait 17 au carré divisé par 9 au par 81.
A1 : Oui mais c'est deux nombres premiers faudrait prendre/
A ? : Oui ben c'est ce qu'on a dit, on a dit des nombres premiers.
A ? : Entre eux.
A1 : Mais non ! Premiers entre eux pas premiers.
A ? : Ah ouais d'accord.
A1 : 4^2 et j'sais pas et euh/
A ? : J'sais pas prends 15 et euh 15 et ?
A1 : 15 et 4 j'ai mis.
A ? : Ben c'est pareil.
A1 : Ou 125 et 16. Ils sont premiers entre eux.
A ? : J'en sais rien moi.
(Rires)
A ? : Tu mets 125 divisé par 16 tu verras bien… Non c'est pas comme ça qu'on fait. 16 par 16 c'est 4 2, 2 fois 2/
A1 : Non moi j'crois qu'ils sont premiers entre eux, 16 et 125.
A ? : Ouais quand on met les trucs au carré/
A1 : Ouais mais on sait pas, c'est pas écrit dans le cours mais on peut pas le démontrer dans le cas général /
A ? : Oh on s'en fout !
A1 : Donc on n'a pas le droit de l'utiliser. Enfin j'crois pas, j'sais pas peut-être qu'on l'a dit dans le cours.

P s'exclame « Voilà ! » étant auprès d'un autre groupe.

A ? : Chut !
--

Episode 5

P *Alors, est-ce que les idées de A1 aboutissent ?*
A ? : Non.
P *Non ? !*
A ? : *inaudible*

P	*Mais si elle en avait tout à l'heure.*
A1 :	a^2 est multiple de 2 et pis euh/
P	*et a alors, a il est quoi ?*
A ? :	a^2 est multiple de 2.
P	*a^2 est multiple de 2.*
A1 :	Ben il est multiple de 2 (hésitant).
P	*Forcément ou pas ? Oui ou non je sais pas j'te demande !*
A ? :	Ca fait a fois a multiple de 2, donc le carré est multiple de 2.
A ? :	Oui.
P	*Tu essaies de m'écrire ça et puis si a est multiple de a tu vas peut-être pouvoir l'écrire ! Comment tu l'écrirais que a est multiple de 2 ?*
A ? :	a égal 2k.
P	*Voilà* !
A ? :	*inaudible*
P	*Attends, avant de dire je vais être bloquée, essaye !*
A1 :	Ah oui, ben forcément, oui ben oui ! a est multiple de 2.
P	*Voilà !*
(rires)	
P	*Bon ben alors du coup tu vas pouvoir écrire. Ecris-le que a est multiple de 2 ! Qu'est-ce que ça te donne ? !*
A1 :	a égal 2q
P	*Voilà.*
A1 :	Et donc quand …
P	*Reprends le moral A2.*
(rires)	
A ? :	J'attends.
P	*Ah non ! Tu n'attends pas. Tu aides A1.*

P s'éloigne…

A1 :	Après faut travailler encore avec les carreaux ? Euh les carrés.
A ? :	J'en sais rien, donc qu'est-ce qu'on a ?
A ? :	On a a égal 2 q.
--	
A1 :	Attends, -tends, -tends. J'crois que j'ai une idée.
A ? :	a égal 2q.
--	
A1 :	Ca veut dire que b il est multiple de 2 aussi !
A ? :	Pourquoi ?
A ? :	Parce que.
A ? :	Ben dis-dont tes démonstrations.
(Rires)	
A1 :	2 divise b ; b multilple de 2. Et si, Ah non. Voilà, voilà ça y est ! J'ai trouvé, j'ai trouvé !
A ? :	Non.
A1 :	Si, si, si, si, si j'ai compris.(rires) Et puis que si a est multiple de 2 et b est multiple de 2 a sur b ça va pas être une fraction irréductible. Donc/
A ? :	Pas forcément.
A ? :	Je peux savoir d'où ça sort ça ? !
A ? :	Oh, là…Calme-toi.
A1 :	Ah oui c'est vrai.
(rires)	
A1 :	J'ai trouvé, Madame, j'ai trouvé.
(rires)	

A ? : Donc b est multiple de 2. (**A1 :** Madame, b est pair ?) Logiquement, enfin je crois.
A ? : Oui et alors, tout à l'heure c'est ce qu'on avait et alors j'veux dire?
A ? : Mais si ! (**A1 :** Madame ?)
A ? : Eh faut se calmer.
A1 : Madame, madame, madame, euh ça veut dire que b est multiple de 2.
P *Voilà/*
A1 : Ca peut pas être une fraction irréductible si a est multiple de 2/
P *Voilà.*
A1 : J'ai compris !
A2 : J'ai rien compris/
P *Alors tu lui expliques. Tans qu'A2 a pas compris vous faites rien et après A2 rédige on sera sûr qu'elle aura compris ou bien, ou bien A3 rédige. On va faire ça : tu expliques à A2 et A3 rédige.*

Episode 6

A1 : Alors je t'explique. Tu as compris jusqu'à/
A ? : Parle doucement.
(rires)

A1 : T'as compris jusqu'à là que a est multiple de 2/
A ? : Oui, ça j'ai compris.
A1 : T'as a est multiple de 2, d'accord ? ? donc que a^2 est égal à $2b^2$/
A ? : Non mais j'ai compris que b était multiple de 2.
A1 : Ben voilà… Donc a multiple de 2 donc a égal 2q et b égal 2q', t'es d'accord ? Les deux sont multiples de deux. Quand tu fais a sur b, et ben cette fraction est réductible puisque tu peux la réduire par 2.
A ? : Et alors ?!
A1 : Donc c'est pas possible parce que euh, x, euh si racine de 2 s'écrit a sur b il faut que a et b et bien ils soient premiers entre eux. T'es d'accord ?
A ? : Ben non ces deux là ils sont premiers entre eux maintenant.
A1 : Mais non a égal 2q et b égal 2q'.
A ? : Oui !
A1 : Donc et ben a et b ils pas premiers entre eux.
A ? : Ca fait q sur q'
A1 : On s'en fout de q sur q'.
A ? : Ben si.
A1 : -tends, regarde. Ah !
A ? : Attends mais c'est la même chose !
A1 : Chut ! Tu me laisses parler, tu me laisses parler OK ? Bon. Tu dis, est-ce que ça va si racine de 2 il peut s'écrire a sur b irréductible (elle insiste sur ce mot). D'accord ?
A ? : C'est bon me regarde pas comme ça.
(Rires)

A1 : Le problème, tu veux savoir si racine de 2 il peut s'écrire avec a sur b avec a et b irré enfin/
A ? : Ils sont premiers entre eux.
A1 : Premiers entre eux. Voilà. PGCD de a b égal 1, d'accord ? Voilà. Or on a fait tout un bidouillage, on a trouvé que a égal 2q et b égal 2q'. Or on a dit que PGCD égal 1 donc là ils ont 2 en commun donc c'est pas possible, donc racine de 2/
A ? : D'accord, j'ai compris !
A1 : s'écrit pas sur a sur b donc racine de 2 est irrationnel.
A ? : Voilà.
A1 : Voilà, maintenant tu rédiges.

(Rires)

A1 : C'est toi qui rédiges, c'est la prof qu'à dit que tu rédiges.
A ? : Non elle a dit…
--

A1 : Faut que la prof vienne sinon j'arrive pas à trouver hein.
--

A ? : Bon j'ai mis a et b appartiennent à N étoile parce qu'on a dit *inaudible*
A ? : Oui, oui, oui.
--

A ? : C'est la même chose.
--

A1 : Ouais on a fini !
--

A ? : Oui non mais vas-y continue.
--

A ? : Pour racine de 3 c'est la même chose.
P *Alors racine de 3 c'est éventuellement le même raisonnement. Il y aura peut-être une chose à mieux préciser c'est que là vous m'avez dit un peu très naturellement et je le veux bien que si a² est pair, a est pair aussi. Faudra peut-être faire le même raisonnement en disant un peu plus clairement pourquoi euh, pourquoi ça marche pour 3. Parce que là bon les nombres pairs impairs, vous les connaissez tellement bien que j'aimerais bien que vous me le disiez sans me le justifier. Pour 3 inaudible.*
--

A ? : C'est pas possible parce qu'on a dit que le PGCD de a b égal 1, là ils ont 2.

Long silence

A ? : Ca y est.
A ? : Fais voir. Alors.
--

A ? : L'équivalence elle est vraie parce qu'ils sont tous euh/
A ? : Ouais, ouais, ouais, ouais.
A ? : Ok.
--

A ? : Voilà, c'est bien.
A ? : Maintenant on écrit pour racine de 3 ?

Episode 7

P *Alors pour racine de 3 ça va marcher comment ?*
A ? : Je sais pas.
P *Je sais pas.*
A1 : On a le droit de dire euh pour euh a et b/
P *Voilà !*
A1 : Que a et b sont/
P *Voilà !*
A1 : PGCD égal 1. Donc forcément 3 il divise a.
P *Car alors attends c'est quel théorème que tu vas essayer de m'utiliser?*

A ? : Gauss.
P *Alors Gauss il te dit quoi exactement ?*
A ? : Si a divise 3 b et a et b premiers entre eux a divise 3.
A1 : Oui mais bon/
P *Oui, oui effectivement tu peux le dire comme ça. a divise 3 b², a est premier avec/*
A1 : Mais j'sais pas j'ai pas encore lu le truc alors/
P *Oui effectivement c'est une manière de le dire qui va fonctionner. Mais euh a divise 3 euh c'est pas tout-à-fait c'que tu voulais tout au début/*
A ? : Oui.
P *3 divise a.*
A ? : Oui.
P *Donc il vaudrait mieux le faire dans l'autre sens : si 3 divise a² est-ce que c'est possible que 3 ne divise pas a ?*
--

P *Pourquoi c'est pas possible ?*
A ? : Parce que c'est a fois a /
P *Si 3 ne divise pas a qu'est ce qui se passe ?*
A ? : Ben euh, 3 ne divise pas a².
P *Pourquoi ?*
(rires)

A ? : Parce que a² c'est a fois a.
P *Oui non mais euh. Donc tu as 3 divise a fois a. Si 3 ne divise pas a, comment ils sont à ce moment-là ? Y'a pas un théorème du cours ?*
A ? : Théorème de Gauss.
P *Voilà ! Parce que, pourquoi est-ce que si 3 divise a²***A ? :** Ah oui, d'accord.
P *Voilà ! Et alors du coup…Du coup ça marche pas. Parce que s'il est premier avec a, il faut qu'il divise a inaudible là vous allez pouvoir me le trouver.*
A ? : Ah oui d'accord/
P *Et du coup ça va marcher pareil.*
A ? : Mmm.
P *Bon ben alors allez-y, faites-moi ça correctement. Vous m'écrivez votre démonstration avant la récréation, vous avez 5 minutes pour l'écrire.*
P s'éloigne…

A ? : Allez A2 vas-y.
--

A ? : C'est juste pour dire qu'on a que des 3 *inaudible*
A1 : Ouais (rires), *inaudible* le théorème de Gauss.
--

A ? : Faut juste un peu plus parler pour euh, l'histoire d'euh, si machin divise 3/
A ? : Que 3 divise a ?
A ? : Tu mets soit ?
A ? : Supposons.
A ? : Boh ben tu fais comme l'autre.
A ? : Non mais A2 on met soit racine de 2 rationnel ou supposons que racine de 2 rationnel.
A ? : Mets supposons alors.
--

A1 : Non, tu mets si/
A ? : Non.
A1 : … si machin …
A ? : Supposons….Pour une fois que ça marche *inaudible*
A1 : Non vas-y hein.
--

Elles parlent d'autre chose pendant que A3 finit de rédiger la preuve…

A ? : Alors là je me rappelle plus qu'est-ce que je mets ?
A ? : 3 divise a^2. On est d'accord.
A ? : 3 divise a^2.
A ? : C'est juste pour dire que ça divise a qu'il faut raconter ça/
A1 : Ouais ouais ouais, attends, tu mets attends…si 3 ne divise pas a.
A ? : Si 3.
A1 : Ne divise pas a.
A ? : Attends t'es sûre là tu me fais écrire au stylo
A ? : *inaudible*
A ? : Eh faut que j'écrive au brouillon parce que.
--
A1 : En fait on sait que 3 divise, divise a^2. Si 3 ne divise pas a…Il divisera forcément pas a^2.
A ? : Non en fait ce qu'il faut dire c'est pas ça du tout. C'est à partir de là en fait. C'est la ligne précédente, c'est la ligne précédente. Il faut dire.
A1 : Si regarde, si Euh…a^2 égal à 3k. Si euh/
A ? : Ah c'est parce que 3 est premier.
A1 : Oui, oui oui mais je sais pas comment dire/
A ? : Tu mets euh… Si a^2 et 3, euh si 3 divise pas a^2, ils sont premiers entre eux, d'accord ?
A1 : Non si a /

Fin de l'enregistrement…

Deuxième heure après la récréation

--
A ? : Alors…
A1 : J'sais pas comment rédiger ça. J'ai compris le système.
A ? : *inaudible*
A ? : Mais si !
A ? : *inaudible*
A ? : 3 divise a^2.
A ? : 3 divise a^2, vous êtes d'accord.
A ? : Alors pour dire que ça divise a. Faut dire si 3 divise/
A ? : Euh ne divise pas a.
A ? : Ok.
A ? : Ne divise pas d'accord donc faut faire ça.
A ? : Euh, euh, attends, -tends, -tends, tu me dis si c'est bon : PGCD /
A ? : de 3 et a égal 1.
A1 : Or 3 divise a^2 qui est égal à a fois a. Si 3 ne divise pas a alors d'après Gauss 3 devrait diviser a puisqu'il divise a^2 tu piges mais j'sais pas comment dire/
--
A ? : Tais-toi, laisse-moi réfléchir !
--
A1 : Madame ?

Elles attendent que P soit disponible en parlant d'autre chose…

A1 : Madame ?
P *Alors.*
A1 : J'arrive pas à rédiger le truc parce qu'en fait si 3 divise a/
P *Alors ça c'est juste.*
A ? : …PGCD égal 1.

P	*Car 3 est premier donc. Alors si le PGCD. 3 divise a² et le PGCD de 3 et de a c'est 1 donc forcément ?*
A ? :	Forcément euh…
P	*Quel théorème tu vas utiliser ?*
A ? :	Gauss.
P	*Gauss ! Alors. Si 3 ne divise pas a, 3 est premier avec a donc ?*
A ? :	Donc il devrait diviser a/
P	*Voilà.*
A ? :	Mais bon euh/
P	*Théorème de Gauss.*
A ? :	Mais bon euh/
P	*Ben c'est bon ! Donc tu dis si 3 ne divise pas a, 3 divise a donc c'est, c'est, c'est que c'est impossible, c'est c'est qu'il y a un problème.*
A ? :	Oui/
P	*Le problème c'est que 3 divise pas a est pas possible. Si 3 ne divise pas a, 3 divise a. C'est bien ça que tu es en train de me dire ?*
A ? :	Oui, oui, oui.
P	*Donc c'est bon ! Tu tiens une contradiction. Ca veut dire que 3 ne divise pas a n'est pas possible. Donc 3 divise forcément a. Donc là qu'est-ce qui faut marquer alors ? Si 3 ne divise pas a, le PGCD de 3 et de a égal 1 donc 3 ?…*
A ? :	Euh…
P	*C'est ce que tu m'as dit.*
A ? :	3 divise a.
P	*Donc 3 divise a. Donc il y a une contradiction. Et ça c'est le théorème de Gauss.*

P s'éloigne…

A ? :	T'écris ?
A ? :	Moi j'dessine.
--	
A ? :	Ca va pas marcher *quoi/encore*.
A ? :	Ecris.

Long silence

P	*Alors vous en êtes où ? (P vient de distribuer la suite au groupe d'à côté)*
A ? :	Ah oui ben euh, de même que pour a tu mets.
P	*Oui, oui, oui tu vas pas le refaire, oui t'as raison.*
A ? :	On l'avait pas fait avant aussi.
A ? :	Hein ?
P	*Vous l'avez pas fait pour 2 …*
A ? :	Ah oui, oui.
P	*…mais si vous l'avez fait pour 3.*
A ? :	Tu l'as fait pour 3. Oui.
P	*Ca me convient. C'est-à-dire j'admets qu'effectivement sur les nombres pairs, impairs vous avez plus de connaissances que…Que quelque chose qui peut vous paraître évident sur pair impair l'est peut être moins pour divisible par 3 ou pas divisible par 3. Et donc là je vous donne/ Je vous donne trois preuves de l'irrationalité de que vous allez lire et comprendre et après vous me répondez aux questions. Hein ? Donc là y'a un moment de lecture silencieuse pour comprendre. Vous avez le droit de les anoter. Moi quand je fais des maths souvent j'anote. Hein donc vous me lisez les trois preuves avec l'idée que vous aurez à répondre à ces questions.*

P s'éloigne, lecture silencieuse

Episode 8

A ? : Nous on a pas fait ça ; nous on a fait aucune des trois.
--

A ? : Nous c'est aucune des trois hein ?
A ? : Si, ça ressemble à la une.
A ? : Ouais mais c'est pas ça. C'est pas la une exactement…Parce que là ils disent pas que a et b est irra/ est irréductible.
A ? : Ouais , ouais, ouais.
A ? : Donc c'est pas ça.
--

A ? : Ce serait plutôt peut-être la 2 ?
A ? : non
A ? : Oui parce qu'eux ils disent que a0/
A ? : On a pas parlé de truc plus petit nous.
A ? : Ben oui on a pas parlé d'ensemble machin mais bon comme on a dit que a sur b c'était irréductible et là ils disent que a0 sur b0 ben c'est le plus petit. Fin ça ressemble.
A ? : *inaudible*
A ? : Non.
A ? : Bon on s'en fout on fait l'autre question.
--

A ? : Nous on a fait la moitié de la preuve 2 en fait.
A ? : Preuve par l'absurde.
--

A ? : On a fait un peu un mélange des deux quoi. Non c'est pas tout-à-fait pareil parce qu'on n'a pas dit ouais 2k plus 1 machin truc. Pour dire que a et truc sont pairs on a pas fait, a et b sont pairs on n'a pas fait ce qu'ils ont fait, … enfin pas tout-à-fait… Donc en fait non. Non parce que voilà quoi.

--

A ? : J'ai mal à la tête.
--

A ? : C'est que moi qui écrit.
--

A ? : OK ?
A ? : De toute façon Ok ou pas Ok …

Long silence.

A ? : Tu peux bien écrire hein quand tu veux !

(Elles rédigent peut-être les preuves de la question 2.)

A ? : On dit quoi ? On dit qu'euh, on dit qu'elle ressemble à la preuve numéro 2 ?
A ? : Non.
A ? : Si elle ressemble/
A ? : Si elle ressemble à celle-là parce qu'on a dit que a. Là ils disent a0 sur b0 c'est irréductible.
A ? : Raisonnement par l'absurde.
A ? : Plus petit.
A ? : *inaudible.*
A ? : Ouais mais elle vient de le dire à côté ouais ça ressemble.

--

P	*Vous les avez comprises ou pas les démonstrations ?*
A ? :	Oui.
P	*Alors vous me dites si l'une, si votre preuve ressemble à l'une des trois.*
A ? :	Pour le 3, ce serait pas plus facile de faire avec euh, comme la troisième, parce que comme racine de n c'est n puissance un demi *inaudible*.
P	*Oui, oui effectivement on pourrait euh, oui oui sans doute que la dernière effectivement euh, le plus simple ce serait peut être de regarder ça. Donc vous êtes capable de répondre à la première question vous le faites. A quoi votre preuve à vous ressemble. Donc vous me le faites, vous m'écrivez à quoi votre preuve ressemble et puis surtout vous faites le deuxièmement c'est-à-dire que vous m'écrivez trois preuves, sauf si celle que vous avez donnée est l'une des trois, vous me faites trois preuves de l'irrationalité de racine de 3. Vous vous y lancez vraiment parce qu'il vous reste guère qu'une vingtaine de minutes.*
A ? :	Déjà !
P	*Ah ça passe vite avec moi (en rigolant).*

P s'éloigne

A ? :	Bon chacun fait une truc.
A ? :	Ouais donc t'écris à quoi ça ressemble. Tu dis euh tu dis euh ça. Notre preuve ressemble/
A ? :	A la dernière aussi.
A ? :	*inaudible*.
A ? :	T'écris ça/
A ? :	Notre preuve.
A ? :	Pendant ce temps, on fait/
A ? :	Euh, ressemble à la preuve numéro 2.

--

A ? :	Euh parce qu'euh/

--

A ? :	Car euh, attends, -tends, je réfléchis euh, car euh, a0 sur b0 correspond à notre fraction irréductible.

--

A ? :	Je dit oui euh preuve numéro 2 car ils supposent euh, ils utilisent un raisonnement par l'absurde.
A ? :	Oui non mais là aussi. On dit que là ! Tu sais pas lire ? !
A ? :	Preuve par l'absurde.
A ? :	Oui mais là aussi c'est absurde. Regarde.
A ? :	Non mais !
A ? :	*inaudible*.
A ? :	Non mais non mais parce que on a posé, on a posé a sur b égal, fin euh, irréductible donc c'est comme là ils ont fait a0 b0 quoi, on a mis la même disposition au début.
A ? :	*inaudible*.

(rires)

A ? :	Car le euh euh, leurs a0 sur b0 correspondent a sur b car euh. …On s'en fout
A ? :	On s'en fout on n'est pas en français hein !

--

A ? :	Tu rédiges comme tu peux, tu vois ce que je veux dire. C'est ça qui ressemble.
A ? :	Eh fais la démonstration de racine de 3, on aura jamais le temps sinon. Tu prends la deuxième.

--

A1 :	Je fais la 2…la deuxième preuve c'est ça ?
A ? :	Ouais.

--

A ? :	*inaudible* fraction irréductible

A ? : Ouais voilà. Et pis euh…
A ? : C’est tout.
A ? : Ouais c’est tout parce que nous on a prouvé que euh.
--
A ? : Sinon euh…Ouais parce que eux ils ont joué sur le plus petit, nous on a joué sur irréductible Ben donc c’est pas pareil.

Long silence

A ? : J’réécris exactement la même chose (semi-interrogatif).
A ? : *inaudible.*

Long silence

A ? : Moi j’a mis 2 au cube, (rires).

Long silence

A ? : C’est bon pour la première.

Long semi-silence

A ? : Il reste la troisième à faire.
A ? : Troisièmement je crois savoir le faire.

Silence

A2 : Ah mais non on a fait la 2 en fait.

Silence

A2 : On a fait exactement la 2 en fait. Eh on a fait exactement la 2 en fait.
A ? : Tu crois ?
A2 : Ouais. J’en suis sure même.
A1 : Non mais non parce que là on n’a pas démontré/
A2 : Si, si, si, si, si.
A1 : On a pas démontré qu’euh…
A2 : On n’a pas démontré quoi dis-moi ?
A1 : On a pas démontré que a et b sont pairs.
A2 : On a fait pareil, pareil.
A1 : On n’a pas fait pareil, exactement.
A2 : Attends, mais si c’est juste pour ça…
A1 : Oui c’est juste pour ça sinon.
--
A ? : Vous avez fait la preuve numéro trois du 2 ?
A ? : Moi j’ai fait la une si tu veux la lire.
A ? : Ah oui mais j’ai pas, j’ai refait une autre méthode moi j’ai pas/
A ? : Oui moi aussi hein.
--
A2 : D’façon c’est pas pareil a et b, eh ! Pour racine de 3 c’est pas pareil puisque racine de 3 on n’a pas prouvé qu’il est pair. Avec le truc des pairs/
A ? : Oui je sais.
A2 : Ca a aucun rapport.
--
A3 : *inaudible*
A1 : J’peux pas lire parce que j’vais faire la question 3.
--
A2 : Regarde lis c’que j’ai mis. Lis c’que j’ai mis pour la une.
A1 : Euh… (elle lit) …/
A2 : Non, de la deuxième preuve.
A1 : Attends là parce que moi faut que je fasse la troisième là. La troisième question.
A2 : Bon ben A3, tu vas relire.

Silence.

A ? : Euh là y’a un problème (rires) d’après l’égalité précédente on a 1 plus 2 alpha égal 2 béta.

--
A ? : Eh la décomposition inaudible.?/ Regarde c'que j'ai mis.
--
A1 : T'es d'accord ou pas ?
A ? : Parce que tu veux dire que la racine s'en va avec le 2. Et donc ça fait q à la puissance k.
A1 : Ouais. Parce que comme/
A ? : Racine de n c'est n puissance un demi et ben il fait exactement le même raisonnement qu'toi.
A ? : Oui non mais non là ils te demandent juste/ Oui ben. T'es d'accord avec moi que c'est celui-là le plus facile.
A ? : Oui !
A ? : Oui ben c'est c'que j'dis ; ils demandent juste ça.
--
A1 : Faut juste expliquer le raisonnement, le raisonnement.
A ? : Tu m'as dit qu'y'avait pas…
A1 : Ils demandent pas une démonstration mais expliquez le raisonnement/
A ? : Ben fais un schéma, fais un schéma.
A1 : Mais comment tu fais un schéma ?
A ? : Ben c'est toi qui est une dessinatrice.
(rires)

--
A1 : Un schéma comment faire un schéma ?
P *Alors vous me refaites la même chose pour racine de 3, hein, c'est bon vous avez tout fait ?*
A1 : Fin ça c'est c'que j'pense.
P *Oui. Et donc est-ce que tu peux me faire un squelette de démonstration. Pas la faire mais m'expliquez un p'tit peu comment tu f'rais quoi. Hein tu, tu dis la décomposition en nombres premiers donc me dire euh. Me faire le squelette quoi, c'est-à-dire si…*
A ? : inaudible.
P *Qu'est-ce que tu comprends pas ?*
A1 : Faudrait que ça ce soit un entier.
P *Eh bien en fait c'que je voudrais c'est euh, si vous vouliez généraliser laquelle, laquelle des démonstrations/*
A ? : La troisième.
P *La troisième. Est-ce que vous pourriez me faire un squelette ; c'est-à-dire comment vous l'écririez, voyez parce qu'ici elle est complètement écrite.*
A ? : Vous voulez qu'on l'écrive donc/
P *Soit vous me l'écrivez complètement soit au moins me mettre euh, me mettre les points qui vous paraissent essentiels.*
A ? : Ben on l'écrit en vrai/
P *Comme vous voulez.*
A1 : n soit à une puissance qui fasse que euh cette puissance fois un demi ça fasse un nombre. Entier.
--
A1 : Regarde, j'ai pas fini encore mais dis-moi c'que t'en penses.
--
A1 : Vas-y lis c'que j'ai fait. J'ai pas fini mais bon/
--
A1 : Tu comprends c'que je veux dire ou tu comprends pas ?
A ? : Attends, -tends, -tends.
--
P *C'est bien ça qu'on te demande de montrer. Que si racine de n est rationnel forcément k sur 2 appartient à N. C'est bien ça qu'on te demande de montrer.*
A1 : C'est logique/

P	*On te dit racine de n rationnel. Ah ! c'est logique.*
A1 :	Ben ça se voit ! (rires)
P	*J't'apporterai un jour j'ai un article où j'ai trouvé un truc tout c'que disent les profs de maths quand ils veulent pas faire une démonstration parce qu'ils savent pas la faire et alors par exemple ils disent ça se voit très bien, c'est un bon moyen d'éviter de faire une démonstration. D'accord ? Mais c'est bien ce qu'on te demande, ce qu'on te demande c'est, c'est bien de montrer ça, c'est que racine de n rationnel ça implique que n est un carré et toi tu es en train de me dire ça se voit.*
A1 :	Ca me semble logique **A ? :** divisibilité.
P	*Alors pourquoi ça te paraît logique ?*
A1 :	Parce qu'euh, euh, si je veux que ce nombre là, parce qu'à ce nombre là c'est racine de n, parce que racine de n c'est n puissance un demi et j'ai posé que n est égal à q puissance k.
P	*Pourquoi il est égal à q puissance k ?*
A1 :	Non mais, j'dis que n il peut s'écrire comme ça.
P	*Ben Pourquoi ?*
A1 :	Parce que (rires), parce que c'est un nombre.
P	*C'est pas toujours vrai ! Par exemple 15 il s'écrit pas comme ça ! Ou alors avec k égal 1 mais bon quel est l'intérêt à ce moment là ?*
--	
(rires)	
P	*Si tu veux utiliser cette chose là, il va peut être effectivement falloir parler de la décomposition en nombres premiers.*
A1 :	Ah voilà c'est ça que je voulais dire, c'est ça, (rires)
P	*Donc qu'est-ce qui se passe dans la décomposition en nombres premiers, donc écris-moi à ce moment là, euh, n s'écrit comment ? Ecris-moi la décomposition en nombres premiers, on l'a fait ça en cours quand même, de l'écrire de manière générale….Alors qu'est-ce que va se passer, si n n'était pas un carré, comment serait forcément, tu vois y'a quand même un, un problème là. Sur ma décomposition en nombres premiers comment tu vois qu'un nombre est un carré ou pas par exemple ? Comment ça se voit ? …Ca c'est une bonne question, comment on voit sur la décomposition en nombres premiers qu'un nombre est carré ou pas carré ? Parce que, comme finalement c'que tu veux montrer c'est/*
A1 :	Ben tous les exposants ils sont euh fois deux, ben ils sont tous des multiples de 2.
	SONNERIE…
P	*Par exemple, voilà ! C'est comme ça qu'on le voit. Alors si ils sont pas tous des multiples de 2 qu'est-ce que va se passer ?*

TRANSCRIPTION DE LA RECHERCHE DU GROUPE B

Episode 1

B1 : Racine de 2 c'est pas rationnel.
B3 : « Est-il rationnel ou irrationnel. »…Ben oui normalement c'est pas rationnel.
B1 : Racine de 3 non plus d'ailleurs.
B3 : Allez comment tu veux l'étudier ?
B2 : (Rires). J'en ai aucune idée.
B1 : Ben, faut démontrer que ça s'écrit pas a sur b et pis c'est tout.
--
B2 (à elle-même)Alors que pouvons nous dire à ce sujet, que pouvons nous dire…
--
B1 : Attends, eh, j'suis sûr qu'on l'a déjà fait.
B3 : Ben si tu retrouves l'exercice. Tranquille.
B1 : ça se passera pas comme ça moi j'te l'dis.
--
B3 : Donc x égal a sur b.
B2 : Hum alors, comment on va la faire la démonstration ?
B3 : égal à racine de 2
B1 : Tu fais ça, racine de 2 égal a sur b, hop. Point d'interrogation.
B3 : Ca on s'en doute mais euh.
--
B3 : Après.
B1 : Euh…J'sais pas trop, attends j'vais regarder dans le cours mais euh.
B2 : Ca me rappelle rien du tout.
B3 : Si on a vu - B1 : Si on vu ça
B3 : …un devoir à la maison à faire avec ça. Dans les annales/
B2 : C'était pas avec Viete ? Non c'était pas avec Viete.
B3 : Y'avait eu un exercice vraiment … - B1 : C'est quel exo avec Viete ?
B2 : Non, non euh…
--
B2 : Tu te rappelles de l'exercice ?
B1 : J'ai un vague souvenir mais sans plus.
B3 : Mais c'était pas dans des annales ?
B2 : Ben regarde t'as pas des annales ?

Ils continuent à chercher

B2 : En arithmétique ?
B3 : J'crois ouais.
B1 : ça c'est sûr c'est de l'arithmétique.
B3 : Non, non j'crois que c'était dans euh…C'est pas dans le cours ? Si c'était dans le cours.
B1 : Ben cherche alors.
B2 : Donc en fait il faut montrer que racine de 2 ça s'écrit a sur b ?
B1 : Non ! Ca s'écrit pas a sur b. - B3 : Non justement, c'est pas rationnel.
B2 : Oui ça s'écrit pas a sur b, d'accord.
B3 : Enfin, ça dépend mais… On te demande si c'est rationnel ou irrationnel, mais comme j'me souviens qu'on l'avait calculé, qu'on l'avait fait et que c'était rationnel, fin que c'était pas rationnel.
B2 : Non mais de toute façon les racines aux carrés c'est pas rationnel.
B3 : Ben si.
B2 : Sauf euh les carrés parfaits.
B1 : Ben non…J'suis sûr que tu en trouves un qui est/

B3 : Y'en a qui sont rationnels.
B2 : Et ben racine de 9 c'est rationnel.
B1 : C'est normal ça fait 3.
B2 : Ben oui, donc j'te dis à part les carrés parfaits.
B1 : J'suis sûre t'as parlé des *inaudible*

Rires

B2 : C'est bien c'que j'te dis !
B3 : Tais-toi.
B1 : C'est c'qui faut trouver hein.
B3 : Donc euh/
B1 : De toute façon c'est de la triche.
B2 : Ah non ça fait 1 414 j'crois c'est ça, racine de 2. Et pis ça continue après.
--
B1 : C'est où qu'on parle des rationnels et des irrationnels.
B3 : Moi j'suis sûr qu'on avait vu ça. Mais j'crois pas que ce soit de l'arithmétique.
B1 : Non c'est pas dans le cahier de cours.
B3 : Dans le cahier d'exercices.
B1 : Vous êtes sûrs ?
B3 : Ben sors-le et regarde. L'exercice qu'on avait fait.
B1 : *inaudible*
B2 : De quoi ?
B3 : Est-ce quelqu'un a son cahier d'exercice ?
B1 : Théorème de Gauss et nombres premiers.
B2 : Non je ne l'ai pas. Juste cahier de cours.
- -
B1 : Ca veut pas dire que racine de 2 est congru *inaudible*
B2 : Alors ça j'en ai aucune idée. Congru *inaudible*
B3 : Ca ça dépend de/
B1 : Non, non non non.
B3 : De quoi tu parles ? On parle pas de la même chose.
B1 : On peut toujours utiliser les congruences. *Inaudible* c'est qu'il est pas rationnel.
B3 : En fait racine de 2 égal à a sur b.
B2 : Ouais mais la congruence c'est pour résoudre les problèmes de divisibilité non ?
B1 : C'est c'que j'essaye de dire depuis tout à l'heure.
B2 : Et, ben ?
B1 : Bon j'abandonne.
B2 : Ah tu veux dire que a sur b n'est pas congru à racine de 2.
B1 : Si on a prouvé que ça/
B1 : Ouais voilà ou un truc du genre.
--
B1 : Y'en a marre maintenant j'suis sûr qu'on a vu.
--

Episode 2

B1 : Peut-être que si on décompose racine de 2 en.
B3 : Par racine de 2, euh, si c'est pour dire ça/
B2 : Ca se décompose pas.
B3 : J'vois pas le rapport.
B1 : On va faire un truc/
B3 : Prends un crayon à papier toi !
--
B1 : Regarde on fait que 2 est égal à racine de 2 fois racine de 2.
B3 : Ouais.
B1 : 2 s'écrit euh.

B3 : Ouais exact. Ben 2 s'écrit 2.
B1 : Ben ça s'écrit 2 sur 1. Ca s'écrit, nin nin nin.
B3 : Attends mais à ce moment là racine de 2 ça s'écrit 2 sur racine de 2.
B1 : Oui.
B3 : Bon t'es d'accord ?
B1 : Hein, quoi ?
B2 : Racine de 2 ça s'écrit 2 sur racine de 2.
B1 : Ouais. Bon et ?
B3 : Ben il faut que b soit/
B1 : On s'en fout.
B2 : Que b soit…
B3 : Soit différent de 0. Il faut que b soit un entier aussi non ?
B1 : Oui ben oui.
B3 : Ouais donc c'est la merde. Ben si racine de 2 tu multiplies en haut et en bas par racine de 2.
B1 : Ca changera rien parce que t'auras toujours une racine quelque part. T'auras 2 racine de 2 sur 2.
B3 : Ah ben oui.
B2 : Mais comment on étudie/Etudier la rationalité c'est s'intéresser à la question x est-il rationnel ou irrationnel ? Le problème c'est qu'on sait qu'il est irrationnel.
B1 : A la question qu'elle est bonne.
B3 : Fait-voir.
B2 : Ca ça qui, qui m'embête.
B3 : C'est où ça ?
B2 : Non non c'est nul part.
B1 : J'ai faim.
B3 : Ben moi *inaudible* livre de spé.
--
B1 : Donc racine de 2 s'écrit, racine de 2 est égal à/
B2 : 2 sur racine de 2.
B3 : Ouais mais bon le problème c'est que ça nous avance à rien.
B1 : C'est égal à…2 racine de 2 sur 2.
B2 : On tourne en rond là ça va pas.
B1 : Ah ouais il était fort ce coup là.
B3 : Nombres premiers, c'est peut-être ça.
--
B1 : Non mais on peut aller loin comme ça.
B2 : Ben oui.
B3 : J'suis sûr que y'a un p'tit truc qu'on a complètement oublié.
B2 : Mais je m'en rappelle pas moi d'avoir fait ça.
B1 : Si moi j'suis sûr qu'on l'a fait.
B3 : Si, si on l'a fait.
B2 : Ben vous l'avez pas sur vous ?
B3 : Ben non justement j'ai pas pris mon ancien cahier parce que.
B2 : Ben regarde.
B3 : Tu l'as ton ancien cahier sur toi ?
B1 : Ben celui-là il est assez gros, peut être qu'avec un peu de chance il sera dedans
B2 : T'as changé de cahier ?
- -
B3 : J'aimerais bien qu'on fait un exercice en une heure.
B1 : *inaudible*
B2 : De tout façon à la rigueur, si on arrive à montrer que racine de 2 il est irrationnel c'est la même démonstration pour racine de 3.
B3 : Exact.
B2 : Fin en théorie.
B3 : Ben pour racine de 3. Oui, oui, ben de toute façon ça revient au même. Mais euh.

--

Episode 3

B1 : Ah voilà (en feuilletant)…Tp page
B3 : x égal a sur b. Ca fait quoi, ça fait bx égal a. Regardez j'ai trouvé. x égal a sur b.
B2 : Ouais.
B3 : Ca va te faire égal à bx égal a, et donc ça fait bx moins a égal 0.
B2 : Ouais, donc ça fait racine de 2 b moins a égal 0.
B3 : Racine de. Enfin je suppose.
B2 : Vas-y, vas-y.
B3 : A mon avis faut plus. Fin j'ai trouvé un truc quoi.
B2 : Vas-y, vas-y continue voir comment ça fait. Ecris racine de 2 b.
B3 : Ce que tu fais racine de 2b moins a égal 0 mais là ça va revenir strictement au même. Mais euh, comme tu sais que b est différent de 0, tu prends pour b égal 1. Tu vas avoir moins a égal racine de 2 un truc comme ça j'sais pas. Faut partir à mon avis de ça. Faut partir de ce truc là et puis euh.
B1 : Faut qu'on fasse une équation.
B2 : Et a et b ils sont, a et b ils sont premiers entre eux puisque c'est une fraction irréductible.
B3 : En plus et regarde. C'est exactement la même forme que l'équation de , de , de Bézout.
B1 : Ouais à mon avis si elle a écrit ça au tableau c'est pas un hasard.
B3 : Ah, ouais ? Donc si t'as racine de 2 moins a égal 0, de là tu peux, tu peux utiliser la technique qu'on connaît avec l'algorithme d'Euclide et/
B1 : Ouais mais le problème c'est que le truc apparemment *inaudible* des nombres entiers.
B3 : Ben eh, racine de 2.
B1 : Racine de 2 il est pas entier.
B3 : Ah ouais… Là ça coule.
--
B1 : Non, non,non, arrête ta piste elle est pas bonne.
B2 : De quoi de quoi, de quoi ?
B1 : Ta piste elle est pas bonne.

Episode 4

B2 : a et b. a et b ils sont premiers entre eux, on peut pas utiliser Gauss ? B3 : Le problème c'est que, le problème c'est que/
B3 : Oui c'est à ça que j'pensais mais on a dit que racine de 2 a il doit être entier, non il doit pas être entier ?
B1 : Si mais peut-être qu'on peut pas *inaudible*
B3 : D'ailleurs on commence comme ça en supposant que racine de 2 est entier. Racine de 2 il est pas entier.
B1 : Ben non … On peut essayer de bidouiller ça.
B2 : Ben oui. On peut pas utiliser le théorème de Gauss si c'est pas entier.
B3 : Oui justement c'est ça que je me disais.
B1 : Ben peut-être qu'avec un peu de chance, on va bidouiller et puis trouver.
(rires de B2)
B2 : T'arrête avec ta bidouille toi (en rigolant) tout le temps.
B1 : C'est ma spécialité.
B2 : Tu bidouilles et t'as combien de moyenne ? !
B3 : Arrêtez ! Arrêtez, arrêtez avec vos trucs. Bon déjà on commence un peu à y voir clair mais euh…. J'avais oublié qu'on était écouté.
(rires de B1)

Episode 5

B3 : Ben déjà tu peux mettre au carré, regarde, tu mets tout au carré.
B1 : Ca se passera pas comme ça.
B2 : Ben oui vas-y.
B3 : Ben oui mais si tu mets tout au carré tu pourras plus savoir.
B2 : Ben si on aura quand même des racines de 2 si tu mets au carré.
B3 : Ah non ! Parce que tu vas avoir/
B2 : Ben si, 2ab ça fait euh, ta racine de 2 elle reste.
B3 : Ben non puisque tu mets racine de 2 au carré, racine de 2 fois racine de 2 ça fait 2b et a² au carré ça fait 1. Ca fait 2b moins a égal 0.
B2 : N'importe quoi ! C'est un, tu mets au carré. C'est a moins b au carré que tu développes.
B3 : Ah oui tu veux dire/
B2 : Donc ça fait a², a² moins 2 ab plus b².
B1 : C'est quelle page rationnel et irrationnel?
B2 : Je sais pas c'est pas écrit. Y'a pas rationnel et irrationnel.
B3 : On a peut-être trouvé un truc, faut peut-être montrer que tel machin est irrationnel…
B1 : Faut arrêter les drogues le matin.
B2 : Non non j't'assure y'a rien.
B1 : Mais si tu me l'avais montré.
B2 : J'tai rien montré du tout.
--
B2 : Moi je suis à théorème de Gauss moi.
B3 : Ben x égal à a sur b ah ouais non mais là c'est pas.
B1 : Eh déjà on a triché parce qu'on est parti sur le fait que c'était irrationnel. Faut partir sur le fait qu'on sait pas.
B3 : Ouais ben oui de toute manière c'est ça qui faut montrer. A mon avis faut que tu /
B2 : Attends, si.
B3 : Partes du fait qu'on ne sait pas et ensuite on arrive à démontrer que c'est.
B1 : *inaudible*
B2 : Ouais mais non, je vois pas, je vois pas où il est le problème d'arithmétique en fait dedans c'est ça le problème.
B1 : Si parce que/
B3 : Ben justement une fois que tu arrives à cette équation là, ça devient un problème d'arithmétique puisque t'es obligé d'utiliser le théorème de Gauss, le théorème de Bézout alors qu'euh/
B2 : Oui mais ensuite/
B3 : Le tout c'est de démarrer.
B2 : Ca donnera quoi, ça donnera quoi le résultat de l'utilisation des théorèmes si racine de 2 il est irrationnel ? Tu sais c'que ça va faire toi ?
B1 : Théoriquement on sait pas que c'est irrationnel donc ça compte pas ce que tu sors.
B2 : Non ben si. Nous on le sait que c'est irrationnel mais faut le démontrer.
B1 : On n'est pas censé le savoir.
B2 : Oui on n'est pas censé le savoir, on n'est pas censé le savoir mais euh, le théorème de Gauss il va marcher avec les nombres entiers pas avec les, les nombres rationnels.
B3 : Ben non ça marche, ben justement c'est là où ça cloche mais il faut trouver quoi mais tu vois/
B2 : Ouais mais il est irrationnel.
B1 : Faut trafiquer les enfants.
B3 : Fin déjà on est parti sur une bonne piste.
B1 : Ouais mais moi je veux retrouver le machin qu'elle m'avait montré.
--
B2 : Les nombres rationnels c'est quelle lettre ?
B3 : C'est Q.
--

B1 : Eh, attends, -tends, -tends, -tends.
B3 : Quoi ?
B1 : j'crois que j'ai trouvé.
B3 : Vas-y montre.
B1 : On fout tout ça au carré.
B3 : C'est c'que je venais de dire tout à l'heure mais le problème comme disait B2/
B1 : En fait si on fout tout ça au carré on a plus rien.
B3 : Oui.
B1 : Eh mais après on remet là *inaudible* et puis c'est terminé.
B : *inaudible*
B1 : *inaudible*
B3 : C'est ce que je voulais faire tout à l'heure mais B2. Toi ce que tu voulais faire en fait c'est l'expression conjuguée, non ?
B2 : Mais non ! C'est parce que/
B1 : *inaudible*
B2 : Quand t'as mis au carré, t 'as mis ça au carré moins ça au carré mais c'est pas bon. Quand tu mets au carré tu mets tout entre parenthèses.
B3 : Ah ouais…
B2 : C'est pas bon c'que t'as écrit. C'est pour ça… C'est pas l'expression conjuguée.
B3 : Oui, oui, oui.
B2 : C'est une identité remarquable.
B3 : C'que tu peux faire aussi pour éviter ça. Eh, tu m'écoutes ? Ce que tu peux faire aussi c'est multiplier des deux côtés comme t'as zéro d'un côté, tu multiplies par racine de 2. b plus 1 a tu vas avoir b^2 moins a^2 et euh, et de l'autre côté ça restera zéro. Tu peux toujours bidouiller.
B1 : Eh voilà.

Episode 6

B2 : Tu trouves quoi ? $2b^2$ moins.
B3 : Oui parce que lui tu vois il part directement du fait que/
B2 : Oui oui il est parti de ça/
B3 : Ca revient au même au fond.
B1 : Alors maintenant faut trouver une solution particulière donc b = a = 0. Vous me suivez ?
B3 : Tout à fait normal ouais.
B1 : Ma solution particulière donc on peut appliquer ces machins, hop pirouette.
B3 : Ouais mais bon euh comme disait B2 il faut voir sur quoi ça nous mène.
B2 : Ouais.
B1 : Eh, faut bien le faire pour le savoir.
B2 : Dons vas-y fais voir comment ça fait.
B3 : Ben vas-y fais-le et puis on voit.
B1 : Non ça cloche.
B3 : Pourquoi ?
B2 : Non mais vas-y.
B3 : Vas-y fais le et puis on voit.
B1 : C'est nul de ce côté-là *inaudible.*
B3 : Ben on l'avait déjà fait ça en classe, attends.
B1 : Non.
B2 : Non c'était égal à 1. Non c'est égal à d, c'est ça, c'est ça le théorème de Bézout.
B3 : C'est égal à d hein c'est pas égal à 1.Ben regarde b est non nul.
B2 : C'est possible oui.
B1 : Ah, c'est raté.
--
B2 : Théorème de Bézout.
B3 : Attends, Ouais c'est égal à 1.

B2 : Ouais.
B1 : Ah non ! Parce que j'suis con j'ai pris une solution qui est égale à 0/
B3 : J'suis sûr normalement tu peux te débrouiller pour que quand c'est égal à 0.
B2 : Ben tu prends 1 et euh racine de 2.
--
B1 : T'es trop intelligente.
B2 : Ben c'est ça hein
B3 : Pourquoi 1 et racine 2 ?
B1 : Non parce que ça fait pas 0.
B3 : Exact.
B2 : 1 et racine de 2 ça marche mais seulement racine de 2 il va pas.
B3 : On sait pas si , on sait pas si. Donc c'est pas entier donc euh.
--
B2 : Mais le problème c'est qu'il faudrait enlever la racine.
B1 : Moi j'suis sûr qu'on peut trouver une solution avec *inaudible.*
B3 : Lequel ?
B2 : Ben dresse l'algorithme d'Euclide peut-être.
B1 : Avec des a et des b *inaudible.*
B3 : Non ça c'est normal que y'est des a et des b. Normalement t'as des inconnues. Mais c'est pas à 0. Et en plus ils sont au carré.
B1 : Pis, de toute façon ça fera jamais 0.
B3 : …Un peu la merde quoi mais euh.
--
B3 : Ben justement que ça soit au carré ça nous arrange parce que/
B1 : Mais j'avais remarqué ça.
B3 : Du fait, non du fait que la solution soit racine de 2, l'inconnue c'est a^2 c'est pas a. donc a^2 c'est égal à 2. Donc ça marche c'est un nombre entier là ça marche.
B1 : a^2 il est pas égal à 2 il est égal à 2 b^2.
B3 : Oui non mais eux on parlait des solutions particulières.

Episode 7

B2 : Mais si je sais ! On peut poser grand B qui est égal à b^2 et grand A qui égal à a^2. C'est pas pareil, on peut pas faire comme ça ?
B1 : Si on peut faire comme ça mais euh je vois pas à quoi ça nous ça nous arrange.
B3 : Grand B qui est égal à b^2, pour quoi faire ?
B1 : Si ça la facilite/
B3 : Non, non.
B1 : Ben si ça la facilite.
B2 : Ben comme ça, comme ça b il est égal à 1 et a il est égal à 2.
B3 : Ouais c'est justement c'est ça dont je parlais, … de là tu peux, tu peux, arriver à démontrer que c'est des nombres entiers qu'on cherche. Que les solutions c'est des nombres entiers.
B1 : Allez on est parti là-dessus. Sauf que j'ai rien suivi.
B2 : Tu écris on pose euh $B = b^2$, $A = a^2$. Tu là tu déduis, tu remplaces euh dans l'égalité. … Mais non !
B3 : Mais non bordel !
B2 : T'écris 2 B/b moins grand A, 2 grand B moins grand A égal 0.
B1 : Super et ?
B3 : Et là on est coincé parce que *inaudible* il faut que ce soit égal à 1.
B1 : *inaudible*
B3 : Non c'est pas égal à 4, ça c'est égal à 1 et ça c'est égal à 2.
B2 : Passe le 1 de l'autre côté. Ah non ! une solution particulière. Mais non ça va pas.
B1 : Pourquoi pas ?
B2 : Parce que c'est égal à 0. On peut pas faire.

B3 : Ben moi je me souviens qu'on avait fait quand c'est égal à 0. J'sais pas j'dis peut-être des bêtises. Mauvais souvenirs.
B1 : Ca rien à voir avec Bézout.
B3 : J'te jure j'm'en souviens. Ah ouais quand c'est égal à 1 c'est mieux parce que/
B2 : au plus bv égal 1.
B1 : En tout cas j'pense pas que bézout il marche avec des nombres/
B3 : Non ça marche pas. Résolution de ax plus by égal d.
B1 : Attends mais il faut voir si/
B2 : Où ça ?
B3 : *inaudible* juste après le théorème de Bézout.
B2 : Ah ben voilà !
B3 : Fraction irréductible.
B1 : Ca c'est très bien ça.
B3 : Ppcm ?
--
B3 : Ben, ça c'est exactement ce qu'on cherche.
B1 : Ah ben non on est stupide.
B3 : Sauf que là c'est/
B1 : C'est déjà irréductible.
B3 : Ben irréductible euh, ben justement c'est la même chose, tu fais exactement c'qu'ils t'indiquent pour montrer que c'est un truc irréductible. Si tous les éléments montrent que c'est pas possible et bien ça veut dire que c'est pas rationnel.
B1 : *inaudible* je sais que ça à l'air hyper facile mais c'est harchi dur.
--
B1 : Qu'est-ce que je cherchais moi, ah oui.
B3 : Ca c'est bien ça vas-y regarde. Lisons-le.
B1 : T'etais censé le lire hier soir.
B3 : Toi tu l'as lu toi ?
B1 : Moi non, je connais déjà mon cours.
B3 : Mais faut quand même qu'on trouve (en rigolant).
B1 : Comment ça se fait qu'on soit bloqué c'est pas si terrible que ça. Tout le monde est bloqué.
B2 :
B3 : Non, j'crois pas qu'on l'ait fait en fait.
--
B3 : Alors qu'est-ce qu'ils font là ils disent que a égal ga' en disant que g est le PGCD de ab. b égal gb'.
B1 : Attends mais si on a bon là.
B3 : Pourquoi ?
B1 : On a la solution particulière après on trouvera la solution générale. On n'a qu'à montrer que la solution générale elle est jamais entière et pis c'est terminé.
B3 : Ouais mais pour trouver la solution générale tu fais comment ?
B1 : Ah non mais/
B3 : Ben oui c'est ça depuis tout à l'heure.
B1 : J'suis sur on peut le zaper ça !
B2 : Eh ben si tu fais euh z B/b plus, z B/b égal plus A/a. 2 non 2 B/b pardon c'est un 2. 2 B/b égal plus A/a tu peux pas le faire ?
B3 : Ouais mais euh A/a c'est une inconnue.
B1 : Passe mon cahier.
--
B3 : Bon g il doit être un diviseur commun à a et b.
--
B1 : (en rigolant) Eh mais c'est quoi ce sujet là comment ça se fait que c'est aussi dur ?
B2 : Mais non c'est pas dur il faut réfléchir.
B3 : Ben regarde ce qu'ils font eux. Si on avait pas 0 j't'assure on trouverait tout de suite.

B1 : Attends voir, mais d ils ont jamais dit qu'il ne pouvait pas être nul en fait.
B2 : Mais oui.
B1 : Ils disent donné dans Z.
B3 : Mais justement ! J'me souviens avoir fait quand c'est égal à 0. J'te jure.
B2 : Oui mais le problème c'est que j'ai regardé, et euh/
B3 : Et c'est vrai que elle elle utilise que des exemples pour ? le cours.
B2 : Et le problème c'est que a, b d ils sont dans Z, donc là on a 2, 1 et 0 donc c'est dans Z.
B3 : Ca c'est bon de toute manière.
B2 : Euh, et x et y, il faut montrer qu'elles ne sont pas dans Z. C'est ça qu'il faut faire en gros.
B3 : Inconnues x et y dans Z.
B2 : Et nous il faut qu'on montre qu'elles sont pas dans Z.
B3 : Ben il faut d'abord les calculer.
B2 : Oui non mais/
B3 : Tu calcule toutes les solutions/
B2 : D'accord on calcule les solutions mais à la fin faudrait qu'on arrive à ce qu'elles soient pas dans Z ou pas ?
B3 : Ben déjà calculons les solutions. Ben oui. Et après et après c'est autre chose.
B2 : Bon alors il existe u et v dans Z.
--

Episode 8

B2 : Oui mais le problème c'est que a et b pour nous c'est 2 et 1 et 2 et 1/
B3 : Et après t'auras des solutions pour/
B2 : 2 et 1 ils sont premiers, entre eux ?
--
B2 : On peut faire toute combinaison linéaire qui/ est-ce qu'on peut remplacer 2 B/b plus, 2 B/b moins A/a par 4 B/b moins 2 A/a ?
B3 : Tu multiplies par 2 bien-sûr t'as le droit.
B2 : J'ai le droit.
B3 : Ben oui mais le problème c'est que de l'autre côté tu vas avoir 0, 0 fois 2 ça fait 0.
B2 : Oui oui je sais bien mais euh.
--
B3 : C'est bien le printemps. Euh !

Rires.

B1 : J'suis sûr qu'on peut continuer là-dessus.
B3 : Soit on s'est complètement paumés et ce qu'on fait c'est n'importe quoi.
B1 : Eh ben c'est quitte ou double.
B3 : Soit, soit c'est bon mais le problème c'est que va savoir si c'est bon ou pas.
B2 : Vas-y écris que ça correspond à 4 B/b moins 2 A/a.
B3 : Mais qu'est ce que ça change que ça soit 4 B/b moins 2 A/a ?
B2 : Parce que comme ça ils sont pas premiers entre eux.
B3 : Ca change quoi ?
B2 : Ils sont pas premiers entre eux.
B1 : Ben là ils sont premiers après on s'en fiche ça sert à rien.

Episode 9

P Alors comment vous vous en sortez ?
B2 : Très mal.
B1 : On a mis au carré.
P D 'accord. D'accord donc tu as ?
B3 : On a trouvé ça ouais.
P Oui. Alors ça te donne quoi ? Ca va te donner quelque chose sur A.

B2 : 1 et 2.
P *Oui mais encore faut-il. Pourquoi c'est 1 et 2 ; je comprends pas c'que tu veux dire.*
B2 : On peut pas trouver une solution particulière pour cette équation et on sait qu'euh.
--
P *Des solutions, des solutions y'en aurait une infinité.*
B2 : Ben oui.
P *Non A c'est pas un demi de B c'est quoi ?*
B3 : A c'est égal à.
B2 : A c'est égal à 2B.
P *tu vas pouvoir en tirer quelque chose pour grand A quand même. S'il s'écrit 2B tu vas pouvoir en tirer quelque chose sur grand A.*
B : *inaudible*
P *Non ! Surtout pas.*
B2 : Par identification on/
P *Qu'est ce que ça veut dire s'il s'écrit deux B ?*
B3 : Ca veut dire/
B2 : Ca veut dire qu'il est euh multiple de/
B3 : De 2.
P *Voilà. Peut-être que tu pourras en tirer quelque chose sur petit a ?*
B3 : Ah ouais.
P *Réfléchissez dans ce sens-là, qu'est-ce que je sais sur grand A qu'est ce que je sais sur petit a ? Qu'est-ce que je vais pouvoir en retirer sur petit b etc. (en s'éloignant) Essayez de voir ce qu'on faire dans ce sens là.*
B2 : Grand A égal 2B. Donc petit a égal racine de 2 B/b. Ouais mais c'est con parce qu'on revient à la racine.
B1 : Attention à ce qu'elle a dit, a² égal 2B/b.
--
B3 : Ouais mais ça revient au même.
B1 : On retombe sur le truc de tout à l'heure.
B2 : Ben ouais.
B3 : Tu vas avoir A/a égal à 2 racine de B/b. Ben si on avait pas A/a égal à 2 racine de B/b, égal racine de 2 B/b. On l'avait pas ça.
B2 : Mais si, ben tu changes on est parti de ça, donc forcément euh A/a égal racine de 2 B/b, c'est/
B1 : ça revient au même.
B3 : Ah ouais, ben ça fait A/a égal B/b fois racine de 2.
B2 : Ben oui mais ça, c'est de là qu'on est parti donc forcément.
B3 : Qu'est ce qu'on peut en déduire.
B1 : Ca se passera pas comme ça y'en a marre maintenant.
B3 : Hein ?
B1 : Y'en a marre maintenant.

Episode 10

B2 : Attends, A/a égal 2 B/b, donc.
--
B3 : Elle nous avait donné un truc, y'a un blem quoi, que A/a est égal à 2 B/b.
B1 : Ouais c'est clair et ?
B3 : Donc que c'était un, un multiple de 2.
? (B1/B3) : Comme 2 est premier ça veut dire que A/a et B/b sont premiers entre eux.
B2 : Oui mais 1 c'est pas un nombre premier.
B1 : Pourquoi tu mets 1 là-dedans toi ?
B3 : Où tu vois 1 ? A/a égal 2 B/b.
B2 : Ben oui mais euh tu sais très bien qu'il faut faire, tu veux utiliser quoi ? En disant que 2 est premier.

B : Ben utiliser le théorème de Gauss.
B2 : Et ben oui et ben il faut que 1 et 2 ils soient premiers entre eux. Et est-ce que 1 et 2 ils sont premiers entre eux ?
B1 : Quels 1 et 2 ?
B3 : Où tu vois 1 toi ?
B1 : Y'a A/a et B/b.
B2 : Faites, faites.
B3 : Non mais sérieusement dis-moi parce que moi /
B2 : Ca veut dire que 2 divise 1 et…on tourne en rond. Fin vas-y continue, fais ta démonstration.
B1 : 2 divise a pas 2 divise 1.
B2 : Vas-y fais ta démonstration.
B3 : J'vois pas d'où vient le 1.
B1 : Pour l'instant on fait pas des démonstrations on lance des idées en vrac. Lancez toutes vos idées.
B3 : Théorème de Gauss.
B1 : Allez larguez vos idées !
B3 : T'as dit A/a et B/b ils étaient premiers entre eux.
B1 : Forcément. De toute façon ça c'est logique.
B2 : Oui parce que c'est une fraction irréductible. - B1 : Fraction irréductible.
B3 : Ah oui d'accord. Non mais attends. Et donc le 2 il y a bien un *inaudible* le 2 il faut en conclure pour le 2, non ?
B1 : Le 2 mais qu'est ce qu'on en a foutre du 2 ?
B3 : Ben justement.
B1 : Ah, la question qu'elle est bonne.
--
B1 : Pour l'instant on lance les idées comme ça après on fera un raisonnement avec.
B2 : T'écris, t'écris en dessous a^2 égal $2b^2$.
B3 : Ben sachant que grand A c'est égal à/
B2 : Ouais *inaudible*.
- B1 : Eh vous pouvez écrire vous aussi.
--
B2 : A/a et B/b sont premiers entre eux.
B1 : On peut même dire que A/a il est pair.
B2 : Donc B/b il est forcément impair
B1 : Pourquoi ? Ah ben oui.
B2 : B/b est forcément impair parce que comme ça ils sont/
B3 : Pourquoi B/ b il serait forcément impair ?
B1 : Parce que réfléchis deux nombres pairs sont jamais premiers entre eux.
B3 : Exact.

Rires.

B1 : Toi même tu l'aurais pas trouvé.
B2 : Je ne l'aurais pas sorti aussi vite.
--
B2 : Mais b^2 il est impair or un carré c'est positif, euh, c'est pair un carré.
B1 : Ah non non non.
B2 : Ah non 3 fois 3. Merde c'est vrai.
B1 : Donc ça veut dire que B/b est impair.
--
B3 : Donc A/a et B/b ils sont premiers entre eux.
B1 : Ah on n'est plus très loin là.
B3 : A/a et B/b sont premiers entre eux. Ca ça sert à rien ça continue en fait/
B1 : Attends on est plus très loin, ça j'en suis sûr on est plus très loin.
--
B3 : Ben a est multiple de 2 si j'ai bien compris, j'écoute ce que vient de dire A1.
B1 : Ben s'il est pair il est multiple de 2 forcément.

B3 : Ca veut dire/
B2 : A/a est pair B/b et il est impair.
P *Qu'est-ce qui vous arrive ? Voilà, voilà.*
--

Episode 11

P *Alors qu'est ce qui se passe finalement ? Grand A est pair donc/*
B2 : Son carré est pair.
P *Attends grand A c'est le carré.*
B2 : Oui.
P *Avec vos notations. Petit a est forcément pair.*
B2 : Grand B est impair donc petit b est impair.
P *Et alors qu'est-ce qui se passe ? Donc tu as petit a qui est forcément pair petit b qui est forcément impair ben regarde c'que ça donne. Remplace petit a par euh si petit a est pair il va s'écrire comment ?*
B1 : 2a.
B2 : 2q.
B1 : Euh 2q.
P *Ben regardez c'que ça donne, vous remplacez là-dedans petit a.*
B2 : Et l'autre b c'est 2q plus 1.
P *Ben regardez. C'est pas le même, c'est pas le même.*
B2 : Ah oui 2, 2.
P *Occupez-vous de petit a donc regardez comment petit a s'écrit, qu'est-ce que ça vous donne là et puis euh essayez de voir ce que ça va donner.*
--
B2 : Ecris petit a égal 2q.
B1 : Ouais.
B2 : Et tu remplaces euh dans laquelle.
--
B2 : Dans celle là ou dans celle-là, j'sais pas, dans laquelle ?
B3 : Pour l'autre ce sera 2q' plus 1.
--
B2 : Elle a dit qu'on devait d'abord s'occuper de a.
B3 : Non tu mets les deux en même temps et t'arrives au fait que.
B1 : Pour l'instant on va faire avec grand A.
--
B2 : Non ça fait 4 q^2. Puisque tu mets au carré.
B1 : Je suis avec grand b et grand a là.
B2 : Moi à ta place j'aurais pris les petits. Personnellement j'aurais pris avec les petits parce que là c'est pas 2 c'est 4, ton truc il faut que ce soit 4 parce que A/a c'est pas égal à grand q.
B3 : Pourquoi 4 ?
B2 : Parce 2 au carré ça fait quoi ça fait 4. Remplace, remplace a par 2q là-dedans.
B3 : Attends, attends.
B1 : Chaque chose en son temps jeune fille, tu te calmes.
B3 : Non mais non t'as raison parce que le 2 de toute manière il était déjà au carré.
B1 : Ben oui, c'est racine de 2 *inaudible*, c'est pas 2..
B2 : J'te parle de A/a j'te parle pas de B/b !
B1 : Aïe !
B3 : Qu'est ce qu'il a A/a ?
B2 : A/a il est au carré/
B1 : et alors ?
B2 : Et A/a il s'écrit 2q.
B1 : C'est pour ça que je suis resté avec grand a.

B2 : Donc a^2 il s'écrit/
B1 : 4q.
B2 : $4q^2$. Et il est où ton 4 ?
B1 : Je te ferais remarqué que je suis avec les grands A.
B3 : Efface tout et mets avec a^2 et b^2.
B1 : J'abandonne.
B3 : Vas-y dépêche-toi on a pas le temps, bouge-toi un peu !
B1 : Eh moi aussi j'ai le droit de travailler hein, pourquoi c'est moi qui
B3 : Mais on travaille on travaille !
--
B1 : C'est carrément débile pourquoi 4 ?
B3 : Parce a^2, a par a ça fait 2a.
B1 : *inaudible* grand A c'est pas fait pour les chiens.
B3 : Oui mais justement avec a tu trompes tout.
B1 : Je trompe rien du tout !
--
B2 : Non on sait pas si ça trouve il a raison mais moi je vois pas c'que tu fais quand tu fais quand tu restes avec les grands a. C'est pour ça.
B1 : C'est pour éviter les erreurs débiles.
B3 : Ben disons que/
B1 : Tu sais que les erreurs de calcul c'est ma spécialité.
B2 : T'inquiète pas on est là pour surveiller.
--
B2 : $2b^2$ est égal à.
--
B3 : Génial.
B2 : D'accord.
B1 : Ah ben oui ! tiens ça veut dire que b^2 est pair.
B3 : Faux. Donc il est rationnel.
B1 : Egal à 2q or b^2 impair donc impossible.
B3 : Putain on a trouvé !
B1 : Ouais ben là c'est qu'un coup de bol.
B3 : Ah non j'y crois pas.
B1 : Ok, là tu peux écrire maintenant.
B2 : Attends deux minutes.
B1 : Arrête c'est bon !
B2 : J'veux juste voir un truc.
B3 : C'est trop beau c'est ça.

Rires.

--
B1 : Madame ?
--
B2 : Oui mais attends parce que si.
B3 : Je pense qu'on a du se tromper.
B2 : Oui non si c'est bon c'est ça.
B1 : Pourquoi ça serait pas bon ?
B2 : C'est bon j'ai compris.
P Voilà, voilà.
B1 : Mais on l'avait pas fait en classe ça par hasard parce que ça me rappelle quelque chose.
B2 : Non moi je/
P Bien B1 ! J'suis bien contente de savoir qu'il y en a au moins un qui se rappelles qu'on l'a déjà fait.
B3 : On s'en rappelait tous les trois mais on/

P *Non elle, elle dit qu'elle s'en rappelle pas. Je l'ai fait en fait juste avant de faire les suites parce que je vous ai dit effectivement que le problème des suites c'était d'approcher les nombres qui n'étaient pas rationnels et donc on l'a fait. Vous me le rédigez correctement.*

B2 : C'est moi qui écrit.

P ? *Et puis éventuellement on reviendra sur certains détails. Pourquoi, c'est toi qui écrit le mieux*

(rires)

P *Bon vous me rédigez ça correctement et puis éventuellement on reviendra un peu sur le nœud du problème… Donc allez-y vous l'écrivez correctement et après vous voyez ce que vous pouvez transposer à racine de 3. Comment ça va marcher pour racine de 3 ? Est-ce que y'a des choses qu'il faudra préciser mieux ou pas. Donc vous me le rédigez correctement pour racine de 2 et pour racine de 3.*

Episode 12

(Ils rédigent).

B2 : Faut poser le problème d'abord.

-- *B1 veut prêter son brouillon à un autre groupe ; B3 et B2 protestent.*

B1 : Mais de toute façon on connaît le raisonnement c'est bon.

B2 : On veut savoir si racine de 2 est rationnel. D'accord. On admet qu'il est rationnel. Non.

B3 : Non,non.

B2 : C'est pas tout à fait comme ça.

B3 : Bon vas-y vas-y.

B1 : On l'a déjà fait en classe j'y crois pas.

--

B2 : Donc alors, si racine de 2 est rationnel.

--

B2 : Si racine de 2 est rationnel alors il s'écrit a sur b.

B3 : Ouais. - B2 : On est d'accord.

B2 : Donc j'dis on admet que racine de 2 est rationnel. D'accord ça va comme ça ?

B3 : Non ça me plaît pas ça.

B2 : Mais on fait dans l'absurde, tu sais on fait par/

B3 : Récurrence ? - B1 : par l'absurde.

B1 : Récurrence Ok ! (en rigolant).

B2 : Non mais vous savez pas ! J'peux pas dire. C'est pas de la récurrence.

B3 : Ben tu pars du fait que. Non ! mais bon.

B2 : Ben on est parti du fait que racine de 2 il s'écrivait a sur b vous êtes d'accord ? On est parti de là.

B3 : De toute manière ils te le donnent.

B2 : Non ils nous le donnent pas !

B1 : Bon d'accord.

B3 : x égal a sur b.

B1 : Non tu fais si/

B3 : x égal a sur b et x c'est un nombre rationnel. On prends x égal racine de 2 donc de toute manière ça ils te le donnent.

--

B1 : Bon ben t'enchaîne les calculs et après on finit.

B3 : Non non.

B1 : Si.

P *Vas-y t'enchaîne les calculs, non, non, t'inquiète pas j'te soutiens.*

Rires

B1 : J'suis grillé.

--

B1 : Ah faut citer le théorème de Gauss en plus.

--
B1 : Ouais ben tu fout le a de l'autre côté.
B2 : Ouais, donc alors.
--
B2 : Non on n'a même pas besoin du théorème de Gauss.
B1 : Ben si pour dire qu'ils sont premiers.
B3 : Ah mais c'est après.
B1 : On le cite quand même.
B2 : On en déduit que a… s'écrit.
--
B1 : Ah mais nous au lieu de *inaudible* on n'a qu'à enchaîner avec racine de 3.
B3 : Ouais ben ouais.
B1 : Même raisonnement alors on commence.
--
- B1 :
B3 : Donc
B1 : $3a^2$, b^2 égal à 0.
B3 : Tout à fait.
B2 : Ouais mais le problème c'est pourquoi ils sont premiers entre eux grand a et grand b?
B1 : Parce que A/a et 2 sont forcément premiers entre eux.
B2 : Parce que petit a et petit b ils sont premiers entre eux mais petit a^2 et petit b^2 on n'en sait rien.
B3 : Ben si si a et b sont premiers entre eux leurs carrés sont forcément premiers entre eux aussi.
B2 : 2 au carré 4 au carré, ils sont premiers entre eux ? 4 et 16 ils sont pas premiers entre eux. C'est pas bon.
B1 : Ouais mais 2 et 4 ils sont pas premiers entre eux.
B3 : Déjà 2 et 4 ils sont pas premiers entre eux.
B2 : Bon alors.
B3 : 2 et 3 et leurs carrés aussi, non j'suis désolé hein. Leurs carrés sont forcément premiers.
B1 : Pas forcément mais bon.
B3 : Vas-y trouve-moi un exemple, trouve-moi un contre-exemple ! Franchement j't'assure.
B1 : Espèce de sale gosse (rires) … Non Ouais si il a raison. (Rires). Ben si c'est normal. Non il a raison hein, par contre l'inverse, la réciproque elle est sûrement fausse.
B3 : Ouais ben oui, j'pense, je sais pas. J'en sais rien en fait.
B2 : Madame ?
B1 : Mais arrête ! On avait trouvé j'en ai marre !
B2 : Non mais non mais c'est peut-être possible mais moi j'suis pas sûre.
B1 : C'est peut-être parce que tu doutes tout le temps que t'as des sales notes.
B2 : Merci B1.
B3 : Il faut pas douter.
B1 : Mais moi j'te le dis direct ça va plus vite.
B3 : De toute façon si c'est faux c'est faux.
B2 : Pair y'a un e ou y'en a pas ?
--

Rires

B1 : J'crois bien.
B3 : J'sais même pas.
B1 : Mais si y'en a un e.
B2 fait appel à P :

Episode 13

B2 : a et b ils sont premiers entre eux, est-ce que leurs carrés ils sont premiers entre eux ?

P *Ah c'est une très bonne question. Oui, parce que imagine que j'ai un, un nombre premier par exemple, un nombre qui divise à la fois a^2 et b^2, donc en particulier tu as, si tu regardes par exemple la décomposition en facteur premier y'aura forcément un diviseur premier commun.*

--

P *Et est-ce qu'un diviseur premier qui divise a^2 est-ce qu'il pourrait ne pas diviser a ?*

--

B2 : Non je comprends pas.

P *Ton problème c'est ça effectivement hein si remarque j'crois pas que t'en aies besoin/*

B2 : Ben si.

P *Ah non.*

B2 : Ben si puique a il est pair et on veut dire que a et b sont, non ben oui ça sert à rien.

P *Ca sert à rien. Je veux quand même répondre à ta question c'est que si j'ai un nombre premier p qui divise à la fois a^2 et b^2, je vais faire avec un nombre premier. Qui divise à la fois a^2 et b^2.*

: Ben forcément/

P *Donc si un nombre premier divise a^2 est-ce qu'il divise a ou pas ?*

--

B2 : Ben peut-être. Je sais pas.

P *Ah, et les deux vous en pensez si un nombre premier divise a^2 il divise a ou il divise pas a ?*

B2 : Ben y'aura forcément a dans a^2.

B3 : Ben moi je pense que oui.

P *Alors pourquoi est-ce qu'il divise forcément a ?*

B3 : Ben j'sais pas dans ma tête/

B2 : Ben parce que c'est a fois a.

P *Ca veut dire quoi dans ta tête ?*

B2 : C'est a fois a.

P *Bon c'est a fois a j'suis d'accord. Mais pourquoi, pourquoi vous êtes sûrs qu'un nombre premier qui divise a^2 il divise a. C'est vrai hein il a raison mais pourquoi tu en ai sûr ? C'est lié à quoi dans ta tête ?*

B3 : Dans ma tête j'ai des exemples. J'me dis par exemple que si 1 est premier avec 9/

P *1 c'est mal choisi parce que/*

B2 : 1 c'est pas un nombre premier.

P *1 c'est pas un nombre premier il faut que tu choisisses autre chose.*

B3 : Oui 2.

P : *2 est premier avec 9.*

B3 : Ben dans ma tête 3 fois 3 ça fait 9.

P : *Oui ! mais alors pourquoi ? Pourquoi est-ce qu'un nombre premier qui divise a^2 il divise forcément a ?*

B2 : Y'en a pas besoin.

P *Tu dis y'en a pas besoin mais si la question se pose autant y répondre. Y'a un peu deux manières de le voir si tu veux soit avec la décomposition en facteurs premiers soit avec le théorème de Gauss.*

B2 : Ah ben non je vois pas parce que... Si on utilisait le théorème de Gauss ça ferait a fois a/

P *Alors p divise a^2.*

B2 : p divise a^2 donc, mais on sait pas si p et a sont premiers entre eux.

P *Ben si p ne divise pas a.*

B2 : Si p il divise pas a.

P *C'est pour ça que je prends un nombre premier. Qu'est-ce que vous savez sur p et a ?*

B : *inaudible*

P *Alors qu'est ce qu'on a dit si p ne divise pas a ?*

B3 : Ben p et a ils sont premiers entre eux. - B2 : Ils sont premiers entre eux.

P *Donc s'ils sont premiers entre eux le théorème de Gauss te dit ? Si p et a sont premiers entre eux.*

B2 : Alors p divise a. - B3 : Alors p divise a.

B3 : Donc ça marche pas.

P *A part ça tu n'en as pas tout à fait besoin là. Mais euh effectivement si un nombre premier divise un carré, il va forcément diviser le nombre.*

B2 : Et donc ce qui signifie que si j'ai deux nombres premiers entre eux leurs carrés sont premiers entre eux.

P *Voilà. Alors à part ça tu n'en as pas besoin sous cette forme là comme ça mais ça peut être utile de savoir faire cette démonstration. Alors tu pourrais le voir aussi avec la décomposition en facteurs premiers. Parce que la décomposition en facteurs premiers de a^2 par rapport à celle de a c'est quoi finalement ?*

B2 : a fois a.

P *Y'en a qu'une. C'est celle de.*

B2 : C'est celle de a au carré.

P *Voilà au carré. Les facteurs premiers qui interviennent dans a^2 c'est bien les mêmes, c'est les deux manières de voir les choses, de toutes façons vous vous rappelez que c'est équivalent les deux choses. Décomposition en facteurs premiers et théorème de Gauss. Bon j'ai répondu à ça parce que tu m'as posé la question mais tel que tu l'as écrit ça n'intervient pas vraiment.*

B2 : D'accord.

--

B2 : Ouais mais y'a un truc qui va pas.

--

B2 : Y'a un truc qui va pas.

B3 : Quoi ?

B2 : Pourquoi B/b il serait impair ? Fin pourquoi j'veux dire.

B1 : Parce que si ils sont premiers entre eux , y'en a forcément un. Ils ne peuvent pas être de même parité.

B2 : Oui mais on a besoin de ça. Pourquoi elle dit qu'on a pas besoin ?

B1 : Bon tu vois la fenêtre là ?

B3 : Tu sautes.

B1 : Non tu m'énerves.(en rigolant).

--

B2 *(à P)* : Pourquoi on a pas besoin je comprends pas. Il faut que a et b soient premiers entre eux pour que grand a et grand b soient premiers entre eux pour voir que B/b il est impair.

P *Non !*

B2 : Ben si pour voir que B/b il est impair.

P *Ben c'est petit a et petit b qui sont premiers entre eux a priori puisque ta fraction est irréductible au départ.*

B1 : En plus voilà.

P *Donc tu le sais au départ. En fait le raisonnement il faut le faire, vous l'avez fait, regarde c'est joli c'que vous avez écrit vous avez fait un raisonnement sur petit a et petit b vous n'avez pas fait un raisonnement sur grand a et grand b.*

B2 : Ben on a commencé pour, on a du dire que A/a était pair, grand il était pair.

P *Grand a est pair donc petit a^2 est pair.*

B2 : Petit a et petit b ils sont premiers entre eux.

P *Oui.*

B2 : Donc il est impair forcément.

P *Mais regarde tes raisonnements c'est bien sur a et b que tu les fais.*

B2 : Oui, d'accord mais c'est pas comme ça que je voulais l'écrire.

P *C'est sur petit a et petit b que tu raisonnes en fait. Grand a et grand b c'est des notations, que tu peux trouver commodes, mais c'est quand même sur petit a et petit b que tu raisonnes.*

Episode 14

Deuxième heure…

P *Comment tu vas le faire là tu as ça….Bon ben essaye voilà tu es en train de l'adapter donc en une dizaine de minutes tu vas l'adapter, on verra qu'elle est la seule difficulté.*

--

B1 : Sauf que là j'suis bloqué.

--

B1 : Ah ben non !

--

B3 : Ah ouais mais euh.

B1 : Ca veut dire que a il est pas entier. C'est fini.

B3 : Ben a s'il est pas entier ouais ça marche pas.

--

B3 : a il doit appartenir à N.

--

B1 : Eh voilà le travail !

--

B2 : On commence pareil.

--

B1 : tatala, j'ai fini…Tiens B2 deuxième feuille.

B3 : Attends, vérifie si c'est bon d'abord.

B1 : Ben c'est bon ! Parce que c'est moi qui l'aie fait.

Rires

B2 : Rationnel ça prend un n.

B3 : Deux n et un l.

--

B1 : Madame ?

--

B1 : C'est fini là.

P *Voilà ! Donc, ben ça t'es pas obligé de l'écrire. Qu'est-ce qui se passe ? Tu me dire ce qui se passe parce que il n'y a plus de pair, impair. Donc là par exemple quand tu passes de là à là il y a quelque chose à dire ? Pourquoi tu écris ça ?*

--

B1 : Ben comme euh. Théorème de Gauss voilà.

P *Voilà ben tu me le dis clairement comment tu l'emploies.*

B1 : Ben 3 et a ils sont /

P *3 quoi ?*

B1 : 3 ne divise pas a. donc…

B3 : Ben oui.

B1 : Là c'est 3 qui divise pas a donc ils sont premiers entre eux.

P *Alors si 3 ne. Hein, donc tu l'écris y'a quelque chose à écrire pour passer de là à là, que tu viens de me commencer, mais je veux que ce soit écrit, et puis après quand tu passes là tu arrives à ça, tu en déduis quoi ?*

--

P *Pour passer de là à là tu vas me faire ton raisonnement, tu m'as dit c'est le théorème de Gauss. Alors tu me le l'écris. Une fois que tu arrives là, qu'est-ce qui fait que c'est impossible ?*

B1 : Eh ben euh.

P *Ca veut rien dire ? !*

B1 : Ben 3 fois/

P *Alors, alors tu vas obtenir quoi là ?*

B1 : Ben 3 ne divise pas a^2…Là je vois pas quoi (rires)

P *Alors il faut pas que tu bloques, il faut que tu me l'écrives correctement.*

B1 : J'pouvais pas faire ça ?

P *Non ! C'est pas du. Si tu veux adapter ton raisonnement tu vois bien que. Dès que tu passes aux racines tu peux plus, si tu veux travailler sur les entiers, il va bien falloir que tu travailles sur des entiers, par sur racine de 3, racine de 3 tu te demandes ce que c'est.*

B1 : Ben si a il est pas entier, c'est terminé non ?

P *Je vois pas pourquoi ça prouverait que a n'est pas un entier ça.*

B1 : Parce que q il est forcément entier, racine de 3 fois q c'est pas un entier.

P *Eh pourquoi ça ne le serait pas ? C'est justement ça que tu veux démontrer. Ce que tu veux démontrer c'est que, d'accord ? Ton problème tu ne sais pas ce quelle est la nature de racine de 3, tu la cherches, donc tu peux pas t'appuyer sur la nature de racine de 3 pour résoudre.*
Tu vois bien que a^2 égal b^2…la première chose que vous avez fait c'est vous débarrasser effectivement de ce racine, vous avez raisonné sur a, b et 2 qui sont des entiers, là il va falloir faire pareil. Donc… travaillez ensemble avant de rédiger. Donc effectivement lui il me dit ça bon vous êtes arrivés au même point, votre 3 b^2 égal a^2, lui il me dit que forcément a égal 3q. Je lui ai demandé d'écrire le raisonnement parce qu'il en est capable.

B3 : Théorème de Gauss.

P *Théorème de Gauss, vous me l'écrivez et ensuite vous arrivez là alors où est le problème, pourquoi ça marche pas ? Pourquoi c'est impossible une fois que je suis arrivée là à b^2 égal 3 q^2, pourquoi ça peut pas marcher ? Alors vous allez m'écrire ça correctement, normalement en moins de 10 minutes vous devez y arriver ! Si avec ce qu'il m'a dit et puis ce que vous êtes en train de dire vous devriez y arriver, mais commencez par vous mettre d'accord sur la démonstration et puis écrivez là.*

Episode 15

B2 : Alors pourquoi t'as écrit que $3b^2$ égal a^2 ? Ah d'accord.

--

B2 : Pourquoi t'es passé…si 3/

B3 : Ben si 3 divise a/

B1 : Il divise pas.

B3 : Non il divise pas a.

--

B2 : Oui.

B1 : Bon on continue. Tac, tac, ça.

B2 : Non si il divise pas a, ça veut dire que 3 et a^2 ils sont premiers entre eux. Puis a et b ils sont pas premiers entre eux.

B1 : Qu'est ce qu'elle raconte elle ?

B2 : C'est quoi le théorème de Gauss ? Tu le connais ?

B1 : Ben oui ! J'viens de te le citer.

B2 : Non, c'est pas bon ce que t'as dit.

--

B1 : Bon toi madame qui doute tout le temps y'en a marre maintenant.

B2 : Non vas-y j'te dis c'est pas ça.

B1 : Parce que a il est premier donc que ça divise pas/

B : Ben vas-y toi, si c'est pas ça.

B : Ouais si t'es si maligne.

B2 : Regarde, t'imagines que si 3 il divise pas a, donc tu me dis que si 3 il divise pas a, alors b et a ils sont premiers entre eux.

B1 : Oui bon j'ai oublié car 3 est premier OK ? Voilà c'est terminé maintenant.

B2 : Non si ça et ça, si 3 et a sont premiers entre eux alors a^2 divise b^2.

B1 : Ouais plutôt.

B2 : C'est ça le théorème de Gauss.

--

B2 : Or, or quoi ben or, a et b ils sont premiers entre eux.

B1 : Voilà alors ça s'écrit 3q. Donc 3 divise a.

B3 : Bon vas-y B2 écrit, écrit le théorème. Toi inaudible.
B1 : C'est pas de ma faute, moi j'suis plus euh/
B3 : Non mais moi aussi j'suis comme toi.
--
B2 : Bon à trois on s'en sort pas mal quand même j'trouve.
B1 : Ouais ben pas assez.
--
B2 : Donc on pose pas de grand B cette fois, ni de grand a c'est pas la peine.
B3 : Ben non. Même dans le premier apparemment ça en vaut pas tellement la peine.
B2 : C'est pas grave.
--
B3 : Ca leur sert à quoi au fait de nous enregistrer ?
B2 : C'est pour elle j'sais pas.
B1 : Y'a qu'à faire *inaudible*.
B3 : C'est pour les archives.
B1 : Bon après on développe, paf, après on atterrit là.
B3 : Tout à fait.
B1 : Or a s'écrit 3q.
B3 : Tout à fait.
B1 : Donc b ne peut pas s'écrire 3q aussi.
B3 : Logique.
B1 : vu qu'ils sont premiers entre eux.
B3 : *inaudible*
B1 : Parce que ça veut dire qu'ils ont comme diviseur commun 3, et ça c'est impossible car a et b ils sont premiers entre eux.
B3 : a et b sont premiers entre eux, tout à fait.
B1 : J'ai trouvé !
B3 : Mais bon maintenant il faut bien la rédiger la/
B1 : C'est sûr que si on regarde mon torchon *inaudible*.
--
: Donc c'est quoi en fait exactement là ton texte ? On a dit que b^2 est égal à 3 q, or a^2/
B1 : Nous pour l'instant on en est à là.
B2 : C'est a qui s'écrit 3q ou c'est a^2 qui s'écrit 3q?
B1 : C'est a^2 qui s'écrit 3q.
--
B2 : Voilà, d'accord.
B3 : Donc on disait. On dit que b^2 est égal à $3q^2$, c'est ce qu'on montre c'est ça ?
B1 : C'est carrément impossible.
B3 : Et comme a^2 il est égal à $3b^2$, on en déduit que, que 3 ne peut pas être leur diviseur commun car ils sont premiers entre eux.
B1 : Voilà.
B2 : Attends, -tends, -tends, recapepetez j'ai pas bien compris/
B3 : Mais à mon avis faudra mieux le/
B1 : Ben non c'est top.
B3 : Le rédiger parce que/
B2 : Donc $3b^2$ égal 3q, c'est ça ?
B3 : Ben c'est-à-dire que. Donc quand tu vas faire les calculs/ - B2 : Ou b^2 égal q ?
B1 : Ben a^2 ça fait pas 3 q.
B3 : Ben si !
B1 : C'est $3q^2$.
B2 : Ben si t'as dit que a ça faisait 3q.
B1 : $3q^2$. Et ton carré tu l'as mangé.
P *Alors où est le problème ?*
B1 : Ouais non parce que 3 euh, le diviseur commun de a et b ce sera 3 et c'est pas possible.

P *Ah, voilà ! Voilà, écrivez le ça, c'est bon ce que vous me dites.*
B2 : Madame, mais y'a un truc que je comprends pas, pourquoi vous m'avez dit que a^2 c'était 3q ?
P *C'est pas moi qui l'ai dit.*
B2 : Non, non c'est les deux.
B1 : C'est a qui s'écrit 3 q.
B2 : C'est a qui s'écrit 3q ?
P *Alors le fait que a^2.*
B3 : Ca fait 9, ca fait 9 q^2 alors.
B1 : Ouais
B2 : D'accord.
B3 : Parce que $3b^2 = 9q^2$.
P *Là je comprends pas du tout ce que tu m'écris par contre.*
B2 : Non non oui c'est pour ça que je comprenais pas.
P *Je crois qu'il va falloir que vous vous réexpliquiez un peu, parce que là, c'qu'elle a écrit c'est pas du tout c'que lui il me dit.*
B3 : Ouais.
B1 : Mm.
P *Alors il faudrait peut-être que vous en discutiez parce que…*
B1 : Ben elle m'écoute pas.
P *Non non…vous vous battrez à 11 heures 30 là vous vous mettez d'accord.*
B3 : Alors on est parti c'est ça donc là on a la même chose : 3 b^2 égal a^2.Tout à fait si 3 divise pas a^2 alors.
--
B3 : Ok ben là on a, on a à peu près sauf que là c'est $3q^2$ non ? puisque que c'est du a^2. C'est $3q^2$, ça fait $9q^2$. Pourquoi t'as, t'as… $3b^2$ égal $9q^2$, c'est bien ça c'est bien là où on est. Regarde B2. Jusque là tout est bon, c'est juste là en fait. C'est $3b^2$ il va être égal à $9q^2$.
B2 : Non non non non mais c'est ça là, c'est ça là qu'est pas bon. Parce que regarde.
B3 : Où ça ?
B2 : Si 3 ne divise pas a^2 alors a^2 divise b^2 d'accord ça c'est le théorème de Gauss.
B3 : Mm.
B2 : Or a et b ils sont premiers entre eux, d'accord, donc 3 il divise a^2, c'est le théorème de Gauss ça.
B3 : Ouais.(timidement).
B2 : D'accord ?
B3 : Ouais.
B2 : Donc si 3 il divise a^2 ça veut dire que a, que a^2 il s'écrit comment ?
B3 : B1.
B3 : Mm ?
B2 : C'est ça. Tu vois c'est pour ça.
B1 : Ah y'en a marre.
B3 : Ah ouais parce que ah oui.
--
B3 : Ouais ben euh.
B2 : Donc, écris, écrivez le théorème de Gauss parce que si ça trouve c'est moi qui l'ai mal écrit.
B3 : Ben j'pense qu'au contraire que tu l'as mieux écrit que nous j'ai l'impression.
B1 : (Rires) On est des cancres.
B3 : Attends qu'est ce t'avais écrit, si 3 ne divise pas a^2 alors a^2 et b^2 premiers entre eux. Oui bon ça de toute manière, ça euh, tout à fait. Ouais mais là où on se plante c'est là en fait. Quand a et b sont premiers entre eux/
B1 : Là en fait on a sauté une étape les enfants.
B3 : C'est quoi l'étape ?
B2 : Donc grand a. Si on avait gardé avec les a ça aurait été mieux. Donc grand a il s'écrit, ben non !
--
B1 : On a oublié une étape euh.

--

B3 : Théorème de Gauss et nombres premiers *(il feuillète un livre).*

B1 : Ca sert à rien qu'on ait le théorème de Gauss j'ai sauté une étape.

B3 : C'est quoi l'étape que t'as sautée ?

B1 : Ben j'suis passé directement au petit a de au petit b.

B2 : C'est pas grave ça.

B3 : Donc 3b² égal a². On est d'accord. Or toi t'en as conclue que 3b² était égal à 9q².

B1 : Ouais c'est l'étape que j'ai sautée ça.

P Voilà ben c'est ça l'étape que moi je veux quand même que vous…que vous…C'que vous pouvez faire écrivez le moi tel que vous le comprenez là et vous détaillerez l'étape après. D'accord ? Donc écrivez-moi votre raisonnement, la structure de votre raisonnement y'a manifestement une difficulté là sautez-la pour l'instant, écrivez-moi bien la structure du raisonnement et on reviendra après là-dessus. D'accord ?

B3 : D'accord. Donc euh c'qu'on va faire c'est qu'on va arrêter la rédaction là, on va continuer on va rédiger *inaudible*. D'accord ?

--

B1 : Ouais mais j'ai sauté une étape mais je sais pas où.

B3 : Ici ben c'est ici que t'as sauté une étape. Ben ça elle a dit qu'on s'en occuperait plus tard.

B2 : Donc alors 3b² égal a² et ensuite c'est quoi ta ligne d'après, c'est 3b² égal 9q².

B3 : C'est ça ouais et c'est là où il a sauté une étape. Donc là y'a une étape entre les deux ici où il faut apparemment utiliser le théorème de Gauss et euh, on l'a pas fait et ça elle a dit qu'on y reviendrait plus tard, qu'il faut qu'on continue.

B2 : Vas-y d'accord moi j'essaye en attendant euh de trouver ça, vous continuez.

B1 : C'est elle qui rédige c'est pas moi. Sachant que notre rédaction …Alors il vaut mieux que ça soit toi qui rédige. Non on y va tous ensemble.

B3 : Non vaut mieux pas qu'on se disperse vaut mieux tous qu'on reste bien dans le même sujet. Donc ensuite, donc on simplifie par 3, pof, pof, t'as b² égal 3q. Et de là donc c'est ici en fait qu'on doit écrire notre raisonnement. T'écris donc a², on sait que a² est égal à 3q². Enfin on a démontré/

B1 : Attends.

B3 : Parce qu'on est passé, c'est avec ça justement.

--

B3 : Ah non c'est pas égal à 3q² a². C'est égal à 9q².

--

B3 : On est pas loin. On est à/

B2 : Ben je reviens toujours sur le même truc hein même avec le théorème de Gauss. Théorème de Gauss…T'as pas une souris Tpex ?

B3 : Non.

B2 : Bon ben je raye alors.

B3 : Ouais.

--

B3 : Non mais là en fait où on s'est planté. Toute manière ça revient au même parce *qu'on ait 9q² ou q².*

B1 : Pourquoi ?

B3 : Ben parce, parce que q² c'est. 9 c'est 3 fois 3.

--

Episode 16

B3 : Alors le diviseur commun ça peut pas être 3.

B1 : Oui j'ai compris ce que tu voulais dire.

B3 : Leur diviseur commun ça peut pas être 3.

B1 : Oui je sais.

--

B1 : Ouais mais à ce moment là ici c'est faux.
B3 : Pourquoi ici c'est faux ?
B1 : Parce qu'à ce moment là y'a plus de 3 ici.
--
B3 : Attends là t'es à $3b^2$ égal $9q^2$.
B1 : Y'a pas du 9q normalement y'a que 3.
B3 : Ah…Et c'est là que t'as sauté une étape.
B1 : Ouais.
B3: Tu passes de $3b^2$ à/
B1 : Regarde en fait on a 3 grand B est égal à 3 grand Q. B est égal à grand Q. Ca veut dire que b^2 est égal à grand Q. b est égal à racine de Q.
--
B3: Eh en quoi c'est pas possible ? Donc en gros c'qu'il faut que tu arrives à montrer c'est que $3b^2$ égal à $9q^2$!
B1 : Attends !
--
B2 : Bon bref, on continue la suite on expliquera après.
B3 : Ouais mais bon la suite on est embrouillé.
B2 : Ben pourquoi ?
B3 : Attends non non c'est fini hein !
--
B1 : C'est forcément entier. Ca ça doit être entier ? Ca veut dire que ça, racine de Q/q, ça c'est.
B3 : Pas forcément non.
B1 : Attends ah ben non.
B3 : Non justement.
P Alors est-ce que vous l'avez écrit la structure, écrivez –moi la structure de ce raisonnement.
B3 : C'est-à-dire que/
P Mais bien que je puisse la relire.
B1 : En fait c'est tout faussé à ce moment là.
B3 : Après, après une fois qu'on arrive là.
P Ecrivez-le moi, écrivez-moi tout à l'heure vous étiez capable de me le faire, donc écrivez-moi la structure du raisonnement en admettant effectivement ce passage là, et puis après on y reviendra, mais écrivez-moi la structure du raisonnement.
B2 : Donc c'est juste de passer de $9q^2$ à/
P Oui, c'est juste mais il va falloir qu'on le démontre un jour ou l'autre, mais ça c'est on s'en occupera après de ça, on va laisser ce problème technique de côté et je voudrais avoir la structure du raisonnement. Qu'est-ce qui fait qu'effectivement c'est impossible d'écrire $3b^2$ égal a^2 ?
B3 : Ben euh/
P Et puis ce point technique là, qui est un point technique, on reviendra après dessus.

Episode 17

B3 : $3b^2$ égal a^2 donc euh…
--
B2 : Qu'est ce qu'on avait fait après ? Comment c'est qu'on fait ça maintenant ?
B3 : Ben une fois qu'on est arrivé là, on a dit qu'euh, qu'est-ce qu'on avait fait ? Ben on a dit que a est égal à 3q. b^2 et q^2 sont forcément, sont premiers entre eux.
--
B3 : Or, bon comme b^2 et q^2 sont premiers entre eux, 3 divise b^2 tout à fait, or, donc leur diviseur commun ne peut pas être 3 c'est ça ? 3.
--
B3 : 3 ne peut être un diviseur commun …
--

B3 : Ben voilà.
--
P *Alors vous l'avez votre squelette de démonstration ?*
B3 : Ben on a fait euh.
P *Ecrivez-le parce qu'effectivement tant que, tant que vous aurez pas écrit ça, vous aurez pas les idées claires là-dessus. Alors … on admet, voilà donc si j'ai ça ça veut dire a² divisible par 3 et donc tu admets que a² divisible par 3 implique a divisible par 3, voilà, vous êtes d'accord tous les trois là-dessus ?*
B3 : Ouais mais ça /
P *Bon vous me l'écrivez proprement et puis vous allez essayez. Ce qui vous reste à montrer c'est que si a² est divisible par 3 a l'est forcément.*
- B3: Ouais.
P *Donc vous allez supposer que a ne l'est pas.*
B3 : Mm.
P *Et voir si vous aboutissez à une contradiction. Alors vous allez vous aider pour ça, hein on a besoin de démontrer que si on a a² égal 3b² a² multiple de 3 alors a et b sont multiples de 3. Donc vous avez besoin de montrer que si a² est multiple de 3 alors a est multiple de 3. Donc vous pouvez regarder.*
B2 : Le rédiger c'est après qu'on…/
P *Voilà et après avec ça vous essaierez de démontrer ce petit morceau qui vous manque. A² multiple de 3 implique a multiple de 3.*
B1 : Ouais parce qu'en plus *inaudible*.
--
- B2 : Alors vas-y/
B3 : J'ai l'impression que les autres ils ont d'autres feuilles.
B2 : Oui c'est possible…
--
B2 : Allez-y qu'est-ce qui faut que j'écrive là maintenant ?
--
B3 : Et par l'absurde et minimalité on arrivera à montrer que *inaudible* Ah t'as vu ?
B1 : Quoi ?
B3 : Calculez a² dans les trois questions, a congru à 0…
B1 : Ben quoi ?
B3 : C'est, c'est en fait faut utiliser les congruences.
B1 :
B3 : C'est marrant.
--
P *Vous devriez me rédiger ensemble parce qu'assez régulièrement lui il me met quelque chose sur le cahier, toi tu me dis quelque chose et elle elle écrit autre chose. Or si vous travaillez en groupe ça devrait pas se produire. Donc essayez quand même ou je sais pas changez de place, si vraiment vous avez un problème mais mettez vous d'accord c'est-à-dire que manifestement ce qu'elle écrit n'est pas ce qui est dit et n'est pas ce que lui écrit, donc tu laisses ça pour l'instant vous vous mettez d'accord pour tous comprendre la même chose et me faire le même squelette de démonstration.*
--
B3 : Premiers entre eux donc 3 divise b².
--
B3 : Ouais c'est vrai que c'est assez chelou quand même.
B1 : Laissez-moi tranquille.
B3 : Non mais c'est pas, c'est pas mé, c'est pas une critique.
--
B3 : Ben c'est simple j'vois pas en quoi ça, t'es pas d'accord avec ce que y'a écrit ?
B2 : Si. Mais j'écris exactement ce que y'a d'écrit.

B3 : Ben pourquoi alors ? On finit d'écrire et puis on fait la suite on va pas se saouler avec ça. J'vois pas pourquoi elle nous a dit ça.
B1 : Non parce que à chaque fois, là comme j'étais parti là-dessus, toi …Ben à chaque fois on se sépare.
B3 : Moi j'suis en train de regarder ce que y'a d'écrit/
B2 : Mais pourquoi b^2 et q^2 ils sont premiers entre eux ?
B3 : Ben ça c'est euh/
B1 : Parce que 3 peut pas diviser b.
B2 : Pourquoi ?
B3 : Ben ça justement c'est ce qu'on a admis. Ca fait partie de la première partie qu'on a pas expliquée.
--
B3 : Première partie où justement où a est congru à 0, on doit le démontrer après, non ?
B1 : C'que moi j'ai fait à la va-vite.
--
B2 : Dis-moi ce que y'a écrit.
B3 : Euh a et b premiers entre eux donc 3 ne peut être diviseur commun de a et b.
B2 : Donc en fait/
B3 : 3 ne peut être le diviseur commun de a et b.
B2 : 3 ne peut être le diviseur commun de a et b.
--
B3 : Bon et donc c'est impossible, mais euh je sais pas si c'est pas une bonne démonstration.
B2 : J'suis pas sûre non plus .
B1 : Qu'est-ce que j'ai encore foutu moi…
B3 : Non mais c'est bien. Bon !…
P *Alors vous avez réussit finalement à vous mettre d'accord ?*
B1 : Ca c'est le raisonnement et l'absurde.
P *Voilà ! D'accord, vous êtes d'accord là-dessus maintenant.*
B3 : Oui.

Episode 18

P *Bon alors maintenant, essayez de voir là-dedans qu'est-ce qui se passe. Pourquoi pourquoi est-ce que vous écrivez là donc on trouve si a^2 est divisible par 3, forcément a l'est.*
B1 : Parce que/
P *Ben alors tu me l'écris.*
--
P *Tu commences par les convaincre et après vous écrivez.*
--
B3 : J'comprends pas c'que t'as fait, explique-moi parce que je vois pas trop.
B1 : Ben quoi elle a demandé de calculer a^2, ben calculer a^2 c'est ce que j'ai fait non ?
B3 : a^2 égal 2, a^2 égal 1, ah il faut conclure maintenant.
B1 : Ben ça se voit pas ?
--
B1 : Tant que a n'est pas congru à 0, a^2 peut, si a il est pas congru à 0, ben a^2 il l'est pas non plus.
B2 : T'as trouvé ça pour les trois cas ?
B1 : Qu'est ce que c'est que ça ?
B2 : Là pour ça.
B3 : Pourquoi a ?
B2 : Parce que tu multiplies par a.
--
B1 : Sauf que a il est congru à 1 et après tu tombes sur 1 or a^2 congru à deux…donc c'est faux !
B3 : Comment t'as fait pour trouver a^2 était congru à 2 quand a est égal à 1 ?

B1 : Tu prends un exemple quelconque et ça marche pas. Tu prends 10 ça fait 20, le truc juste avant c'est divisible c'est congru à 2.

--

B1 : Ouais c'est de la triche mais ça marche quand même.
B2 : J'comprends pas ce que t'as fait.
B3 : Bon explique-nous calmement. Quand t'es passé de là à là comment tu fais.
B1 : Hummm, en fait j'ai triché ? Je fais n'importe quoi, 4.
B3 : Ouais.
B1 : 4^2 ça fait 16.
B3 : Ouais.

--

B2 : Moi je trouve 0, 1 et 4.
B1 : Ouais 4 ouais bien joué.
B2 : Ah non, donc 1. Ben 4 c'est/
B3 : Ouais j'suis d'accord que là a^2 ça fait 1, parce que ça fait 4.
B2 : Voilà.
B3 : Mais de là à là ?
B1 : Là regarde/
B3 : Parce que a^2 ça va faire toujours 1 ?
B1 : Exact.
B2 : Regarde.
B3 : Ca fait pas 2.
B2 : a^2 hop, ensuite a^2 c'est congru à a, a il est congru à…/
B1 : Non c'est bon j'ai pigé, j'ai pigé.
B2 : Bon à la rigueur tu mets tout au carré et puis voilà.
B3 : Tu mets directement 1.
B1 : Non non non parce qu'en fait, et rigolez-pas on a mis 10 au carré ça fait 20 !(en rigolant).
B3 : Ouais bon ensuite après comment tu fais, une fois que t'arrives là, là.
B1 : Oh les enfants façon trichée. a, a^2, a hop…OK !
B3 : Donc on a toujours, c'est toujours égal à 1, c'est ça que tu voulais dire ?
B1 : Parce regarde a t'as/
B2 : Ouais.
B1 : Si tu fous au carré, ça fait 1^2 égal à 1 et là 2, hop 2^2 égal à 4.
B3 : Ouais mais le a congru à 0 ?
B1 : Ben 0^2 ça fera toujours 0.
B3 : Ah oui.

--

P *Je comprends pas ce que tu m'as écrit.*
B1 : T'as oublié des carrés, carrés…
P *Non non mais je comprends pas a^2 congru à a je comprends pas, pourquoi a^2 congru à a ?*
B2 : Ca c'est le premier, ça c'est le deuxième, ça c'est le troisième.
P *Pourquoi a^2 congru à a ?… Ah ! parce que tu multiplies des deux côtés !*
B2 : Oui.
P *Oh non t'as intérêt à élever effectivement/*
B2 : Je mets au carré.
P *Oui voilà. Oui tu as raison mais j'avais pas bien saisi.*

--

B1 : Donc c'est réglé cette histoire.
P *Bon ben faites-le si c'est réglé.*
B2 : Oui mais après non je vois pas c'qu'on fait après.
P *Alors explique-lui !Cause un peu !*
B1 : Après ils se plaignent parce que je parle trop.
P *Pourquoi c'est fini ? Effectivement lui il te dit c'est fini, pourquoi c'est fini ?*
B1 : Parce quand a est congru à 1, le carré est congru à 1. En fait/

P *Donc qu'est-ce qu'il n'est pas congru à 1?*
B1 : Il est pas congru à 3.
P *Il est pas congru à 0.*
B1 : à 0.
P *Donc il est pas divisible par 3. Donc.*
B1 : Même raisonnement pour celui-là. En fait c'est seulement quand c'est congru à 0 que ça reste congru à 0.
P *Tu dis là-dedans j'ai 3 cas possibles, et le seul cas où je retrouve a² divisible par 3 c'est le premier.*
B3 : C'est le premier oui.
P *Dans le deuxième cas a² est congru à 1 donc il est pas divisible par 3.*
B2 : Oui oui mais le premier comment on dit que c'est pas le premier ?
P *Ben justement c'est le seul possible.*
B3 : Parce que les autres/
P *Ce qui sont en train de te dire c'est que si. J'ai trois cas.*
B2 : Oui.
P *Dans les deux derniers cas quand je calcule a².*
B2 : C'est a.
P *C'est pas divisible par 3. Donc si a² est divisible par 3 je suis forcément dans le premier cas puisque les deux autres sont exclus.*
B2 : Donc Ca veut dire que…Ca veut dire que a² il serait. Non je comprends pas, je comprends pas ce que ça implique sur a² en fait.
P *Ca n'implique rien sur a². Qu'est ce que tu cherches à démontrer toi ? ton but dans la vie c'est quoi ?*
B2 : Que a² il est égal à…
P *C'est pas ça que tu cherches à montrer. Tu cherches à montrer une implication. Essayez de l'aider, qu'est-ce que vous cherchez à montrer là exactement ?*
B1 : Si alors.
P *Mais si quoi alors quoi ?*
B1 : Non parce que je pense pas qu'elle ait compris que c'etait le raisonnement si alors.
P *Oui.*
B1 : C'est peut-être là qu'elle bloque.
P *Oui c'est-à-dire qu'en fait ce que vous cherchez à montrer vous cherchez pas à montrer quelque chose sur a ou sur a². Vous cherchez à montrer que s'il y a quelque chose sur a², si a² divisible par 3 alors a divisible par 3.* - B1 : a divisible par 3, a égal trois 3q.
P *Mais vous cherchez pas à montrer quelque chose sur a ou a²*
B2 : Oui d'accord.
P *Vous cherchez à montrer une implication.*
B2 : D'accord.
P *D'accord ? Alors est-ce que là tu comprends c'qu'on a fait ?*
B2 : Oui.
P *D'accord donc maintenant faut écrire .*
--
B3 : Ben tu calcules, tu écris les 3 con. Tu mets a égal, tu mets a² égal 0/
B2 : Déjà je vais écrire qu'on cherche à montrer si a²/
B1 : Ouais déjà.
B3 : Ouais écris ça ouais en effet..
--
B2 : D'accord, donc alors/
B3 : a² congru à 0.
B2 : Donc on connaît trois cas là/
B3 : Ouais.
B2 : On met d'abord a module euh a congru à 0 modulo 3.
B3 : Donc a² égal 0.
B2 : Modulo 3.

B3 : Pourtant la première on se débrouillait.
B1 : On a bloqué sur *3.*
--
B2 : Donc a² congru à 0 modulo 3 et a congru à 2 modulo 3 a² congru à 4/
B3 : Congru à 1.
B2 : Congru à 1. Et ensuite comment on écrit pour conclure.
B3 : Eh ben que le seul cas possible pour que, pour que pour admettre que a est égal à 3q est…a congru à 0.

B2 recopie ce que B3 lui dicte.

B3 : qui admet plutôt pour admettre ça fait pas très français.
B2 : Non je comprend pas pourquoi on est parti comme ça.
B1 : Non mais pourquoi vous avez fait ça vous pour que a soit congru à 3 *inaudible*
B2 : Ouais faut que a soit congru à 3 parce qu'on cherche ça.
B3 : Ouais il faut que/ Non pourquoi pour que oui ben oui.
B2 : Pour que/
B3 : Pour que a soit congru à 3.
B2 : Non pour que a² soit congru à 3.
B1 : Ouais.
B3 : Oui oui oui. Pour que a² soit congru à 3 il n'y a qu'un cas possible de départ qui est a congru à 0.
--
B3 : Non a² congru à 3 modulo 3.
B2 : à 0.
B3 : 3 modulo 3 ça fait 0 aussi.
B2 : Ben oui, ça fait 0, modulo 3 c'est pareil.
B3 : Mais moi j'ai mis 3 parce que on comprend exactement le enfin bon.
B2 : Et ensuite ?
B3 : Euh pour que a² bon ben il n'existe qu'il n'y à qu'un seul cas possible c'est euh.
B1 : Ben tu mets qu'il faut que/ …Il faut que a soit congru à 3. Je sais pas pourquoi vous vous prenez la tête comme ça. Vous allez pas chipoter pour un truc comme ça quand même.
B3 : Il faut que a soit congru à 3.
--
B3 : Voilà, parfait.
--
B3 : Bon allez on l'appelle ?
B1 : Peut-être.
--
Madame ?
B1 : Presque, 2-0.
B3 : Oh on est les derniers c'est nul.
P *Alors c'est bon là ?*
B2 : En théorie.

Episode 19

P : *Voilà, donc c'est clair dans la tête de tout le monde ? Alors je vais vous donner.*
--
B1 : T'aurais du aller en L tu serais forte en philo.
P : *A compléter.*
B3 : D'accord.
--
B1 : Nous *inaudible*
B2 : Nous on a la 1 aussi, parce qu'on a supposé ça.
B3 : Alors laquelle on a ?

B2 : On s'est arrêté, nous on a ça pareil.
--
B2 : ça non c'est pas pareil.
--
B1 : Nous on a la 2.
--
B3 : Ouais c'est c'qu'on a fait à peu près.
--
B1 : J'pense qu'on a la 2, on a montré que a et b sont pairs alors qu'ils sont pas censés l'être.
B2 : Ouais.
B1 : Donc on a la 2.
B3 : Où tu vois qu'ils montrent que c'est pair par contre. Ah ouais montrons que.
B1 : Donc on a la 2.
B3 : Sauf qu'eux ils utilisent/
B2 : Eh nous on n'a pas parlé d'ensemble.
B3 : Non on n'a pas, on n'a pas.
B1 : On a montré que c'était pair ça revient au même.
B2 : Alors ça on a pareil, ça on a pareil là on est parti de là.
--
B3 : Ah eux ils ont carrément…ah ils avaient pas pensé aux congruences en fait.
--
B2 : Là on a fait la parité de ça sauf qu'on a pas utilisé les congruences.
--
B1 : On a soit la 1 soit la 2…
B2 : Ouais c'est tout, on a.
B1 : En fait on a fait un petit mixte des deux.
B3 : Ouais un mixte des trois en fait.
B2 : Non des deux. Parce que la 3 j'vois pas…
B3 : Un peu quand même parce qu'on est passé par les carrés.
B1 : Ils passent toutes par des carrés.
B3 : Ben oui donc y'a un petit peu des trois aussi.
B1 : Ben non *inaudible*
B2 : Non parce qu'on s'est pas servi d'exposant.
B3 : Ouais c'est vrai aussi.
B1 : Donc on est dans la 1 ou la 2.
B3 : Ok.
--
B1 : Mais je crois qu'on a la 2.
B2 : Mm.
B3 : La 2 je pense aussi parce que…ah mais quoique si dans la 1ère aussi ils montrent que a et b sont pairs…Attends.
B1 : Faut les relire calmement sans se prendre la tête.
--
B3 : Moi je verrais plus la 1 quand même que la 2.
B2 (à P): *inaudible*
P : Vous me, sur la feuille que vous me rendrez. A compléter.
B3 : On aura pas le temps, il reste plus que 5 minutes.
--
B1 : Ben dans la 2, ça j'en suis sûr.
B3 : Ben pourquoi dans la 2 ?
B1 : Parce qu'on prouve que les deux, les deux ils sont impairs.
B3 : Ben là aussi, ah oui mais là on trouve que a et b sont pairs.
B2 : Se rapproche hein je dis qu'elle se rapproche.
B3 : Notre démonstration elle se rapproche comme de la 1 comme de la 2.

B1 : Beaucoup plus de la 2, parce que nous à la fin je pense pas qu'on ait *inaudible*, on n'a pas parlé de suite non plus d'ailleurs.
B3 : On n'a pas parlé de suite ouais mais euh, on n'a pas parlé non plus d'ensemble d'entiers naturels, et euh d'ensemble vide. Un plus petit élément que l'on. On a pas parlé de a0. Ah si on a fait grand a et grand b mais.
B2 : Se rapproche de la 2. Car euh/
B3 : Car déjà on a. Tu l'as toujours la feuille ?
B1 : On l'a fait par l'absurde. On est d'accord.
B2 : Oui on l'a fait par l'absurde.
B1 : Donc c'est la 2.
B2 : Oui mais supposons par l'absurde, c'est pareil…
--
B1 : On l'a fait par l'absurde.
B2 : Oui d'accord mais euh pourquoi/
B1 : Tu dis que c'est une preuve par l'absurde.
B2 : Car on a montré la parité.
B3 : On a montré la parité.
B1 : C'est un truc par l'absurde et puis c'est tout.
--
B3 : Par contre un truc qu'on n'a pas utilisé c'est les congruences.
B2 : Ouais.
B3 : Et puis on n'a pas utilisé de a0 et b0.
B2 : Non, c'est pas grave.

Episode 20

B3 : Ensuite si j'ai bien compris il faut faire, refaire les trois démonstrations pour chacune de ces trois là ?
B1 : Faut faire des schémas.
B2 : Avec racine de 3.
B1 : Attends, -tends, -tends, ah faut refaire les démonstrations avec racine de 3.
--
B3 : Ah, « on ne vous demande pas de démonstration ».
--
P : Et donc vous essayez de me refaire ces preuves là pour racine de 3.
--
B3 : Mais c'est pas les mêmes toute manière pour racine de 3, parce qu'on montre pas que a et b sont pairs. On utilise pas ça.
--
B3 : C'est un problème de divisibilité.
B2 : Donc alors on fait la première.
B3 : Racine de 3.
B2 : preuve 1 pour racine de 3.
B3 : Mais ça marche pas, ça marchera jamais…Puisque c'est un problème de divisibilité donc c'est pas montrons que a et b sont pairs, c'est un problème de divisibilité pour racine de 3 on a pas du tout fait de la même manière.
B : *inaudible*
B3 : Donc c'est pas normal. Y'a aucune de ces trois preuves qui marche ; même la troisième j'suis même pas sûr qu'elle marche.
B1 : La troisième elle peut marcher quand même.
B2 : La première elle peut marcher hein.
B3 : Mais ils montrent pas que a et b sont pairs c'est ça qui me, qui me trouble.
- B1 : Normal les deux ils sont impairs.
B3 : Ah ben oui, c'est assez logique ouais.

B1 : Donc on fait comme si les deux ils étaient impairs et puis c'est tout. N'empêche c'est chiant…
B3 : T'écris quand même que, comme on va pas avoir le temps de finir là, vu que ça sonne dans trois minutes.
--
B2 : Ca fait 3 b^2 égal a^2.
--
B2 : Oui mais a et b ils seront pairs aussi ou pas ? Avec racine de 3.
B3 : Ah non ils sont impairs si les deux ils sont impairs.
--
B1 : Et je vais péter un câble quoi !
B2 : Donc alors avec l'égalité précédente, on écrit ça, on commence pareil ? Mais aidez-moi vous aussi !
B1 : Ben le problème c'est que je pense pas qu'on puisse transposer le truc aussi facilement.
B3 : Ben c'est ça qui me paraît, puis en plus/
B2 : Ben sauf que tu mets a^2 est égal à 0 modulo 3 comme on a montré tout à l'heure.
B3 : Ben tu ouais ! Mais la preuve 1 c'est ce qu'on a fait aussi un peu sur la racine de 3 sauf qu'on.
--
B1 : Faut pas montrer qu'ils sont pairs faut montrer qu'ils sont divisibles par 3.
B3 : La preuve numéro 1 c'qu'on a fait c'est exactement la preuve numéro 1. Pour racine de 3 c'est la preuve numéro 1 qu'on a faite.
B1 : Parce qu'en fait tu vois là y'a une grosse connerie là, en fait c'est pair c'est divisible par 2. Là ça devient nettement plus clair. Donc en fait c'est ça faut montrer que a et b sont divisibles par 3. Voilà !

SONNERIE !